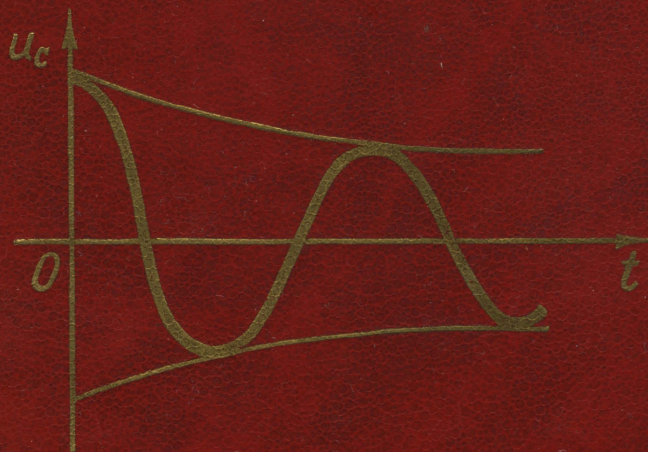


# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

В. С. ПОПОВ



ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ТЕХНИКУМОВ

В. С. ПОПОВ

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

**В. С. ПОПОВ**

# **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА**

Под редакцией Б.Я. ЖУХОВИЦКОГО

3-е издание, дополненное  
и переработанное

Допущено Министерством монтажных и специальных строительных работ СССР в качестве учебника для электротехнических специальностей средних специальных учебных заведений



МОСКВА ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ 1990

ББК 31.21  
П58  
УДК 621.3(075.3)

Рецензент канд. педагогических наук, доц. М. Ю. Зайчик

**Попов В. С.**

**П58** Теоретическая электротехника: Учебник для техникумов/Под ред. Б. Я. Жуховицкого. — 3-е изд., доп. и перераб. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 544 с.: ил.

ISBN 5-283-00587-9

Описаны физические явления и процессы, происходящие в электрических и магнитных полях, в электрических и магнитных цепях, в различных электротехнических приборах и устройствах. Рассмотрены основные методы расчета линейных и нелинейных электрических и магнитных цепей постоянного, переменного токов и цепей с распределенными параметрами. Описаны простейшие методы измерения основных электрических величин. Второе издание книги вышло в 1975 г.

Для учащихся техникумов энергетических, электротехнических, приборостроительных и радиотехнических специальностей.

П 2202020000-018  
051(01)-90 КБ 3-28-89

ББК 31.21

ISBN 5-283-00587-9

© Энергоатомиздат, 1990

## Предисловие

Настоящая книга является учебником по курсу теоретической электротехники. По сравнению с предыдущим изданием (1975 г.) материал учебника дополнен и переработан в соответствии с новой программой, утвержденной в 1985 г. Учебно-методическим управлением по среднему специальному образованию Министерства высшего и среднего специального образования СССР.

Построение книги выполнено по примерному тематическому плану, помещенному в программе. Вопросы, имеющие неодинаковое значение для подготовки специалистов того или другого профиля, составляют отдельные темы. Исключение этих тем не нарушает последовательности изложения основного материала.

В книге нет описания лабораторных работ, которые могут быть поставлены по-разному и иметь неодинаковое содержание, но рассмотрены простейшие методы измерения основных электрических величин и устройство измерительных приборов, что облегчает подготовку к выполнению лабораторных работ.

Примеры, иллюстрирующие теоретический материал, подобраны так, чтобы подчеркнуть особенности того или иного процесса или метода расчета. Расчеты выполнены с применением Международной системы единиц, обозначения элементов цепей на схемах и величин в формулах соответствуют утвержденным ГОСТ.

Материал учебника переработан в соответствии с новой программой редактором — канд. техн. наук, доц. Б. Я. Жуховицким. Им же написаны новые главы (11, 13, 17) и параграфы (1.10, а, в; 1.12, а, б; 2.13; 2.14; 3.4, д; 5.1; 5.3; 6.6, в; 10.7; 12.4; 14.4, б; 15.2, г, д; 15.3, в; 15.9; 16.5; 16.7; 16.9).

Все замечания, пожелания и отзывы о книге просим направлять в Энергоатомиздат по адресу: 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

*Энергоатомиздат*



## Введение

Электрификацией называется широкое применение электрической энергии во всех областях промышленности, сельского хозяйства, транспорта, связи, автоматики, электроники, вычислительной техники, радиотехники и в быту. Электрификация сопровождается внедрением передовой техники и технологии, автоматизацией и механизацией, обеспечивающими повышение производительности труда.

Электрическая энергия обладает ценными свойствами: она относительно несложно получается путем преобразования других видов энергии (механической, тепловой, ядерной, химической и др.), передается с малыми потерями на большие расстояния (сотни километров), просто дробится и преобразуется в нужный вид энергии (механическую, тепловую, световую, химическую и т. д.). Таким образом, электричество позволяет использовать и транспортировать энергию, накопленную в природе (энергию падающей воды, угля, торфа и т. д.).

В СССР электрификация проводится в грандиозных всевозрастающих масштабах. Замечательный лозунг В. И. Ленина, сформулированный им в 1920 г.: «Коммунизм — это есть Советская власть плюс электрификация всей страны», — успешно воплощается в жизнь. Еще в трудных условиях гражданской войны Советское правительство и Коммунистическая партия неустанно заботились о строительстве новых электростанций, прежде всего на базе использования местных энергетических ресурсов (Волховская гидроэлектростанция, 1918 г., Каширская электростанция на подмосковном угле, 1919 г., Шатурская электростанция на торфе, 1920 г.). По инициативе В. И. Ленина был разработан план электрификации нашей Родины — план ГОЭРЛО (Государственной комиссии по электрификации России), который он назвал второй программой партии. По этому плану намечалось за 15 лет построить 30 электрических станций общей мощностью 1,75 млн. кВт. Под руководством Коммунистической партии и Советского правительства этот исторический план выполнен досрочно, к 1931 г.

Успешное выполнение плана ГОЭРЛО, выполнение и перевыполнение пятилетних планов развития народного хозяйства СССР позволили достигнуть в 1950 г. выработки электроэнергии 91 млрд. кВт·ч при мощности электростанций 19,6 млн. кВт, а в 1970 г. соответственно 740 млрд. кВт·ч и 166 млн. кВт.

Дальнейшее развитие электроэнергетики идет нарастающими темпами. В 1980 г. выработка электроэнергии достигла 1293,3 млрд. кВт·ч, а в 1985 г. — 1544,2 млрд. кВт·ч. По плану 12-й пятилетки выработка электроэнергии в 1990 г. должна составить 1860 млрд. кВт·ч.

К особенностям развития советской электроэнергетики нужно прежде всего отнести централизацию производства и распределения электроэнергии. Централизованное производство электроэнергии за последние 25 лет увеличилось более чем в 6 раз, а нецентрализованное сократилось в 2,5 раза и составляет лишь 1,3 % суммарного производства ее по стране. Созданная в стране Единая энергетическая система (ЕЭС) охватывает громадную территорию европейской и азиатской частей СССР. Эта система значительно повышает надежность, экономичность и маневренность электроснабжения.

Рост установленной мощности и производства электроэнергии увеличивает электровооруженность предприятий, что влечет за собой увеличение производительности труда, которая, как неоднократно отмечал В. И. Ленин, является самым главным, самым важным условием, обеспечивающим победу нашего советского строя.

На XXVII съезде КПСС особенно была подчеркнута возрастающая роль топливно-энергетического комплекса для выполнения планов развития страны. Выполнение решений съезда требует развития и внедрения новейшей техники во всех областях народного хозяйства.

В настоящее время в электротехнике можно выделить два основных направления. Первое направление рассматривает задачи производства, передачи, потребления и преобразования электроэнергии, необходимой для развития всех отраслей народного хозяйства. Второе направление изучает вопросы передачи и преобразования информации при помощи электрических сигналов. Задачи передачи информации решаются в автоматике, телеуправлении и телеизмерении, вычислительной технике, радиотехнике и электронике.

Курс теоретической электротехники, в котором теоретические вопросы рассматриваются в неразрывной связи с практическими задачами, дает учащимся знания качественных и количественных соотношений в различных электромагнитных процессах. Курс теоретической электротехники подготавливает учащихся к изучению специальных электротехнических дисциплин и поэтому является одним из важнейших звеньев подготовки техников-электриков.

## Глава первая

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

#### 1.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД, НАПРЯЖЕНИЕ, ПОТЕНЦИАЛ

а) **Электрические заряды и электрическое поле.** Всякое тело содержит большое число элементарных частиц вещества, обладающих электрическими зарядами. Одни из элементарных заряженных частиц входят в состав атомов и молекул вещества, другие не входят, т. е. находятся в свободном состоянии. Элементарная частица протон имеет элементарный электрический заряд, которому приписан (условно) положительный знак, элементарная частица электрон имеет элементарный заряд противоположного — отрицательного знака.

В заряженном теле преобладают положительные или отрицательные заряды, в электрически нейтральном теле число тех и других зарядов одинаково. *Разноименно заряженные частицы или тела притягиваются друг к другу, одноименно заряженные — отталкиваются.*

Движущиеся электрические заряды неразрывно связаны с окружающим их электромагнитным полем, которое представляет собой один из видов материи. Электромагнитное поле характеризуется двумя взаимно связанными составляющими: электрическим полем и магнитным полем, которые можно обнаружить, например, по силовому действию на заряженные частицы или тела. Электромагнитное поле неподвижных зарядов имеет только одну составляющую — электрическое поле.

Так как электрическое поле оказывает силовое действие на электрически заряженные тела или заряженные частицы, то оно способно совершать работу. Следовательно, электрическое поле обладает энергией. Для оценки силового действия электрического поля каждую его точку характеризуют

электрической величиной, которую называют напряженностью электрического поля.

Напряженность электрического поля  $\mathcal{E}$  определяется отношением силы  $F$ , с которой поле заряженных частиц или тел действует на пробный заряд  $q$  очень малых размеров (точечный), находящийся в данной точке поля, к численному значению этого заряда:

$$\mathcal{E} = F/q. \quad (1.1)$$

Пробный заряд должен быть настолько мал, чтобы его внесение в исследуемое поле не приводило к перераспределению зарядов, поле которых с напряженностью  $\mathcal{E}$  рассматривается.

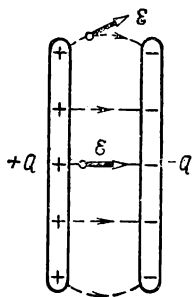


Рис. 1.1. Электрическое поле между двумя заряженными плоскими параллельными пластинами

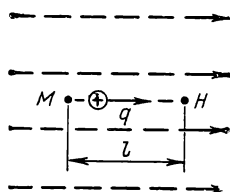


Рис. 1.2. Перемещение электрического заряда  $+q$  в однородном поле

При  $q$ , равном единице,  $\mathcal{E}$  численно равно  $F$ , т.е. напряженность электрического поля численно равна силе поля, действующей на единичный заряд.

Напряженность поля характеризуется не только численным значением, но и направлением, которое совпадает с направлением силы, действующей на положительный точечный заряд, находящийся в данной точке поля. Следовательно, *напряженность поля — пространственный вектор*. Так, на рис. 1.1 показаны в двух точках векторы напряженности  $\mathcal{E}$  электрического поля между двумя параллельными плоскими пластинами с суммарными зарядами  $+Q$  и  $-Q$ .

Электрическое поле графически изображается линиями напряженности электрического поля. Линия напряженности проводится так, чтобы в каждой ее точке вектор напряженности поля был направлен по кас-

тельной к ней. Линия напряженности поля неподвижных зарядов начинается на положительном заряде и оканчивается на отрицательном; таким образом, эти линии не замкнуты (рис. 1.1).

Если через каждую единичную площадку, перпендикулярную к направлению вектора напряженности, провести число линий, равное или пропорциональное напряженности поля в пределах этой площадки, то плотность линий напряженности будет оценивать значение напряженности поля.

Поле называется однородным, если во всех его точках векторы напряженности равны друг другу, в противном случае поле будет неоднородным. Примером однородного поля может служить электрическое поле между параллельными пластинами (рис. 1.1) в области, достаточно удаленной от краев пластин.

**б) Электрическое напряжение.** Допустим, что положительный точечный заряд  $q$  переместился в однородном электрическом поле под действием сил этого поля из точки  $M$  в точку  $N$  на расстояние  $l$  (рис. 1.2) в направлении поля.

Совершенная при этом силами поля за счет энергии поля работа  $A = Fl$ , или с учетом (1.1)

$$A = Fl = \mathcal{E}ql. \quad (1.2)$$

Величина, определяемая отношением работы по перемещению точечного положительного заряда  $q$  между двумя точками поля к численному значению заряда, называется электрическим напряжением между указанными точками  $M$  и  $N$ :

$$U = U_{MN} = A/q. \quad (1.3)$$

Численно напряжение между двумя точками равно работе сил поля при перемещении между этими точками положительного единичного заряда.

В однородном поле по (1.2)  $A = \mathcal{E}ql$  и напряжение

$$U = A/q = \mathcal{E}ql/q = \mathcal{E}l. \quad (1.3a)$$

В Международной системе единиц СИ (SI) приняты единицы измерения величин: длины — метр (м); массы — килограмм (кг); времени — секунда (с); силы — ньютон (Н); работы — джоуль (Дж); электрического заряда — кулон (Кл); электрического напряжения — вольт (В).

Из выражения (1.3a) следует, что

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/1 Кл.}$$



Напряженность электрического поля согласно (1.3а) определяется выражением

$$\mathcal{E} = U/l \quad (1.4)$$

и измеряется в вольтах на метр:  $[\mathcal{E}] = \text{В/м}$ . Здесь и далее прямоугольные скобки указывают размерность величины, заключенной в скобки.

Допустим, что положительный точечный заряд  $q$  находится в точке  $M$  электрического поля, созданного другими зарядами. Если под действием сил поля заряд  $q$  удалится за пределы поля, то силами поля будет совершена работа, равная потенциальной энергии  $W_M$ , которой обладал заряд  $q$ , находясь в точке  $M$ . Потенциальная энергия, отнесенная к численному значению заряда, находящегося в какой-либо точке электрического поля, является одной из характеристик электрического поля всех других зарядов в данной точке (например,  $M$ ) и называется потенциалом  $\varphi$  этой точки поля. Итак, по определению, потенциалы электрического поля в точках  $M$  и  $N$ :  $\varphi_M = W_M/q$  и  $\varphi_N = W_N/q$ .

При перемещении силами поля заряда  $q$  из точки  $M$  в точку  $N$  независимо от формы пути производится работа, равная изменению запаса потенциальной энергии поля,  $A = W_M - W_N$ . Так как  $W_M = q\varphi_M$  и  $W_N = q\varphi_N$ , то  $A = q(\varphi_M - \varphi_N)$ , откуда, учитывая (1.3), получаем

$$U_{MN} = \frac{A}{q} = \frac{q(\varphi_M - \varphi_N)}{q} = \varphi_M - \varphi_N, \quad (1.5)$$

*т. е. напряжение между двумя точками электрического поля равно разности потенциалов этих точек.*

Если потенциал одной из точек, например  $N$ , считать равным нулю, что не изменяет разности потенциалов (напряжения) между различными точками поля, то согласно (1.5)

$$U_{MN} = \varphi_M - \varphi_N = \varphi_M - 0 = \varphi_M,$$

*т. е. напряжение между данной точкой ( $M$ ) электрического поля и другой, произвольно выбранной точкой, потенциал которой принят равным нулю, является потенциалом  $\varphi$  данной точки поля. Особенно часто принимают равным нулю потенциал земли. Потенциал измеряется в вольтах, т. е. в тех же единицах, что и напряжение.*

## 1.2. ПРОВОДНИКИ, ИЗОЛЯТОРЫ, ПОЛУПРОВОДНИКИ

Все вещества (тела) состоят из атомов и молекул. Атом имеет положительно заряженное ядро и отрицательно заряженные электроны, совершающие орбитальные движения

вокруг ядра. Если суммарный отрицательный заряд электронов равен положительному заряду, то атом электрически нейтрален. Порядковый номер элемента в периодической таблице Менделеева определяется числом электронов нейтрального атома. Электрический заряд электрона (элементарный заряд) равен  $-1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Заряд ядра по абсолютному значению равен заряду электрона, умноженному на число электронов нейтрального атома.

Электроны атомов обычно находятся на определенных орбитах. Электроны, находящиеся на внутренних орбитах, относительно прочно связаны с ядром атома. Электроны, находящиеся на внешних орбитах (валентные электроны), сравнительно легко могут отделяться от атома, после чего становятся «свободными» или присоединяются к другому атому или молекуле. Атом, потерявший один или несколько электронов, называется положительным ионом, а атом, присоединивший электроны, — отрицательным ионом. Процесс образования ионов называется ионизацией. Количество носителей заряда — свободных электронов или ионов — в единице объема вещества принято называть концентрацией носителей заряда.

Электрический ток (проводимости) — это явление упорядоченного (направленного) движения заряженных частиц. Свойство вещества проводить электрический ток под действием электрического поля называется электропроводностью. Электропроводность вещества зависит от концентрации носителей заряда: чем выше концентрация, тем больше электропроводность. Все вещества в зависимости от электропроводности делятся на проводники, диэлектрики и полупроводники.

Основным свойством проводящих веществ (материалов), или проводников, является их высокая электропроводность. Проводники делятся на два рода. В проводниках первого рода, к которым преимущественно относятся все металлы и их сплавы, электрический ток создается перемещением только электронов — это проводники с электронной проводимостью. Прохождение тока в них не сопровождается химическими изменениями материала проводника. Лучшими проводниками являются серебро, медь, алюминий.

Согласно классической электронной теории высокая электропроводность металлов объясняется наличием в них огромного количества свободных электронов — электронов проводимости, находящихся в состоянии беспорядочного

движения и заполняющих объем проводника наподобие газа — электронного газа. При движении электроны сталкиваются с ионами неподвижной кристаллической решетки, состоящей из атомов вещества; направление их движения, скорость, кинетическая энергия при этом изменяются.

Если в таком проводнике существует электрическое поле, то на заряды проводника действуют силы этого поля. Направление сил, действующих на положительные заряды, совпадает с направлением поля, а действующих на отрицательные заряды, — противоположно направлению поля. В результате наступает упорядоченное движение свободных электронов в одном направлении, т. е. в проводнике возникает ток (проводимости).

Проводники второго рода, или проводники с ионной проводимостью, представляют собой расплавы некоторых солей и водные растворы кислот, солей, щелочей и др. В расплавах и растворах независимо от прохождения тока происходит распад их нейтральных молекул на положительные и отрицательные ионы (электролитическая диссоциация). Положительными ионами являются ионы металлов и водород, отрицательными — кислотные остатки и гидроксильная группа (ОН). Расплавы и растворы веществ, состоящие частично или полностью из ионов, называются еще электролитами. При отсутствии внешнего электрического поля ионы и молекулы находятся в состоянии хаотического движения.

Если в таком проводнике создать электрическое поле, то силы поля вызовут движение положительных ионов в направлении поля, а отрицательных — в противоположном направлении. Их упорядоченное движение и представляет собой ток (проводимости) в электролите.

Диэлектриками (изоляторами) называются вещества (материалы), в которых при нормальных условиях (невысокие температуры и отсутствие сильных электрических полей) имеется ничтожное количество свободных электрически заряженных частиц; вследствие этого они обладают ничтожной электропроводностью, которой во многих случаях можно пренебречь. К числу изоляторов относятся некоторые газы и жидкости — минеральные масла, лаки, а также большое число твердых материалов, за исключением металлов, их сплавов и угля. Однако при некоторых условиях, например при действии высоких температур или сильных электрических полей, в диэлектриках воз-

можно расщепление молекул на ионы и потеря ими изолирующих свойств.

**Полупроводники** (полупроводящие вещества или материалы) по своей электропроводности занимают промежуточное место между проводниками и изоляторами. К полупроводникам относятся кремний, германий, теллур, селен, окислы металлов, соединения металлов с серой и т. д.

Полупроводники обладают рядом характерных свойств: электропроводность их и концентрация свободных носителей заряда в сильной степени зависят от температуры, освещенности, электрических полей, примесей и др. Отличительные особенности полупроводников объясняются тем, что кроме электронной электропроводности, вызываемой электронами проводимости, они обладают еще так называемой **дырочной электропроводностью**. Последняя вызвана перемещением под действием электрического поля «дырок», т. е. не занятых валентными электронами мест в атомах (из-за перемещения от атома к атому валентных электронов), что равноценно перемещению положительно заряженных частиц, заряды которых по абсолютному значению равны зарядам электронов.

В настоящее время свойства полупроводников используются в большом количестве весьма разнообразных приборов и устройств (полупроводниковые диоды и триоды, фоторезисторы и т. п.).

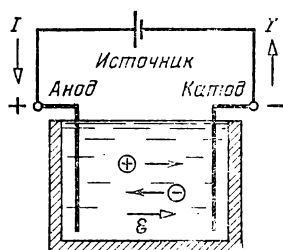
### **1.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК И ЕГО ПЛОТНОСТЬ**

**а) Электрический ток.** Из сказанного в § 1.2 следует, что для возникновения и прохождения электрического тока в проводнике необходимо: 1) наличие в проводнике носителей зарядов, которые могут перемещаться — свободных электронов в металлах, ионов и свободных электронов в электролитах; 2) наличие в проводнике электрического поля.

Поле неподвижных зарядов (электростатическое поле) не может существовать в проводнике, так как под действием поля свободные заряды проводника могут перемещаться. В заряженном проводящем теле все заряды расположатся на поверхности так, чтобы их суммарное поле внутри проводника равнялось нулю. Для поддержания направленного

движения зарядов в проводнике необходимо поддерживать электрическое поле в проводнике, подключив к нему два вывода (электрода) источника электрической энергии, например аккумулятора. Таким образом, электрический ток проходит в проводнике, если проводник вместе с источником электрической энергии образует хотя бы простейшую электрическую цепь. Поле в проводнике создается зарядами, накапливающимися на электродах источника под действием химических (в аккумуляторах и гальванических батареях), механических (в электромашинных генераторах) или других сил, действующих в источнике. В электротехнике говорят, что между электродами, к которым подключен источник энергии, приложено напряжение этого источника.

Рис. 1.3. Электрический ток в электролите



Положительно заряженный электрод (анод) обозначают знаком плюс, а отрицательно заряженный (катод) — знаком минус.

Электрическое поле в проводнике при не изменяющемся с течением времени токе называется стационарным электрическим полем. Стационарное электрическое поле в проводнике, как и электрическое поле неподвижных зарядов, характеризуется напряженностью электрического поля  $E$ , которая не изменяется во времени.

Приложим электрическое напряжение к двум металлическим электродам, погруженным в электролит (рис. 1.3). Под действием электрического поля положительные ионы будут перемещаться к отрицательному электроду — катоду, а отрицательные ионы — к положительному электроду — аноду. Таким образом, два встречных потока ионов противоположного знака, обусловленных наличием электрического поля, представляют собой электрический ток. Достигнув электродов, ионы или оседают на них, или вступают с ними в химическую реакцию. Отрицательные ионы электролита отдают аноду свои электроны, которые и бу-



дут двигаться дальше к источнику. Положительные ионы электролита соединяются со свободными электронами катода, поступающими от источника. Таким образом, в проводах, идущих от источника питания, возникает движение свободных электронов в направлении к катоду.

Направление тока  $I$  в проводнике считают совпадающим с направлением напряженности поля, т. е. с направлением силы, действующей на положительный заряд, и направлением движения положительных зарядов. Поэтому за направление тока принято считать направление, обратное направлению движения электронов. Не изменяющийся во времени ток  $I$  называют постоянным.

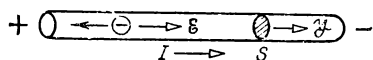


Рис. 1.4. Стационарное электрическое поле проводника с током

В металлическом проводе свободные электроны движутся также в направлении, противоположном направлению вектора напряженности электрического поля  $E$  и принятому направлению тока. Направление тока  $I$  указывают стрелкой (рис. 1.3 и 1.4).

Постоянный ток (сила тока)  $I$  определяется количеством электричества (зарядом), проходящим через выделенную поверхность проводника, в частности для проводов (рис. 1.4) — через поперечное сечение, в единицу времени.

Обозначив буквой  $Q$  заряд, проходящий через поперечное сечение за время  $t$ , получим

$$I = Q/t. \quad (1.6)$$

Изменяющийся с течением времени (переменный) ток в отличие от постоянного обозначается строчной (малой) буквой  $i$ . Если за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  через поперечное сечение проходит бесконечно малый заряд  $dq$ , то ток определяется по аналогичной формуле:

$$i = dq/dt. \quad (1.7)$$

Единицей тока является ампер (А). Постоянный ток в проводнике равен 1 А, если через поперечное сечение за 1 с проходит электрический заряд, равный 1 Кл, т. е.  $1 \text{ А} =$

$= 1$  Кл/с. Наряду с ампером часто применяются дольные и кратные единицы: микроампер ( $1 \text{ мкА} = 10^{-6} \text{ А}$ ), миллиампер ( $1 \text{ мА} = 10^{-3} \text{ А}$ ) и килоампер ( $1 \text{ кА} = 10^3 \text{ А}$ ).

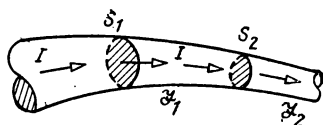
Нельзя непосредственно наблюдать электрический ток, и количественное представление о токе получают только по показаниям электроизмерительных приборов (амперметров), работа которых основана на явлениях, сопровождающих прохождение тока: тепловом, магнитном и химическом действиях тока.

**б) Плотность тока.** При равномерном распределении тока по выделенной поверхности проводника отношение тока  $I$  к площади  $S$  этой поверхности определяет плотность тока:

$$J = I/S. \quad (1.8)$$

Плотность тока в проводах обычно измеряется в  $\text{А/мм}^2$ . Вектор плотности тока в проводе постоянного сечения направлен нормально к плоскости его поперечного сечения (рис. 1.4).

Рис. 1.5. Электрический ток в различных поперечных сечениях провода



Численное значение постоянного тока в проводе, поперечное сечение которого на различных участках неодинаково, остается неизменным и равным  $I$ . Предположив, что ток в двух произвольно выбранных сечениях провода  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 1.5) различен, приходим к выводу, что за каждую единицу времени через сечения  $S_1$  и  $S_2$  проходят разные по значению электрические заряды. Следовательно, в объеме провода, расположенного между указанными сечениями, должно было бы происходить непрерывное накопление зарядов того или другого знака и напряженность электрического поля изменялась бы, чего не может быть, так как при изменяющемся поле и ток непостоянный. В проводах разного сечения при одном и том же токе или вдоль провода изменяющегося сечения плотность тока обратно пропорциональна площади поперечного сечения. Действительно, так как

$$I = J_1 S_1 = J_2 S_2, \quad (1.9)$$

то

$$J_1/J_2 = S_2/S_1. \quad (1.10)$$

Рассмотрим участок прямолинейного провода, имеющего по всей длине одинаковое поперечное сечение  $S$ , по которому проходит постоянный ток (рис. 1.6). Так как ток постоянный, то, следовательно, напряженность поля  $\mathcal{E}$  не изменяется, а ее значение и направление при одинаковом поперечном сечении провода одинаковы во всех точках про-

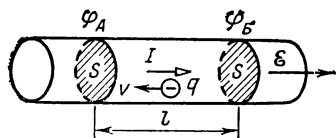


Рис. 1.6. Проводник с неизменным поперечным сечением

вода. Поэтому в проводе существует однородное электрическое поле, которое направлено по оси провода. Так как вектор напряженности поля направлен вдоль провода, то потенциал изменяется только вдоль провода и напряжение (разность потенциалов) между двумя любыми точками заданного поперечного сечения равно нулю. Следовательно, поверхность поперечного сечения — эквипотенциальная поверхность в проводе.

Выделим в проводе две эквипотенциальные поверхности, потенциалы которых  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  и расстояние между которыми  $l$  (рис. 1.6).

Напряжение между эквипотенциальными поверхностями, по определению, равно разности потенциалов, т. е.

$$U = U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B, \quad (1.11)$$

а напряженность поля в проводе

$$\mathcal{E} = U/l. \quad (1.12)$$

По закону Ома для плотности тока

$$J = \gamma \mathcal{E}, \quad (1.13)$$

где  $\gamma$  — удельная проводимость металла, из которого изготовлен провод.

#### 1.4 СОПРОТИВЛЕНИЕ И ЗАКОН ОМА

Установим теперь зависимость между током на участке провода и напряжением между концами участка.

Так как в однородном поле напряженность  $\mathcal{E} = U/l$ , то плотность тока в проводе

$$J = \gamma \mathcal{E} = \gamma U/l. \quad (1.14)$$

Умножив обе части последнего выражения на площадь поперечного сечения провода, получим

$$I = JS = U\gamma S/l, \quad (1.15)$$

или

$$U = rI, \quad (1.16)$$

где величина

$$r = l/\gamma S \quad (1.17)$$

называется электрическим сопротивлением участка провода. По той же формуле (1.17) определяется сопротивление всего провода постоянного поперечного сечения  $S$  при длине провода  $l$ . В этом случае  $U$  — напряжение между концами провода.

Таким образом, согласно (1.16) *напряжение между концами провода (выводами) пропорционально току и сопротивлению провода.*

Выражение (1.16) было найдено опытным путем в первой половине XIX в. и представляет собой закон Ома — один из основных законов электротехники.

**а) Сопротивление и проводимость.** При прохождении тока по проводу свободные электроны, перемещаясь под действием сил электрического поля, сталкиваются с атомами и молекулами провода и тормозятся, т. е. они испытывают противодействие своему движению вдоль провода, которое и называется сопротивлением провода. Согласно закону Ома сопротивление провода (участка цепи) равно отношению напряжения на концах провода к току в нем:

$$r = U/I, \quad (1.18)$$

откуда единица сопротивления

$$[r] = \left[ \frac{U}{I} \right] = \frac{B}{A} = \text{Ом}.$$

Единица сопротивления В/А называется ом (Ом). Сопротивление в 1 Ом имеет провод, в котором устанавлива-

ется ток 1 А при напряжении на его концах 1 В. Часто применяются кратные единицы: килоом ( $1 \text{ кОм} = 10^3 \text{ Ом}$ ) и мегаом ( $1 \text{ МОм} = 10^6 \text{ Ом}$ ).

Величина, обратная сопротивлению, называется проводимостью:

$$g = 1/r. \quad (1.19)$$

Единица проводимости обратна ому и называется сименс (См):  $[g] = 1/\text{Ом} = \text{См}$ .

б) **Удельное сопротивление.** Величина, обратная удельной проводимости, называется удельным сопротивлением:

$$\rho = 1/\gamma. \quad (1.20)$$

Выразив в формуле (1.17) удельную проводимость  $\gamma$  через удельное сопротивление, получим

$$r = \frac{l}{\gamma S} = \rho \frac{l}{S}. \quad (1.21)$$

Из (1.21) следует, что сопротивление провода зависит от его длины  $l$ , площади поперечного сечения  $S$  и от удельного сопротивления  $\rho$ , которое, в свою очередь, зависит от материала провода и его температуры.

Так как из (1.21)

$$\rho = rS/l, \quad (1.22)$$

то удельное сопротивление численно равно сопротивлению провода  $r$ , если длина  $l$  и поперечное сечение его  $S$  имеют единичные значения; другими словами, удельное сопротивление представляет собой сопротивление проводника единичного объема.

Из выражения (1.16) и (1.21) следует, что  $U = Ir = = I\rho l/S$ . Таким образом, сопротивление проводника наряду с током определяет работу перемещения по проводнику единичного заряда (1.3). Чем длиннее провод, чем меньше его сечение, или, что то же, чем больше плотность тока, тем больше и работа по перемещению единичного заряда.

Единица удельного сопротивления в системе СИ:  $[\rho] = = [rS/l] = \text{Ом} \cdot \text{м}^2/\text{м} = \text{Ом} \cdot \text{м}$ . Значения удельного сопротивления при такой единице измерения для металлов выражаются очень малыми числами, что неудобно. Поэтому единицу удельного сопротивления определяют (при температуре  $20^\circ\text{C}$ ), измеряя длину провода в метрах, а поперечное сечение — в квадратных миллиметрах. В этом случае единица удельного сопротивления  $[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$ , причем



$1 \text{ Ом} \cdot \text{м} = 10^6 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$ . Соответственно единица удельной проводимости  $[\gamma] = \text{м}/(\text{Ом} \cdot \text{мм}^2)$ .

В обладающих огромным удельным сопротивлением диэлектриках ток, проходящий через толщу, или, как говорят, через объем материала, — объемный ток  $I_V$  соизмерим с током, который идет по поверхности диэлектрика, — с поверхностным током  $I_S$ . В соответствии с этим имеются два понятия: объемное сопротивление и поверхностное сопротивление.

Объемный ток в диэлектрике

$$I_V = \frac{U}{r_V} = \frac{U}{\rho_V l/S}. \quad (1.23)$$

Под удельным объемным сопротивлением  $\rho_V$  понимают обычно величину, численно равную сопротивлению диэлектрика сечением  $S=1 \text{ см}^2$  и длиной  $l=1 \text{ см}$ . В этом случае единицей объемного удельного сопротивления служит  $\text{Ом} \cdot \text{см}$ , что вытекает из выражения

$$[\rho_V] = [r_V S/l] = \text{Ом} \cdot \text{см}^2/\text{см} = \text{Ом} \cdot \text{см},$$

причем  $1 \text{ Ом} \cdot \text{м} = 100 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ . Для большинства диэлектриков объемное удельное сопротивление лежит в границах  $10^{-10}—10^{-20} \text{ Ом} \cdot \text{см}$ . Поверхностный ток

$$I_S = \frac{U}{r_S} = \frac{U}{\rho_S l/d}. \quad (1.24)$$

Под удельным поверхностным сопротивлением диэлектрика понимают величину, численно равную сопротивлению поверхности шириной  $d=1 \text{ см}$  и длиной  $l=1 \text{ см}$ . Единицей удельного поверхностного сопротивления служит  $\text{Ом}$ , что следует из выражения

$$[\rho_S] = [r_S d/l] = \text{Ом} \cdot \text{см}/\text{см} = \text{Ом}.$$

**в) Резистор.** Устройства, которые включаются в электрическую цепь для ограничения или регулирования тока, называются резисторами. Резисторы бывают регулируемые и нерегулируемые, проволочные и непроволочные.

Регулируемый проволочный резистор называют реостатом (рис. 1.7, а). Обмотки реостатов и нагревательных приборов изготавливаются из сплавов с большим удельным сопротивлением, например из нихрома, фехраля. Это дает

возможность при малой длине получить нужное сопротивление. Более короткий провод экономичней, его удобнее размещать в нагревателе. Один зажим реостата (1) соединен с подвижным контактом, два других (2) и (3) — с концами спирали. Перемещая подвижный контакт, можно изменять сопротивление между зажимами 1 и 2.

Такие реостаты громоздки и изготавливаются на довольно значительные токи (до 10 А). При малых токах в радиоприемниках, устройствах автоматики и т. п. применяют непро-

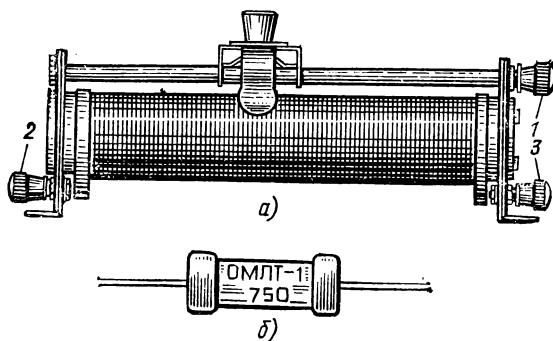


Рис. 1.7. Резисторы:  
а — реостат; б — непроволочный резистор

волочные переменные резисторы (рис. 1.8). В пластмассовом или металлическом корпусе укреплена дужка из гетинакса, на поверхность которой нанесен тонкий проводящий слой. Концы слоя соединены с выводами 2 и 3. На оси 4 укреплена щетка, соединенная с выводом 1.

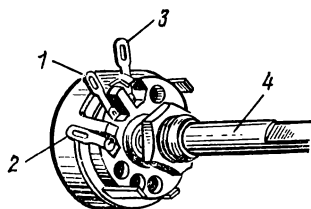


Рис. 1.8. Переменный непроволочный резистор

Один из непроволочных нерегулируемых резисторов показан на рис. 1.7, б. На поверхности нанесены его данные ОМЛТ-1, 750 (Ом).

На печатных платах различных устройств электроники закрепляются резисторы много меньших размеров (например, диаметром 2—3 мм).

## 1.5. ЗАВИСИМОСТЬ СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Повышение температуры металлического провода вызывает увеличение скорости теплового движения частиц. Это приводит к увеличению числа столкновений свободных электронов и, следовательно, к уменьшению времени их свободного пробега  $\tau$ . Уменьшение  $\tau$  уменьшает удельную проводимость, или, что то же, увеличивает удельное сопротивление материала. При нагревании провода действительно наблюдается увеличение удельного сопротивления самого провода.

Нагревание электролитов и угля кроме уменьшения времени  $\tau$  увеличивает концентрацию носителей зарядов; в результате удельное сопротивление их при повышении температуры уменьшается.

В узких границах изменения температуры 0—100 °C относительное приращение сопротивления  $\Delta r$  большинства металлических проводов пропорционально приращению температуры  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ . Обозначив через  $r_1$  и  $r_2$  сопротивления при температурах  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , можно написать

$$\frac{\Delta r}{r_1} = \frac{r_2 - r_1}{r_1} = \alpha \Delta\theta = \alpha (\theta_2 - \theta_1), \quad (1.25)$$

откуда

$$r_2 = r_1 + r_1 \alpha (\theta_2 - \theta_1). \quad (1.26)$$

Коэффициент пропорциональности  $\alpha$ , называемый температурным коэффициентом сопротивления, численно равен относительному приращению сопротивления при нагревании проводника на 1 °C. Температурный коэффициент сопротивления чистых металлов равен приблизительно 0,004 °C<sup>-1</sup>, что означает увеличение их сопротивления на 4 % при повышении температуры на 10 °C. Ряд сплавов, в том числе манганин, константан, имеют большое удельное сопротивление и ничтожно малый температурный коэффициент сопротивления. Это объясняется неправильной структурой сплавов и малым временем свободного пробега электронов. Указанные сплавы широко применяются в электроизмерительной технике для изготовления образцовых катушек сопротивления и резисторов с постоянным (независимым от температуры) значением сопротивления. Отрицательным температурным коэффициентом сопротивления обладают уголь и электролиты, для которых  $\alpha \approx -0,02$  на 1 °C.

В ряде металлов и сплавов при понижении температуры до очень низких значений порядка единиц или десятка градусов Кельвина ( $0\text{ К} \approx -273^\circ\text{С}$ ) возникает явление сверхпроводимости. Температура, при которой наступает это явление, называется критической ( $T_{\text{кр}}$ ) или «точкой скачка».

При понижении температуры до критической по проводнику может проходить электрический ток при отсутствии напряжения между его концами, иначе говоря, электрическое сопротивление проводника падает практически до нуля. Проводник, находящийся в таком состоянии, называют сверхпроводником.

В сверхпроводнике даже при значительных плотностях тока совершенно не выделяется тепло. Это означает, что электроны в сверхпроводнике при своем направленном движении не встречают никаких препятствий и не испытывают столкновений.

Второй особенностью сверхпроводника является невозможность существования в нем магнитного поля. Если магнитное поле имело место при температурах более высоких, чем критическая, то при переходе через критическую температуру оно исчезает. Отсутствие магнитного поля в сверхпроводнике объясняется тем, что в его поверхностном слое ( $10^{-5}\text{ см}$ ) появляются токи, магнитное поле которых компенсирует внешнее магнитное поле.

Сильное внешнее магнитное поле, так же как и сильное магнитное поле, вызванное большим электрическим током, проходящим по самому сверхпроводнику, разрушает состояние сверхпроводимости. Последнее обстоятельство затрудняет получение в сверхпроводнике больших токов и больших плотностей тока.

В последние годы получены металлооксидные керамики с температурой сверхпроводящего перехода порядка  $100\text{ К}$  ( $-173^\circ\text{С}$ ). Эта температура выше, чем у жидкого азота,  $\sim 78\text{ К}$  ( $-195^\circ\text{С}$ ), а значит, металлооксидная керамика, находящаяся в жидком азоте, становится сверхпроводящей.

Жидкий азот — дешевый материал (получают непосредственно из воздуха). Поэтому можно ожидать широкого применения сверхпроводников в технике: например, для кабелей передачи электроэнергии с очень высоким КПД, которые заменят воздушные ЛЭП, для железнодорожного транспорта на сверхпроводящем «подвесе», который будет расходовать в десятки раз меньше энергии, чем обычные поезда.

## 1.6. ПРОВОДНИКОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Электротехнические проводниковые материалы делятся на две группы.

К первой группе относятся материалы с малым удельным сопротивлением. Они должны иметь малый температурный коэффициент сопротивления, достаточную механическую прочность и устойчивость в отношении коррозии.

К этой группе относятся, например, медь и алюминий.

Медь вследствие малого удельного сопротивления, достаточной механической прочности, хорошей обрабатываемости и стойкости к коррозии широко применяется в виде проволоки, проводов различного назначения, шин, полос; электротехническая медь содержит не более 0,1 % примесей.

Кроме чистой меди в электротехнике применяют ее сплавы с другими металлами (кадмий, бериллий, цинк) — бронзу, латунь.

Алюминий, несмотря на худшие электрические и механические свойства, получил очень широкое распространение. При замене медных проводов алюминиевыми той же длины с одинаковыми сопротивлениями сечение последних на 60 % больше, а масса на 52 % меньше, чем у медных.

Для линий электропередачи применяют алюминиевые провода с внутренними стальными проволоками (сталеалюминиевые). Стальные провода вследствие большого удельного сопротивления применяются только для линий небольшой мощности и некоторых линий электросвязи.

Ко второй группе материалов (с высоким удельным сопротивлением) относятся сплавы. Например, никель — хром — железо (нихром), железо — хром — алюминий (фехраль) и др. Из-за стойкости к высоким температурам они применяются для изготовления нагревательных элементов, реостатов и т. д. Марганец — сплав меди 86 %, марганца 12 % и никеля 2 %. Малый температурный коэффициент сопротивления и большое удельное сопротивление марганца обеспечили применение его в измерительной технике (образцовые катушки сопротивлений и др.).

## 1.7. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Электрической цепью называют совокупность устройств, предназначенных для взаимного преобразования, передачи и распределения электрической и других видов



энергии и информации (в виде электрических сигналов), если процессы в устройствах можно описать при помощи понятий о токе, напряжении и электродвижущей силе (ЭДС).

К основным элементам электрической цепи относятся источники электрической энергии (источники питания), приемники электрической энергии или потребители, устройства для передачи энергии и от источников к приемникам.

Источниками электрической энергии служат устройства, в которых происходит преобразование различных видов энергии в электромагнитную, или, как говорят сокращенно, в электрическую (на производстве и в быту говорят еще короче — электроэнергия). В качестве источников энергии применяются преимущественно электрические генераторы, в которых механическая энергия преобразуется в электрическую, первичные (гальванические) элементы и аккумуляторы, в которых химическая энергия преобразуется в электрическую, термоэлементы, фотоэлементы и солнечные батареи, преобразующие соответственно тепловую и световую энергию в электрическую, магнитогидродинамические генераторы, в которых тепловая энергия превращается в энергию движения плазмы, а затем в электрическую, атомные реакторы, в которых ядерная энергия преобразуется в тепловую.

Приемники электрической энергии преобразуют электрическую энергию в другие виды энергии, например, электродвигатели — в механическую, электрические печи и нагревательные приборы — в световую и тепловую; электролитические ванны — в химическую.

Устройствами для передачи электрической энергии от источников к приемникам являются линии передачи, электрические сети и просто провода. Проводом называется металлическая проволока, изолированная или неизолированная (голая). Провода выполняются из меди, алюминия или стали.

Токопровод электрической цепи, т. е. путь, по которому проходит электрический ток, на всем протяжении должен иметь изоляцию, устраняющую возможность прохождения тока по каким-либо побочным путям. Изоляция, кроме того, ограждает людей от прикосновения к участкам токопровода, находящимся под потенциалом, отличным от потенциала земли.

Как указывалось, провода, а также и все другие элемен-

ты цепи оказывают сопротивление электрическому току или, как обычно говорят, обладают сопротивлением.

Кроме рассмотренных основных элементов электрические цепи содержат и другие необходимые для их эксплуатации элементы; к ним относятся коммутационная аппаратура, предназначенная для включения и отключения

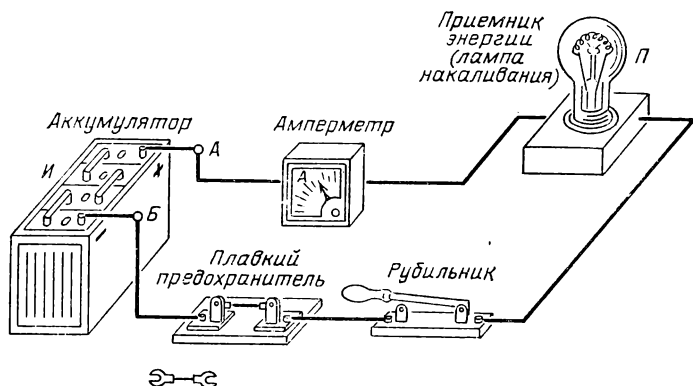


Рис. 1.9. Простейшая электрическая цепь

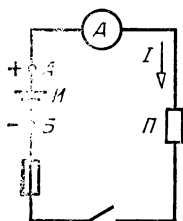


Рис. 1.10. Схема простейшей электрической цепи


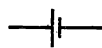







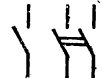
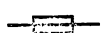


(рубильники, выключатели, переключатели), аппаратура защиты (реле, плавкие предохранители) и, наконец, измерительные приборы (амперметры, вольтметры и т. п.).

Графическое изображение электрической цепи, показывающее последовательность соединения отдельных элементов и отображающее свойства элементов электрической цепи, которые надо учесть, называется схемой электрической цепи.

Рассмотренные элементы электрической цепи на схемах обозначают условными знаками, приведенными в табл. 1.1.

На рис. 1.9 показана одна из простейших электрических цепей с источником энергии *И* (аккумулятором на рисун-

**Таблица 1.1. Условные графические обозначения, применяемые на электрических схемах**

Наименование	Условный знак
Электрический генератор постоянного тока	
Химический источник энергии	
Электрический двигатель постоянного тока	
Осветительная электрическая лампа	
Произвольный приемник электрической энергии и резистор	
Регулируемый резистор, реостат	
Провод, кабель, шина электрической цепи	
Провода пересекающиеся несоединенные	
Провода пересекающиеся соединенные	
Выключатели однополюсный и двухполюсный	
Предохранитель плавкий	
Амперметр	
Вольтметр	

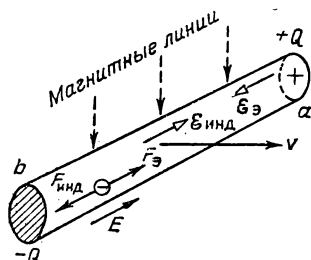
ке), потребителем  $P$  (лампа накаливания), соединительными проводами, предохранителем, рубильником и амперметром. На рис. 1.10 изображена схема этой цепи.

### 1.8. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА

Большая часть электрической энергии вырабатывается электромеханическими генераторами.

Допустим, что прямолинейный провод  $ab$  (рис. 1.11), укрепленный на вращающейся части — роторе генератора, движется в магнитном поле (изображенном на рисунке

Рис. 1.11. Разделение электрических зарядов под действием сил электромагнитной индукции



магнитными линиями) с постоянной скоростью  $v$  в направлении, перпендикулярном магнитным линиям. При этом на каждый свободный электрон (заряд) провода  $ab$  действует сила, называемая силой электромагнитной индукции  $F_{\text{инд}}$  (подробнее см. § 7.1).

Отношение силы индукции, действующей на какую-либо заряженную частицу, к ее заряду  $q$  представляет напряженность индукции:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = F_{\text{инд}}/q. \quad (1.27)$$

Вектор напряженности поля индукции направлен перпендикулярно вектору скорости  $v$  и магнитным линиям (рис. 1.11), т. е. вдоль оси провода. На рис. 1.11 векторы  $F_{\text{инд}}$  и  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  направлены противоположно, так, как показана сила  $F_{\text{инд}}$ , действующая на электрон (отрицательный заряд), а направление вектора  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ , по определению, показывает направление силы, действующей на положительный заряд.

Если векторы напряженности поля во всех точках поля численно равны и направлены параллельно друг другу, то поле однородное (см. § 1.1). Такое поле и создается в проводнике в рассматриваемом случае.

Произведение напряженности однородного поля индукции, вектор которого направлен по оси провода, и длины

этого провода  $ab$  выражает электродвижущую силу (ЭДС) индукции  $E$ , которая возникает при движении провода. Таким образом, ЭДС

$$E = \mathcal{E}_{\text{инд}} l. \quad (1.28)$$

Так как напряженность поля численно равна силе, с которой поле действует на единичный заряд, то ЭДС численно равна работе, совершаемой силами индукции при переносе единицы заряда на участке  $ab$ . Электродвижущая сила измеряется в вольтах, т. е. в тех же единицах, что и электрическое напряжение.

В проводе  $ab$  (рис. 1.11) под действием сил поля индукции электроны перемещаются на конец  $b$ , создавая здесь избыточный отрицательный заряд. На другом конце провода  $a$  вследствие недостатка электронов возникнет положительный заряд. Эти заряды внутри провода создадут электрическое поле, и на каждый электрон, кроме силы индукции, будет действовать также сила электрического поля  $F_{\mathcal{E}}$  (кулоновская), направленная противоположно  $F_{\text{инд}}$ . Если напряженность кулоновского электрического поля  $\mathcal{E}_{\mathcal{E}}$  достигнет значения напряженности поля индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ , то силы, действующие на каждый заряд внутри провода ( $F_{\mathcal{E}}$  и  $F_{\text{инд}}$ ), уравновесят друг друга и движение зарядов прекратится.

Электрическое напряжение на концах разомкнутого провода, или, что то же, разность электрических потенциалов на разомкнутых выводах провода (простейшего генератора)

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E}_{\mathcal{E}} l_{ab} = \mathcal{E}_{\text{инд}} l_{ab} = E. \quad (1.29)$$

Таким образом, напряжение на разомкнутых выводах генератора (источника питания) равно его ЭДС.

Электродвижущая сила  $E$  направлена в источнике так же, как и сила  $F_{\text{инд}}$ , действующая на положительный заряд, или как направлена напряженность поля индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ , т. е. от отрицательного вывода источника к положительному (в сторону, противоположную направлению силы  $F_{\text{инд}}$  на рис. 1.11, действующей на отрицательный заряд).

### 1.9. ХИМИЧЕСКИЕ ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Кроме электромеханических генераторов к источникам электрической энергии для питания цепей постоянного тока относятся гальванические или первичные элементы и аккумуляторы.

**а) Гальванические (первичные) элементы.** Между электродом и электролитом, в который он погружен, всегда возникает некоторая разность потенциалов, зависящая от материала электрода и состава электролита.

Появление разности потенциалов объясняется тем, что вещество электрода под действием химических сил растворяется в электролите (например, цинк в растворе серной кислоты) и положительные ионы его переходят в электролит. Преобладание отрицательных зарядов на электроде и положительных в прилегающем к нему пограничном слое электролита вызывает появление двойного электрического слоя, а следовательно, и электрического поля на границе электрода, направленного от электролита к электроду. Электрические силы этого поля противодействуют переходу положительных ионов с электрода в раствор. Когда силы электрического поля уравниваются химические (сторонние по отношению к электрическому полю) силы, растворение цинка прекратится. Возникает разность потенциалов между электродом и электролитом, называемая электродным потенциалом.

Помещая в электролит два электрода из разных металлов, получим между ними разность электродных потенциалов — стороннюю ЭДС  $E = \varphi_1 - \varphi_2$ . Следовательно, устройство, состоящее из двух разнородных электродов, помещенных в электролит, является источником питания — гальваническим или первичным элементом, в котором происходит процесс преобразования (необратимый) химической энергии в электрическую.

Большое распространение получили сухие и наливные марганцово-цинковые элементы. По конструкции они делятся на стаканчиковые и галетные. В элементе стаканчиковой конструкции цинковый электрод имеет форму стакана (рис. 1.12), внутри которого расположен положительный электрод — угольный стержень. Угольный электрод окружен деполяризатором из двуокиси марганца, графита и сажи. Цинковый стакан заполняется электролитом — водным раствором хлористого аммония (нашатыря) с добавлением крахмала в качестве загустителя. Электродвижущая сила элемента  $E = 1,5$  В.

Номинальным разрядным током элемента называется наибольший длительный ток, допускаемый при его эксплуатации. Емкостью элемента называется количество электричества, выраженное в ампер-часах (А·ч), которое можно получить от элемента за весь период его работы. Как от-

дельные элементы, так и собранные из них батареи широко применяются в радиотехнике, аппаратуре проводной связи, для карманных фонарей, слуховых аппаратов и т. д.

б) **Аккумуляторы (вторичные элементы).** Гальванические элементы, у которых после их разрядки возможен обратный процесс зарядки с преобразованием электрической энергии в химическую, называются аккумуляторами или вторичными элементами.

Щелочной аккумулятор получил такое название по электролиту — щелочи, а именно 21 %-ному водному раствору

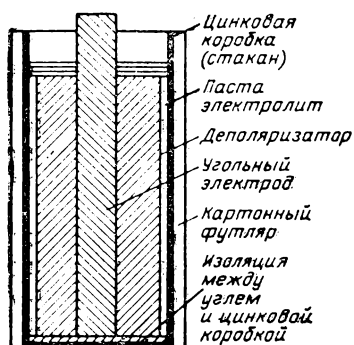
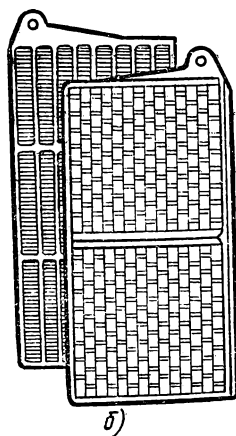


Рис. 1.12. Марганцово-цинковый первичный элемент

Рис. 1.13. Щелочной кадмиево-никелевый аккумулятор:

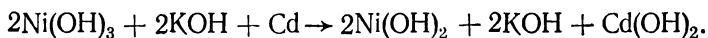
а — общий вид; б — пластины



едкого кали КОН или едкого натра NaOH. Аккумулятор состоит из двух блоков — пластин, расположенных в стальном сосуде с электролитом (рис. 1.13). Пластины — это стальные рамки с вставленными в них стальными коробочками, заполненными активной массой. Активная масса отрицательных пластин кадмиево-никелевых элементов состоит из губчатого кадмия, а железо-никелевых — из губчатого железа. Активная масса положительных пластин у обоих аккумуляторов состоит из гидрата окиси никеля  $\text{Ni}(\text{OH})_2$ .

При разрядке гидрат окиси никеля переходит в гидрат закиси никеля, а губчатый кадмий (железо) — в гидрат его закиси.

Химическая реакция при разрядке выражается уравнением



При зарядке реакция идет в обратном направлении и, следовательно, происходит восстановление активной массы электродов. Концентрация электролита при разрядке и зарядке остается неизменной.

При разрядке напряжение с 1,4 В сначала быстро уменьшается до 1,3 В, а затем медленно до 1,15 В; при этом напряжении разрядку необходимо прекращать. При зарядке напряжение с 1,15 В быстро увеличивается до 1,75 В, а затем после незначительного понижения медленно увеличивается до 1,85 В.

Кроме щелочных широко применяются и кислотные (свинцовые) аккумуляторы.

#### **1.10. СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ, МОЩНОСТЬ И КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ**

а) **Схема замещения электрической цепи и ее параметры.** Схема электрической цепи, которую составляют для расчета режима работы цепи, называют схемой замещения. На рис. 1.14 показана такая схема для электрической цепи, состоящей из одного источника питания (электромеханического генератора, химического источника питания) и одного приемника или потребителя (резистора, двигателя, электрической лампы или какого-либо другого). Источник представлен в виде двух элементов. Первый из них (кружок со стрелкой) указывает, что в источнике есть ЭДС  $E$  (индукции или сторонняя), стрелка показывает на-



правление ЭДС, т. е. силы, действующей на положительные заряды. Второй с сопротивлением  $r_{вт}$  характеризует преобразование электрической энергии в тепло внутри источника. В потребителе происходит преобразование электрической энергии в другие виды: механическую, тепловую, химическую и другие. Для потребителя задается его сопротивление  $r$ .

Так как направление тока совпадает с направлением силы, действующей на положительные заряды (§ 1.3), то внутри источника направление тока  $I$ , показанное стрелкой, совпадает с направлением ЭДС. Действительно, на рис. 1.11 (элементарный электромеханический генератор) одинаково направлены напряженность поля индукции  $\mathcal{E}_{инд}$  и ЭДС  $E$  от отрицательного вывода  $b$  к положительному  $a$ .

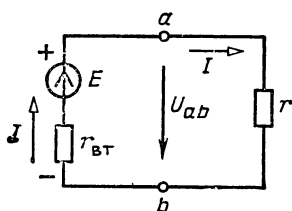


Рис. 1.14. Простейшая электрическая цепь постоянного тока

Ток протекает по замкнутому контуру, состоящему из источника и приемника, т. е. в приемнике от вывода  $a$  к выводу  $b$ . В простейшей схеме не учтено сопротивление проводов, соединяющих источник и приемник, так как часто их сопротивление много меньше сопротивления  $r$  потребителя.

В этой цепи при перемещении заряда  $Q$  в замкнутой цепи работа сил поля определяется по формуле

$$A_{п} = EQ, \quad (1.30)$$

которая непосредственно вытекает из определения ЭДС  $E$ , данного в § 1.8, как работы, совершаемой при переносе единицы заряда.

Учитывая, что при постоянном токе  $Q=It$ , формуле (1.30) можно придать такой вид:

$$A_{п} = EIt. \quad (1.31)$$

По закону сохранения энергии электрическая энергия  $W_{и}$ , выработанная источником за время  $t$ , равна работе  $A_{п}$  и в течение того же времени преобразуется в другие ви-

ды энергии во всех участках цепи: во внешнем — приемнике и внутреннем — самом источнике (рис. 1.14).

Обозначим напряжение на выводах  $ab$  приемника, равное напряжению на тех же выводах источника,

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = U.$$

Энергия, затраченная во внешнем участке цепи,

$$W = UQ = UI t. \quad (1.32)$$

Энергия  $W$ , как и  $W_{\text{и}}$ , положительная величина, т. е. согласно (1.32)  $U = U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b > 0$ . Это значит, что потенциал положительного вывода  $a$  выше, чем отрицательного  $b$ , и в приемнике ток направлен от вывода  $a$  с большим потенциалом к выводу  $b$  с меньшим.

На схеме замещения напряжение  $U_{ab} = U$  показывают стрелкой также от вывода  $a$  к выводу  $b$ , т. е. в приемнике направления напряжения и тока совпадают.

Вторая часть энергии затрачивается внутри самого источника на его нагревание:

$$W_{\text{вт}} = W_{\text{и}} - W = (E - U) It = U_{\text{вт}} It. \quad (1.33)$$

Разность ЭДС  $E$  источника и напряжения  $U$  на его выводах называется внутренним падением напряжения

$$U_{\text{вт}} = E - U. \quad (1.34)$$

Из (1.34) также следует, что

$$E = U + U_{\text{вт}}. \quad (1.35)$$

Таким образом, ЭДС источника равна сумме напряжения на его выводах и внутреннего падения напряжения в нем.

При сопротивлении  $r$  приемника по закону Ома напряжение

$$U = rI \quad (1.36a)$$

и аналогично внутреннее падение напряжения

$$U_{\text{вт}} = r_{\text{вт}} I. \quad (1.36b)$$

Если цепь разомкнута, т. е. источник не нагружен, то ток в цепи отсутствует и потеря энергии внутри источника нет. Следовательно, внутреннее падение напряжения  $U_{\text{вт}} = 0$  и ЭДС равна напряжению на выводах источника:  $E = U$  [см. также (1.35)]. Из сказанного вытекает, что ЭДС источника можно измерить присоединенным к его выводам вольтметром при работе источника вхолостую.

б) **Мощность.** Отношение работы  $A$  или энергии  $W$  к промежутку времени  $t$ , в течение которого она выполняется, называется мощностью  $P$ . Следовательно,

$$P = A/t = W/t, \quad (1.37)$$

т. е. мощность характеризует скорость, с которой совершается работа, или скорость, с которой происходит преобразование энергии. Если работа совершается неравномерно, то можно рассмотреть работу  $dA$  за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  и получить мгновенную мощность

$$p = dA/dt = dW/dt. \quad (1.38)$$

Скорость, с которой механическая или другая энергия преобразуется в источник в электрическую, называется мощностью источника:

$$P_{\text{и}} = W_{\text{и}}/t = EIt/t = EI. \quad (1.39)$$

Скорость, с которой электрическая энергия преобразуется в приемнике в другие виды энергии, в частности в тепловую, называется мощностью приемника:

$$P = W/t = UIt/t = UI. \quad (1.40)$$

Мощность, определяющая непроизводительный расход энергии, например на тепловые потери в источнике, называется мощностью потерь:

$$P_{\text{вт}} = W_{\text{вт}}/t = U_{\text{вт}} It/t = U_{\text{вт}} I. \quad (1.41)$$

По закону сохранения энергии мощность источника равна сумме мощностей потребителей и потерь:

$$P_{\text{и}} = P + P_{\text{вт}}. \quad (1.42)$$

Это выражение представляет собой баланс мощности электрической цепи.

Если приемником служит нагревательный элемент, то в (1.40)  $W$  — это количество электрической энергии, преобразуемой в тепловую. Если приемником является электродвигатель, то большая часть энергии  $W$ , которую получает двигатель, преобразуется в механическую  $W_{\text{м}}$  при мощности  $P_{\text{м}} = W_{\text{м}}/t$ , а другая часть  $W_{\text{т}}$  — в тепловую (нагрев двигателя) при мощности  $P_{\text{т}} = W_{\text{т}}/t$ , так что

$$P = P_{\text{м}} + P_{\text{т}}.$$

На схеме замещения в этом случае сопротивление  $r$  — это сопротивление такого резистора, в котором та же энер-

гия преобразовывалась бы в тепловую, т. е.  $r$  — эквивалентное сопротивление.

В Международной системе единиц (СИ) единицей мощности служит ватт (Вт) — мощность, при которой в каждую секунду совершается работа, равная 1 Дж, или мощность, при которой в каждую секунду 1 Дж электрической энергии преобразуется в другой вид энергии; таким образом,

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/1 с},$$

откуда  $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Вт} \cdot 1 \text{ с} = 1 \text{ Вт} \cdot \text{с}$ .

Из (1.40) видно также, что

$$[P] = [UI] = \text{В} \cdot \text{А},$$

т. е.

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А}$$

— мощность, развиваемая постоянным током 1 А при напряжении 1 В. Кратными единицами являются гектоватт ( $1 \text{ гВт} = 10^2 \text{ Вт}$ ), киловатт ( $1 \text{ кВт} = 10^3 \text{ Вт}$ ) и мегаватт ( $1 \text{ МВт} = 10^6 \text{ Вт} = 10^3 \text{ кВт}$ ).

Электрическая энергия измеряется в ватт-часах (Вт·ч) или кратных единицах: гектоватт-часах (гВт·ч) или киловатт-часах (кВт·ч). Один киловатт-час — это работа, совершаемая в течение 1 ч при мощности 1 кВт;  $1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 1000 \text{ Вт} \cdot \text{ч}$ ;  $1 \text{ Вт} \cdot \text{ч} = 3600 \text{ Дж}$ .

**Пример 1.1.** В сеть напряжением  $U=218 \text{ В}$  включен нагревательный прибор, ток которого  $I=2,75 \text{ А}$ . Определить мощность прибора и стоимость энергии, израсходованной прибором в течение трех часов. Стоимость 1 кВт·ч электрической энергии составляет 4 коп.

**Решение.** Мощность прибора

$$P = UI = 218 \cdot 2,75 = 600 \text{ Вт}.$$

Энергия, израсходованная за 3 ч работы,

$$W = Pt = 600 \cdot 3 = 1800 \text{ Вт} \cdot \text{ч} = 1,8 \text{ кВт} \cdot \text{ч}.$$

Стоимость израсходованной энергии

$$4 \cdot 1,8 = 7,2 \text{ коп}.$$

**в) Коэффициент полезного действия.** Эффективность передачи энергии от источника к приемнику характеризует коэффициент полезного действия (КПД) источника

$$\eta = \frac{W}{W_{\text{и}}} = \frac{P}{P_{\text{и}}} = \frac{P}{P + P_{\text{вт}}}. \quad (1.43)$$

Чем больше мощность потерь  $P_{вт}$  внутри источника, тем меньше его КПД. Для электродвигателя КПД

$$\eta = \frac{W_M}{W} = \frac{P_M}{P} = \frac{P_M}{P_M + P_T}. \quad (1.44)$$

### 1.11. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ТЕПЛОВУЮ

а) **Закон Джоуля—Ленца.** Электрический ток представляет собой направленное движение электрически заряженных частиц. При столкновении движущихся частиц с ионами или молекулами вещества кинетическая энергия движущихся частиц передается ионам или молекулам, вследствие чего происходит нагревание проводника. Таким образом, электрическая энергия преобразуется в тепловую.

Скорость преобразования электрической энергии в тепловую характеризуется мощностью  $P=UI$  (1.40); учитывая, что  $U=rI$  (1.36), получаем

$$P = rI^2 \text{ или } P = U^2/r = U^2 g. \quad (1.45)$$

Количество электрической энергии  $W$ , преобразованной в тепло за время  $t$ ,

$$W = Pt = rI^2 t. \quad (1.46a)$$

Так как в системе СИ единицей количества тепла, так же как и единицей энергии, является джоуль, то выделенное током  $I$  в сопротивлении  $r$  тепло

$$Q = rI^2 t. \quad (1.46b)$$

Количество тепла измеряется иногда внесистемной единицей — калорией (количество тепла, необходимо для нагревания 1 г воды на 1 °C): 1 кал=4,187 Дж или 1 Дж=0,24 кал. Следовательно, количество тепла, выраженное в калориях, определяется по формуле

$$Q = 0,24rI^2 t. \quad (1.46в)$$

Полученная зависимость была установлена в 1844 г. русским академиком Э. Х. Ленцем и одновременно английским ученым Джоулем и называется законом Джоуля—Ленца: *количество тепла, выделенное постоянным током в проводнике, пропорционально квадрату тока, сопротивлению проводника и времени прохождения тока.*

Преобразование электрической энергии в тепло нахо-

дит широкое применение в разнообразных нагревательных приборах. В других элементах электрической цепи (электрических машинах, аппаратах, проводах) преобразование электрической энергии в тепловую является непроизводительным расходом энергии, т. е. потерями энергии, снижающими их КПД. Кроме того, тепло, вызывая нагревание этих устройств, ограничивает допустимый ток, или, как говорят, их нагрузку: при перегрузке повышение температуры может привести к повреждению изоляции или сокращению срока службы установки.

**Пример 1.2.** Определить количество тепла, выделенного в нагревательном приборе в течение двух часов, если сопротивление прибора 24 Ом, а напряжение сети 120 В.

Решение. Ток

$$I = U/r = 120/24 = 5 \text{ А.}$$

Количество тепла, выделенного в приборе,

$$Q = rI^2 t = 24 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 3600 = 4\,320\,000 \text{ Дж.}$$

**б) Допустимая нагрузка проводов.** При нагревании провода приращение его температуры зависит от массы и материала провода и количества выделившегося в нем тепла. Скорость отдачи тепла в окружающую среду пропорциональна разности температур провода и среды. В начале нагревания током температура провода и среды одинакова, следовательно, в окружающую среду тепло почти не отдается; практически все тепло идет на нагревание провода, вследствие чего температура провода быстро растет. С ростом температуры провода увеличивается разность температур провода и среды, следовательно, увеличивается количество тепла, отдаваемое проводом, и рост температуры провода все более замедляется. Наконец при некоторой температуре устанавливается тепловое равновесие; за каждую единицу времени количество выделяющегося тепла становится равным теплу, отдаваемому проводом в окружающую среду. Температура провода достигает установившегося значения. Нагревание до установившейся температуры длится неодинаково у различных устройств: от долей секунды для нити лампы накаливания до нескольких часов для электрических машин значительной мощности.

Временем нагревания провода называют промежуток времени, в течение которого он нагреется до температуры, отличающейся от установившейся не более чем на 1 %.

Нагрев проводов допускается до определенных значений ( $65\text{--}80^\circ\text{C}$ ). У изолированных проводов допустимый нагрев определяется видом и свойствами изоляции, у голых (неизолированных) проводов — изменением их механических свойств. Ток, при котором нагревание достигает предельно допустимой температуры  $\theta_{\text{доп}}$ , называется наибольшим допустимым или номинальным током провода  $I=I_{\text{н}}$ . Значения номинальных токов для различных проводов и сечений приводятся в Правилах устройства электроустановок и в электротехнических справочниках. Если ток, проходящий по проводу, больше номинального, то такую перегрузку можно допустить только кратковременно в течение времени, пока температура провода не достигнет предельно допустимой  $\theta_{\text{доп}}$ . Чем больше ток в проводе по сравнению с номинальным, тем кратковременней может быть перегрузка.

в) **Защита от перегрузки.** Коротким замыканием называется непосредственное соединение двух проводов, участков электрической цепи или выводов (например,  $a$  и  $b$  на рис. 1.14), потенциалы которых различны ( $\varphi_a$  и  $\varphi_b$ ), или если они соединены проводником с ничтожно малым сопротивлением. Токи короткого замыкания могут достигать очень больших значений, превышающих в десятки раз наибольший допустимый ток установки, что может привести к тепловым и механическим повреждениям или разрушениям отдельных частей установки.

Участки электрической цепи защищаются от теплового действия токов перегрузки и токов короткого замыкания плавкими предохранителями, автоматами или реле. Основной частью плавкого предохранителя является вставка — короткий кусок проволоки из легкоплавкого металла, который, нагреваясь током перегрузки, расплавляется и разрывает цепь, отключая защищаемый участок. Сечение вставки предохранителя выбирается с таким расчетом, чтобы она плавилась при появлении в цепи тока выше номинального.

В силовых цепях плавкие предохранители часто заменяются автоматическими устройствами, разрывающими цепь тока, если ток превышает допустимое значение.

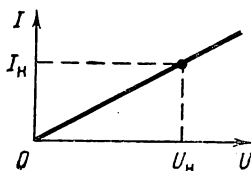
## 1.12. ПРОСТЕЙШАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ

**а) Приемник электрической энергии.** Так как приемник присоединен непосредственно к выводам *a* и *b* источника (рис. 1.14), то напряжение приемника равно напряжению источника:

$$U = U_{ab} = rI. \quad (1.47)$$

Зависимость напряжения от тока  $U(I)$  или тока от напряжения  $I(U)$  называется вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Для приемника с сопротивлением  $r$  она представлена на рис. 1.15. По заданной вольт-ампер-

Рис. 1.15. Вольт-амперная характеристика приемника



ной характеристике можно определить сопротивление приемника, выбрав одну из точек этой характеристики, например,

$$r = U_H / I_H.$$

**б) Источник электрической энергии.** Как следует из (1.35) и (1.36б), с изменением сопротивления  $r$  приемника (рис. 1.14) напряжение источника электрической энергии

$$U = U_{ab} = E - r_{вт} I \quad (1.48)$$

изменяется от значения  $U_x = E$  при холостом ходе ( $r = \infty$ ) и  $I = I_x = 0$  для нуля при коротком замыкании ( $r = 0$ ) и  $I = I_k = E / r_{вт} = U_x / r_{вт}$ .

Зависимость напряжения  $U$  от тока  $I$  (1.48) или  $U(I)$ , показанная на рис. 1.16, а, называется внешней характеристикой источника. Это прямая линия. По заданной внешней характеристике можно найти параметры источника  $E$  и  $r_{вт} = E / I_k$ .

Если можно пренебречь внутренним сопротивлением источника ( $r_{вт}$  много меньше  $r$ ), то, считая  $r_{вт} = 0$ , получим  $U = E$  — постоянное, т. е. не зависит от тока  $I$  (рис. 1.16, б). Такой источник называется идеальным источником ЭДС или напряжения. Практически источник ЭДС можно



считать идеальным, если при всех возможных значениях тока падение напряжения  $U_{\text{вт}} = r_{\text{вт}} I$  мало по сравнению с ЭДС. Схема замещения идеального источника ЭДС представлена на рис. 1.16, в. Схема замещения реального источника состоит из идеального источника ЭДС и соединенного с ним последовательно внутреннего сопротивления (рис. 1.14). Штриховой линией на рис. 1.16, в показан приемник, который может быть присоединен к этому идеальному источнику.

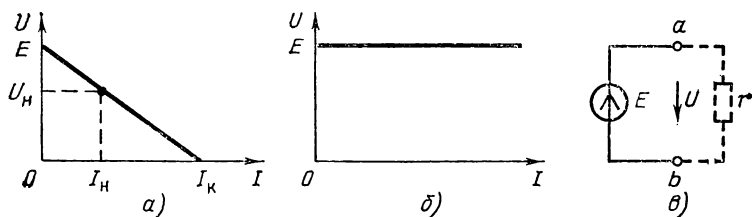


Рис. 1.16. Внешние характеристики реального (а) и идеального (б) источников ЭДС, обозначение идеального источника ЭДС (в)

**в) Режим работы простейшей цепи.** Перепишем (1.48) с учетом (1.47) в виде

$$rI = E - r_{\text{вт}} I,$$

откуда ток в цепи

$$I = \frac{E}{r + r_{\text{вт}}}. \quad (1.49)$$

Полученная формула часто называется законом Ома для электрической цепи.

Если сопротивление внешней цепи (приемника) сделать равным нулю ( $r=0$ ), то ток в режиме короткого замыкания источника

$$I_{\text{к}} = E/r_{\text{вт}}.$$

Напряжение на выходах  $a$  и  $b$  внешнего участка цепи и источника равно нулю, так как

$$U = rI_{\text{к}} = 0$$

и, следовательно,

$$r_{\text{вт}} I_{\text{к}} = E,$$

т. е. в режиме короткого замыкания ЭДС равна внутреннему падению напряжения.

Мощность, развиваемая источником при его коротком замыкании,

$$P_k = EI_k = r_{вт} I_k^2,$$

т. е. равна мощности потерь в самом источнике, что может вызвать перегрев генератора и его повреждение.

В режиме холостого хода ток

$$I_x = \frac{E}{r + r_{вт}} = \frac{E}{\infty + r_{вт}} = 0;$$

внутреннее падение напряжения  $U_{вт} = r_{вт} I_x = 0$  и напряжение на выводах цепи, как следует из (1.48), равно ЭДС, т. е.  $U_x = E$ ; мощность, развиваемая источником при холостом ходе, равна нулю:

$$P_x = EI_x = 0.$$

Источники питания, как и приемники электрической энергии, характеризуются: 1) номинальным током  $I_n$ , который при длительном прохождении вызывает предельно допустимое нагревание; 2) номинальным напряжением  $U_n$ , на которое рассчитан и изготовлен источник или приемник; 3) номинальной мощностью  $P_n$ , равной произведению  $I_n$  и  $U_n$ , т. е.  $P_n = U_n I_n$ .

Номинальные величины указываются на щитке или в паспорте устройства.

Режим работы, при котором ток, напряжение и мощность того или иного элемента цепи равны его номинальным значениям, называется номинальным режимом ( $I_n$ ,  $U_n$  на рис. 1.15 и 1.16, а). Режим работы, при котором перечисленные выше величины лежат в заданных границах и не превосходят номинальных значений, называется нормальным.

Все сказанное в предыдущем параграфе в отношении перегрузки проводов током в одинаковой мере относится ко всем элементам цепи.

г) **Цепь с учетом сопротивления проводов при изменяющейся нагрузке.** Рассмотрим цепь (рис. 1.17), состоящую из идеального источника питания с ЭДС, который часто называется короче — просто источником ЭДС или напряжения  $U = E$  и участков с сопротивлениями  $r_1/2$ ,  $r_1/2$  и  $r_2$ . Здесь  $r_1 = r_1/2 + r_1/2$  — сопротивление проводов. У приемника переменное сопротивление  $r_2$ , которое может изменяться от бесконечности (холостой ход) до нуля (короткое замыкание).

По закону Ома (1.49) ток в такой цепи

$$I = E/(r_1 + r_2),$$

напряжение на сопротивлении проводов

$$U_1 = r_1 I,$$

которое называют падением напряжения в проводах, а напряжение на выводах приемника

$$U_2 = r_2 I = E - U_1 = E - r_1 I.$$

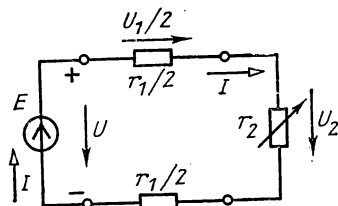
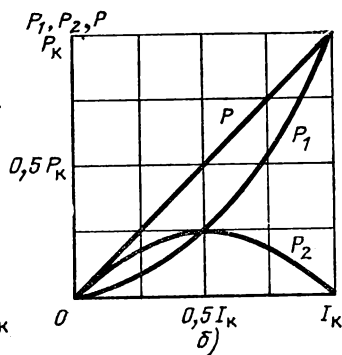
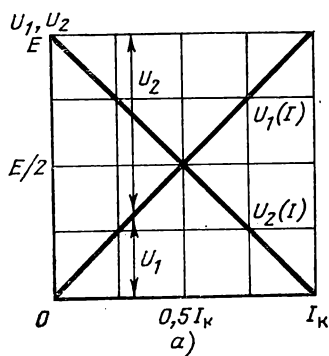


Рис. 1.17. Цепь с переменным резистором

Рис. 1.18. График напряжений (а) и мощностей (б)



При холостом ходе, т. е.  $r_2 = \infty$ , тока в цепи нет:  $I_x = 0$ , напряжение  $U_{1x} = r_1 I_x = 0$ , а напряжение на приемнике имеет наибольшее значение, равное ЭДС источника:

$$U_{2x} = E - r_1 I_x = E.$$

При коротком замыкании, т. е. при  $r_2 = 0$ , ток имеет наибольшее значение:

$$I_K = E/r_1,$$

падение напряжения на проводах

$$U_{1K} = r_1 I_K = E,$$

а напряжение на выводах приемника

$$U_{2к} = r_2 I_k = 0.$$

Напряжение  $U_1$  на постоянном сопротивлении проводов  $r_1$  пропорционально току и изменяется от нуля при холостом ходе до наибольшего значения  $U_{1max} = E$  при коротком замыкании. Эта зависимость показана на рис. 1.18, а. Напряжение приемника  $U_2$  равно разности ЭДС  $E$  и напряжения  $U_1$ . Оно изменяется от  $U_{2max} = E$  при холостом ходе до  $U_{2к} = 0$  при коротком замыкании, что показано на том же рис. 1.18, а. При токе в цепи  $I = (E/2r_1) = 0,5 I_k$ , т. е. при сопротивлении приемника, равном постоянному сопротивлению проводов ( $r_2 = r_1$ ), напряжения одинаковые:  $U_2 = U_1 = (E/2)$ .

Мощность, развиваемая источником,  $P = EI$  пропорциональна току (рис. 1.18, б). При холостом ходе она равна нулю, так как  $I_x = 0$ . При коротком замыкании она достигает наибольшего значения  $P_k = EI_k$ . Мощность потерь в проводах пропорциональна квадрату тока (закон Джоуля — Ленца)  $P_1 = r_1 I^2$  (рис. 1.18, б). Мощность приемника  $P_2 = P - P_1 = EI - r_1 I^2 = r_2 I^2 = U_2 I$ . При холостом ходе она равна нулю, так как  $I_x = 0$ , при коротком замыкании она также равна нулю, так как  $U_{2к} = 0$  (рис. 1.18, а).

Наибольшее значение мощности приемника  $P_{2max}$  можно определить, приравняв производную функции  $P_2(I) = EI - r_1 I^2$ , т. е.  $dP_2/dI = E - 2r_1 I = 0$ , откуда  $E = 2r_1 I$  и наибольшая мощность  $P_{2max}$  будет при токе  $I = E/2r_1 = 0,5 I_k$ , который получается, как показано выше, при  $r_2 = r_1$ . Следовательно, максимальная мощность приемника

$$P_{2max} = (r_2 I^2)_{max} = r_1 \left( \frac{I_k}{2} \right)^2 = r_1 \frac{E^2}{(2r_1)^2} = \frac{E^2}{4r_1}. \quad (1.50)$$

Режим цепи, при котором сопротивление приемника равно сопротивлению остальной части цепи, называется согласованным режимом по мощности с коэффициентом полезного действия

$$\eta = \frac{P_2}{P} = \frac{r_2 I^2}{(r_1 + r_2) I^2} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} = 0,5,$$

или 50 %.

Следовательно, половина энергии преобразуется в тепло в сопротивлении проводов  $r_1$ . Такой низкий КПД неприемлем для энергетических установок, где  $r_1$  — сопротивление линии передачи. Для энергетических установок допускаются потери энергии всего лишь около 5 %. Однако

в установках автоматики, телемеханики и электросвязи мощности малы и обычно важным является не КПД и не мощность потерь в линии, а передача по возможности большей части мощности источника питания к исполнительным механизмам; поэтому для этих установок работа в согласованном режиме часто не только допустима, но и предпочтительнее.

Из приведенного выше выражения КПД следует, что чем больше сопротивление приемника  $r_2$  по сравнению с сопротивлением линии передачи  $r_1$ , тем больше КПД; говоря другими словами, высокий КПД передачи соответствует работе в условиях, близких к холостому ходу ( $r_2 = \infty$ ;  $\eta = 1$ ).

Если  $r_1$  не сопротивление проводов, а внутреннее сопротивление источника, то

$$\eta = \frac{r_2}{r_{вт} + r_2}$$

—КПД источника питания, что совпадает с (1.43), так как мощность приемника  $P = r_2 I^2$  и мощность потерь в источнике  $P_{вт} = r_{вт} I^2$ .

### 1.13. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ С ДВУМЯ ИСТОЧНИКАМИ

Ток в цепи, состоящей из двух источников с ЭДС  $E_1, E_2$  (рис. 1.19) и внутренними сопротивлениями  $r_{вт1}$  и  $r_{вт2}$  и резистора с сопротивлением  $r$ , можно определить по принципу наложения токов. Согласно этому принципу ток в цепи равен алгебраической сумме токов, создаваемых в ней двумя источниками питания (или несколькими) действующими независимо друг от друга, если сопротивления всех участков цепи (на рис. 1.19 сопротивления  $r, r_{вт1}, r_{вт2}$ ) постоянны, т. е. не зависят от тока (линейная цепь).

При действии только первого источника ЭДС  $E_1$  ток в цепи (рис. 1.19).

$$I_1 = \frac{E_1}{r_{вт1} + r_{вт2} + r}.$$

Направление этого тока в первом источнике совпадает с направлением ЭДС  $E_1$ .

При действии только второго источника ЭДС  $E_2$  ток в цепи

$$I_2 = \frac{E_2}{r_{вт1} + r_{вт2} + r}.$$

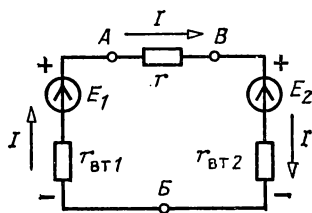
Направление этого тока во втором источнике совпадает с направлением ЭДС  $E_2$ .

Так как ЭДС  $E_1$  и  $E_2$  в контуре, образованном элементами цепи (рис. 1.19), направлены встречно, то ток  $I$  при действии обеих ЭДС равен разности токов  $I_1$  и  $I_2$ :

$$I = I_1 - I_2 = \frac{E_1 - E_2}{r_{\text{вт}1} + r_{\text{вт}2} + r}. \quad (1.51)$$

При равенстве ЭДС  $E_1$  и  $E_2$  ток в цепи равен нулю. Следовательно, ток в цепи возникает только при  $E_1 \neq E_2$ . Направление тока  $I$  совпадает с направлением большей ЭДС. При  $E_1 > E_2$  направление тока совпадает с направлением  $E_1$  и противоположно направлению  $E_2$ , как принято на рис. 1.19 и в формуле (1.51). Электродвижущая сила  $E_2$ , направленная встречно току, называется встречной или противо-ЭДС.

Рис. 1.19. Электрическая цепь с двумя источниками питания



На участке цепи  $AB$  с сопротивлением  $r$  электрическая энергия преобразуется в тепловую, мощность которой

$$P_{AB} = rI^2,$$

а напряжение, или, как часто говорят, падение напряжения на этом участке

$$U_{AB} = P_{AB}/I = rI. \quad (1.52)$$

На участке  $BB$  с сопротивлением  $r_{\text{вт}2}$  действует встречная ЭДС  $E_2$ . В этом участке кроме мощности потерь (нагрев)  $r_{\text{вт}2}I^2$  развивается еще электрическая мощность  $E_2I$ , так как электрическими силами совершается работа по преодолению действия встречной ЭДС, в зависимости от происхождения которой электрическая энергия преобразуется в химическую (аккумулятор) или механическую (электри-

ческая машина в режиме двигателя); таким образом, источник с против-ЭДС  $E_2$  работает в режиме потребителя (приемника).

Мощность участка  $BB$

$$P_{BB} = E_2 I + r_{вт2} I^2,$$

а напряжение на нем

$$U_{BB} = P_{BB}/I = E_2 + r_{вт2} I. \quad (1.53)$$

Итак, напряжение на выводах источника, работающего в режиме потребителя, равно сумме ЭДС и внутреннего падения напряжения.

На участке  $AB$  с сопротивлением  $r_{вт1}$  действует ЭДС  $E_1$  одного направления с током  $I$ . Электрическая машина или аккумулятор с ЭДС  $E_1$  работает в режиме источника энергии (в режиме генератора). Поэтому ЭДС равна сумме напряжения на выводах и внутреннего падения напряжения аналогично (1.35):

$$E_1 = U_{AB} + U_{вт1} = U_{AB} + r_{вт1} I,$$

а напряжение на выводах этого источника

$$U_{AB} = E_1 - r_{вт1} I. \quad (1.54)$$

Отсюда следует, что напряжение на выводах источника, отдающего энергию, равно разности ЭДС и внутреннего падения напряжения.

Развиваемая источником мощность (1.39)

$$E_1 I = U_{AB} I + U_{вт1} I = U_{AB} I + r_{вт1} I^2.$$

Итак, напряжение на выводах источника, равное разности потенциалов между его выводами «+» и «—», по (1.53) и (1.54):

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = E \pm r_{вт} I, \quad (1.55)$$

где знак «+» относится к работе в режиме потребителя, а знак «—» относится к работе в режиме генератора.

#### 1.14. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ДИАГРАММА

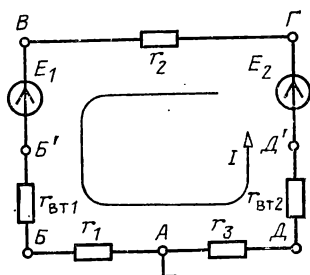
Во многих случаях изучения и расчета электрических цепей полезно определить потенциалы отдельных точек электрической цепи и построить потенциальную диаграмму. Потенциал какой-либо точки электрической цепи равен напряжению между этой точкой и точкой цепи, потенциал

которой принимают равным нулю, например, соединенной с землей. При определении потенциалов точек цепи пользуются соотношениями (1.52)—(1.55).

Определим потенциалы точек  $B$ ,  $B'$ ,  $\Gamma$  и  $D$  цепи, схема замещения которой дана на рис. 1.20. Из заданных на схеме направлений тока  $I$  и ЭДС  $E_1$  и  $E_2$  следует, что источник с ЭДС  $E_1$  работает в режиме потребителя, а источник с ЭДС  $E_2$  — в режиме генератора.

Ток на участке цепи, обладающем только сопротивлением, всегда направлен от точки с более высоким потенциа-

Рис. 1.20. Схема электрической цепи



лом к точке с меньшим потенциалом. Поэтому точка  $B$  имеет больший потенциал, чем точка  $A$ . По (1.52) разность потенциалов  $\varphi_B - \varphi_A = U_{BA} = r_1 I$ . Так как точка  $A$  заземлена, то  $\varphi_A = 0$  и  $\varphi_B = r_1 I$ .

Потенциал  $\varphi_B$  точки  $B$  является потенциалом отрицательного вывода первого источника, а потенциал  $\varphi_B$  точки  $B$  является потенциалом положительного вывода того же источника. Напряжение на выводах источника можно выразить как разность потенциалов, и, учитывая, что источник с ЭДС  $E_1$  работает в режиме потребителя, можно написать аналогично (1.53)

$$U_{BB} = \varphi_B - \varphi_B = E_1 + r_{\text{вТ1}} I,$$

откуда потенциал

$$\varphi_B = \varphi_B + E_1 + r_{\text{вТ1}} I. \quad (1.55a)$$

Следует обратить внимание на то, что в реальной цепи нет таких двух точек, между которыми существовало бы напряжение, равное  $r_{\text{вТ1}} I$  или ЭДС  $E_1$ . Физической величиной является сумма этих величин  $E_1 + r_{\text{вТ1}} I = U_{BB}$ . Разделе-



ние этой суммы на слагающие и соответствующее графическое изображение — это только вычислительный прием и его графическое изображение.

По (1.52) потенциал  $\varphi$  больше  $\varphi_B$  на величину  $r_2 I$ , таким образом,

$$\varphi_G = \varphi_B + r_2 I.$$

Источник с ЭДС  $E_2$  работает в режиме генератора. Разность потенциалов между положительным и отрицательным его выводами аналогична (1.54)

$$U_{ГД} = \varphi_G - \varphi_D = E_2 - r_{вт2} I,$$

откуда

$$\varphi_D = \varphi_G - E_2 + r_{вт2} I. \quad (1.556)$$

Наконец, потенциал  $\varphi_A$  точки  $A$  выше потенциала  $\varphi_D$  точки  $D$  на величину  $r_3 I$ , т. е.  $\varphi_A - \varphi_D = r_3 I$ , откуда

$$\varphi_A = \varphi_D + r_3 I$$

и должно получиться  $\varphi_A = 0$ , если правильно вычислен ток.

Графическое изображение изменения потенциала в электрической цепи в зависимости от сопротивлений участков (элементов) этой цепи называется потенциальной диаграммой. На графике по оси абсцисс откладывают в масштабе сопротивления участков (элементов) цепи в порядке следования их друг за другом в цепи. По оси ординат откладывают в масштабе значения потенциалов.

**Пример 1.3.** Построить потенциальную диаграмму для цепи, схема которой дана на рис. 1.20, если  $E_1 = 18$  В,  $E_2 = 32$  В,  $r_1 = 4$  Ом,  $r_2 = 3$  Ом,  $r_3 = 5$  Ом,  $r_{вт1} = r_{вт2} = 1$  Ом.

**Решение.** Вычислим ток в цепи

$$I = \frac{E_2 - E_1}{r_1 + r_2 + r_3 + r_{вт1} + r_{вт2}} = \frac{32 - 18}{4 + 3 + 5 + 1 + 1} = 1 \text{ А.}$$

Определим потенциалы точек цепи. Точка  $A$  соединена с землей, поэтому ее потенциал  $\varphi_A = 0$ . Потенциал  $\varphi_B > \varphi_A$ , так как ток направлен от точки  $B$  к точке  $A$ , т. е.  $\varphi_B - \varphi_A = r_1 I$ , откуда

$$\varphi_B = \varphi_A + r_1 I = 0 + 4 \cdot 1 = 4 \text{ В.}$$

Источник с ЭДС  $E_1$  и внутренним сопротивлением  $r_{вт1}$ , работающий в режиме потребителя, присоединен к точкам  $B$  и  $A$ . Согласно

(1.55a) потенциал точки  $B$

$$\varphi_B = \varphi_B + E_1 + r_{\text{вт}1} I = 4 + 18 + 1 \cdot 1 = 23 \text{ В.}$$

Потенциал  $\varphi_\Gamma > \varphi_B$ , так как ток идет от точки  $\Gamma$  к точке  $B$ , поэтому  $\varphi_\Gamma - \varphi_B = r_2 I$ , откуда

$$\varphi_\Gamma = \varphi_B + r_2 I = 23 + 3 \cdot 1 = 26 \text{ В.}$$

Источник с ЭДС  $E_2$  и внутренним сопротивлением  $r_{\text{вт}2}$  работает в режиме генератора. Выводы его обозначены буквами  $\Gamma$  и  $D$ . Согласно (1.55б) потенциал точки  $D$

$$\varphi_D = \varphi_\Gamma - E_2 + r_{\text{вт}2} I = 26 - 32 + 1 \cdot 1 = -5 \text{ В.}$$

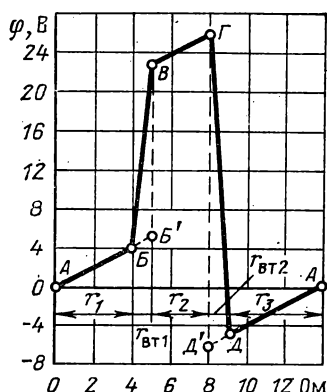


Рис. 1.21. Потенциальная диаграмма к примеру 1.3

Потенциал  $\varphi_A > \varphi_D$ , поэтому  $\varphi_A - \varphi_D = r_3 I$ , откуда

$$\varphi_A = \varphi_D + r_3 I = -5 + 5 \cdot 1 = 0.$$

Полученный результат подтверждает правильность решения.

По найденным значениям строим потенциальную диаграмму (рис. 1.21). Если продолжить прямую  $AB$  до пересечения с перпендикуляром, опущенным из точки  $B$ , то получим точку  $B'$ . Отрезок  $BB'$  в выбранном масштабе равен ЭДС  $E_1$ . Аналогично строится точка  $D'$ .

## Глава вторая

### РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

#### 2.1. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Электрическая цепь называется линейной, если она содержит только линейные элементы. Линейным называется элемент цепи, сопротивление которого остается постоянным независимо от значений и направлений тока в нем и напряжения на его выводах.

При расчете режима работы электрической цепи очень часто необходимо определить токи, напряжения и мощно-

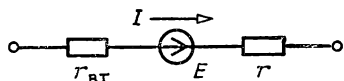


Рис. 2.1. Ветвь электрической схемы

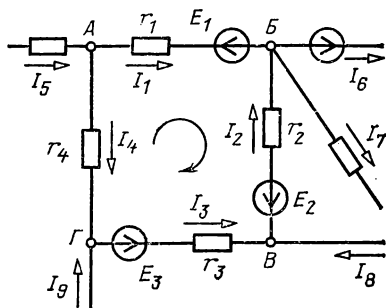


Рис. 2.2. Часть схемы электрической цепи

сти на всех ее участках при заданных ЭДС источников и сопротивлениях участков цепи.

Такой расчет основан на применении законов Кирхгофа, для записи которых введем понятия ветви, узла и контура, а также двухполюсника.

Ветвью электрической цепи называется ее участок, состоящий из одного или нескольких элементов, соединенных так, что по ним проходит один и тот же ток. Такое соединение элементов называется последовательным. Например, ветвь, состоящая из одного источника питания с ЭДС  $E$  и внутренним сопротивлением  $r_{вт}$  и резистора с сопротивлением  $r$ , показана на рис. 2.1. Остальные участки цепи на этом рисунке не показаны.

Точка электрической цепи называется узлом (точкой разветвления), если в ней соединены три или большее число ветвей или проводов.

На рис. 2.2 показана часть схемы замещения цепи и ее

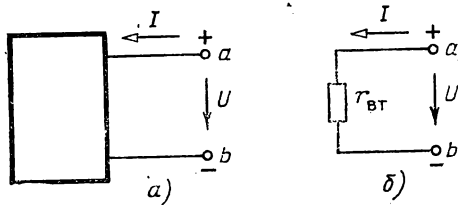
четыре узла ( $A, B, B, F$ ). В узле  $A$  соединены три ветви с токами  $I_1, I_4, I_5$ , в узле  $B$  соединены четыре ветви с токами  $I_1, I_2, I_6, I_7$ .

Иногда под узлом понимают шину (отрезок провода большого сечения), практически не обладающую сопротивлением, к которой присоединены не менее трех ветвей или проводов.

Контур электрической цепи представляет собой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям, например контур из четырех ветвей на рис. 2.2.

Часть электрической цепи с двумя внешними выводами (полюсами), которыми она может присоединяться к другим ветвям или участкам, называется **двухполюсником**. Двухполюсник, не содержащий источников питания, называется **пассивным**, а содержащий источник питания — **активным**.

Рис. 2.3. Пассивный двухполюсник ( $a$ ) и его схема замещения ( $b$ )



У пассивного двухполюсника, обозначение которого показано на рис. 2.3,  $a$ , выбирают одинаковое направление напряжения и тока относительно его выводов  $a$  и  $b$  так же, как у резисторов (например, у резистора с сопротивлением  $r$  на рис. 1.14), т. е.  $U = U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$ . Отношение  $U/I = r_{вх} = r_{вт}$  называют **входным** или **внутренним сопротивлением** пассивного двухполюсника.

Если при заданном напряжении  $U$  заменить двухполюсник его входным сопротивлением (рис. 2.3,  $b$ ), то не изменится ток  $I$ . И, наоборот, при заданном токе  $I$  не изменится напряжение  $U$ .

При постоянных токах в цепи ни в одной из ее точек не могут накапливаться электрические заряды, так как это вызвало бы изменение потенциалов точек цепи и напряжений на участках. Следовательно, электрические заряды, притекающие к какому-либо узлу по одной части присоединенных к нему ветвей или проводов в единицу времени, равны

зарядам, оттекающим от этого узла по другой части ветвей или проводов за ту же единицу времени. Это положение выражает первый закон Кирхгофа, который формулируется так: *сумма токов, направленных к узлу, равна сумме токов, направленных от узла.*

Пользуясь этим законом, например, для узлов *A* и *B* рис. 2.2 можно написать

$$I_1 + I_4 = I_5; \quad I_6 + I_7 = I_1 + I_2$$

или

$$I_1 + I_4 - I_5 = 0; \quad (2.1a)$$

$$I_6 + I_7 - I_1 - I_2 = 0. \quad (2.16)$$

В общем виде

$$\sum I = 0, \quad (2.2)$$

*т. е. алгебраическая сумма токов в узле равна нулю, причем со знаком плюс записываются оттекающие токи, а со знаком минус притекающие (или наоборот).*

Если направления токов в ветвях не известны, то при составлении уравнений по законам Кирхгофа их необходимо *предварительно выбрать произвольно и обозначить на схеме стрелками.* В действительности направления токов в ветвях могут и не совпасть с произвольно выбранными. Поэтому выбранные направления токов называют положительными направлениями. Если в результате расчета цепи какие-либо токи будут выражены отрицательными числами, то действительные направления этих токов обратны выбранным положительным.

Для контура электрической цепи, изображенного на рис. 2.2, стрелками показаны положительные направления токов. Источники электрической энергии, внутренними сопротивлениями которых можно пренебречь или внутренние сопротивления которых учтены в значениях сопротивлений ветвей  $r_1, r_2, r_3$ , обозначены кружками со стрелками, показывающими направления действия ЭДС.

Обходя контур рис. 2.2 от точки *A*, имеющей потенциал  $\phi_A$ , в произвольно выбранном направлении, например по часовой стрелке, проследим за изменением потенциала. На участке цепи между точками *A* и *B* потенциал уменьшается на падение напряжения  $r_1 I_1$ , так как направление обхода совпадает с направлением тока, который в пассивном элементе проходит от точки с более высоким потенциалом к точке с меньшим потенциалом. Кроме того, на этом же

участке потенциал уменьшается на значение ЭДС  $E_1$ , так как при обходе контура идем навстречу ЭДС — переходим от положительного вывода источника питания к его отрицательному выводу. Таким образом,

$$\varphi_B = \varphi_A - r_1 I_1 - E_1.$$

При дальнейшем обходе контура от точки  $B$  к точке  $B$  потенциал увеличивается на падение напряжения  $r_2 I_2$ , так как направление обхода противоположно направлению тока  $I_2$ , который в сопротивлении  $r_2$  идет от точки с более высоким потенциалом к точке с более низким потенциалом. На этом же участке при переходе от отрицательного вывода источника ЭДС  $E_2$  к его положительному выводу имеем повышение потенциала на значение ЭДС  $E_2$ ; поэтому

$$\varphi_B = \varphi_B + r_2 I_2 + E_2 = \varphi_A - r_1 I_1 - E_1 + r_2 I_2 + E_2.$$

Обойдя весь контур и вернувшись в исходную точку  $A$ , получим снова потенциал  $\varphi_A$ , т. е.

$$\varphi_A - r_1 I_1 - E_1 + r_2 I_2 + E_2 + r_3 I_3 - E_3 + r_4 I_4 = \varphi_A.$$

Перенеся все падения напряжения в правую часть уравнения, найдем, что

$$-E_1 + E_2 - E_3 = r_1 I_1 - r_2 I_2 - r_3 I_3 - r_4 I_4,$$

или в общем виде

$$\Sigma E = \Sigma (rI). \quad (2.3)$$

Это уравнение выражает второй закон Кирхгофа: *в замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме падений напряжения на всех сопротивлениях*. При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа ЭДС записывается со знаком «+», если ее направление совпадает с направлением произвольно выбранного обхода контура (т. е. если при обходе после вывода источника «—» следует вывод источника «+»). В противном случае ЭДС записывается со знаком «—». Падение напряжения на сопротивлении записывается со знаком «+», если направление тока в нем совпадает с направлением обхода.

## 2.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ РЕЗИСТОРОВ

Если несколько резисторов (или приемников энергии) соединены один за другим без разветвлений (рис. 2.4) и по ним проходит один и тот же ток, то они образуют одну ветвь,

и такое соединение резисторов, как указывалось, называется последовательным.

Согласно закону Ома напряжения на резисторах или падения напряжения определяются выражениями

$$U_1 = r_1 I; \quad U_2 = r_2 I; \quad U_3 = r_3 I,$$

откуда

$$U_1 : U_2 : U_3 = r_1 : r_2 : r_3. \quad (2.4)$$

Таким образом, падения напряжения на последовательно соединенных резисторах пропорциональны значениям их сопротивлений.

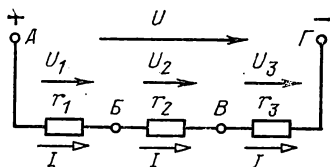


Рис. 2.4. Последовательное соединение резисторов

Напряжения на резисторах можно выразить через разности потенциалов на их выводах, т. е.

$$U_1 = \varphi_A - \varphi_B; \quad U_2 = \varphi_B - \varphi_B; \quad U_3 = \varphi_B - \varphi_\Gamma.$$

Складывая почленно правые и левые части написанных уравнений, получаем

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 + U_3 &= \varphi_A - \varphi_B + \varphi_B - \varphi_B + \varphi_B - \varphi_\Gamma = \\ &= \varphi_A - \varphi_\Gamma = U, \end{aligned} \quad (2.5)$$

т. е. сумма падений напряжений на последовательно соединенных резисторах равна напряжению на выводах всего участка цепи. На схемах напряжения или падения напряжения обозначают, как указывалось, стрелками (рис. 2.4), направленными от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом. Так, стрелка напряжения  $U_1 = \varphi_A - \varphi_B$  направлена от точки А к точке Б. Если действительное направление тока не известно и на схеме указано положительное направление тока, то и стрелка напряжения обозначает положительное направление, т. е. направлена от точки, потенциал которой принят большим, чем потенциал другой точки. Так как положительные направления напряжений или падений напряжения на сопротивлениях совпадают с положительными направлениями токов, то от-

дельных стрелок для положительных направлений напряжений на сопротивлениях можно и не ставить.

Ряд последовательно соединенных резисторов можно заменить эквивалентным (общим) с сопротивлением  $r$ , причем так, чтобы эта замена при неизменном напряжении на выводах соединения не вызвала изменения тока в цепи. Разделив на ток правую и левую части уравнения (2.5), получим

$$\frac{U_1 + U_2 + U_3}{I} = \frac{U}{I} = r_1 + r_2 + r_3 = r, \quad (2.6)$$

откуда следует, что эквивалентное сопротивление ряда последовательно соединенных резисторов равно сумме их сопротивлений.

Из выражения (2.6), умножая его на  $I^2$ , находим, что

$$r_1 I^2 + r_2 I^2 + r_3 I^2 = r I^2,$$

т. е. мощность, развиваемая в эквивалентном резисторе, равна сумме мощностей всех резисторов.

При последовательном соединении резисторов ток в них один и тот же, поэтому мощности, развиваемые в отдельных участках ( $P = r I^2$ ), пропорциональны их сопротивлениям, т. е.

$$P_1 : P_2 : P_3 = r_1 : r_2 : r_3.$$

**Пример 2.1.** Вычислить, в каких пределах изменяется ток в участке цепи с напряжением 125 В, который состоит из последовательно соединенных обмоток возбуждения электродвигателя с общим сопротивлением  $r_1 = 25$  Ом и реостата, сопротивление которого  $r_2$  можно изменять от 0 до 100 Ом.

**Решение.** Эквивалентное сопротивление участка цепи  $r = r_1 + r_2$ . При  $r_2 = 0$  ток в цепи

$$I_1 = U / (r_1 + r_2) = 125 / (25 + 0) = 5 \text{ А.}$$

При  $r_2 = 100$  Ом ток в цепи

$$I_2 = U / (r_1 + r_2) = 125 / (25 + 100) = 1 \text{ А.}$$

**Пример 2.2.** Магазин сопротивлений имеет соединенные последовательно четыре катушки с сопротивлениями:  $r_1 = 1$  Ом,  $r_2 = 2$  Ом,  $r_3 = 3$  Ом,  $r_4 = 4$  Ом. Каждую катушку можно замкнуть накоротко. Определить эквивалентное сопротивление магазина, если: а) замкнута накоротко катушка  $r_2$ , б) замкнутых накоротко катушек нет.

**Решение.**

а)  $r_a = r_1 + r_3 + r_4 = 1 + 3 + 4 = 8$  Ом;

б)  $r_6 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$  Ом.



## 2.3. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ РЕЗИСТОРОВ

Параллельным соединением резисторов (или приемников энергии, ветвей) называется такое, при котором к одним и тем же двум узлам электрической цепи (рис. 2.5, а) присоединены несколько резисторов (ветвей). Сопротивления соединительных проводов не учитываются, поэтому схему можно изобразить и так, как на рис. 2.5, б).

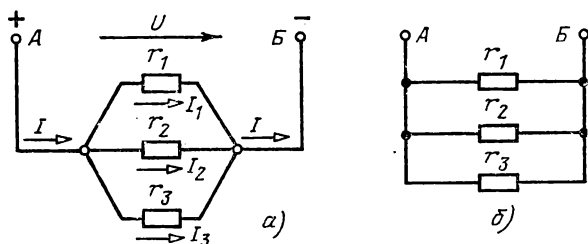


Рис. 2.5. Различное изображение параллельного соединения трех резисторов

Так как резисторы присоединены к одним и тем же узлам, то каждый из них находится под одинаковым напряжением  $U$ . Согласно закону Ома токи в резисторах определяются по формулам

$$I_1 = \frac{U}{r_1} = g_1 U; \quad I_2 = \frac{U}{r_2} = g_2 U; \quad I_3 = \frac{U}{r_3} = g_3 U.$$

Из этих формул следует, что

$$I_1 : I_2 : I_3 = g_1 : g_2 : g_3 = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2} : \frac{1}{r_3}, \quad (2.7)$$

т. е. токи в параллельных ветвях с резисторами распределяются прямо пропорционально проводимостям ветвей или обратно пропорционально их сопротивлениям.

Ряд параллельно соединенных резисторов можно заменить эквивалентным с сопротивлением  $r$ , значение которого должно быть таким, чтобы при том же напряжении на выводах ток в эквивалентном резисторе был равен сумме токов в отдельных ветвях:

$$r = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 + I_2 + I_3}.$$

### Эквивалентная проводимость

$$\frac{1}{r} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{U} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = g_1 + g_2 + g_3 = g, \quad (2.8)$$

т. е. эквивалентная проводимость параллельного соединения резисторов равна сумме проводимостей всех параллельных ветвей. Следовательно, эквивалентное сопротивление будет меньше самого малого из параллельно соединенных сопротивлений. Каждый из резисторов  $r_1, r_2, r_3$  на рис. 2.5 может быть эквивалентным ряду последовательно соединенных в соответствующей ветви.

Формула (2.8) дает возможность определить и эквивалентное сопротивление параллельного соединения резисторов. Например, при трех ветвях эквивалентная проводимость

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1 r_2 r_3}$$

и эквивалентное сопротивление

$$r = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}. \quad (2.9)$$

Если сопротивления ветвей равны, то

$$r = r_1^3 / (3r_1^2) = r_1 / 3.$$

В общем случае при параллельном соединении  $n$  резисторов с *одинаковыми сопротивлениями*  $r_1$  эквивалентное сопротивление

$$r = r_1 / n. \quad (2.10)$$

Так как

$$rI^2 = r^2 gI^2 = gU^2 = P,$$

то для мощности параллельного соединения (рис. 2.5), принимая во внимание (2.8), получаем

$$g_1 U^2 + g_2 U^2 + g_3 U^2 = gU^2,$$

или

$$P_1 + P_2 + P_3 = P.$$

Таким образом, мощность параллельного соединения равна сумме мощностей всех резисторов.

Эквивалентная проводимость цепи с двумя параллельно

соединенными резисторами (рис. 2.6) определяется по формуле

$$g = g_1 + g_2,$$

или

$$1/r = 1/r_1 + 1/r_2,$$

а эквивалентное сопротивление цепи

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}, \quad (2.11)$$

т. е. эквивалентное сопротивление параллельного соединения *двух резисторов* равно произведению сопротивлений, деленному на их сумму.

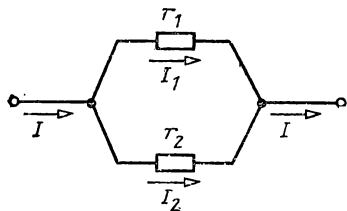


Рис. 2.6. Параллельное соединение двух резисторов

Напряжение на разветвлении в случае двух резисторов (рис. 2.6)

$$rI = r_1 I_1 = r_2 I_2,$$

откуда ток в первой параллельной ветви

$$I_1 = I \frac{r}{r_1} = I \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \frac{1}{r_1} = I \frac{r_2}{r_1 + r_2}. \quad (2.12)$$

Аналогично ток во второй параллельной ветви

$$I_2 = I \frac{r}{r_2} = I \frac{r_1}{r_1 + r_2}. \quad (2.13)$$

Формулы (2.12) и (2.13) позволяют получить, как говорят, «разброс общего тока» по двум параллельным ветвям.

Так как напряжение на параллельных ветвях одно и то же, то при параллельном соединении приемников энергии и заданном напряжении режим работы каждого из них не влияет на режим работы остальных. Потребители электрической энергии — электродвигатели, печи, нагревательные приборы, лампы накаливания, рассчитанные на работу при неизменном номинальном напряжении, соединяются обычно параллельно друг другу.

## 2.4. СМЕШАННОЕ СОЕДИНЕНИЕ РЕЗИСТОРОВ

Смешанным соединением называется последовательно-параллельное соединение резисторов или участков цепи, каждый из которых, в свою очередь, может состоять из последовательно или параллельно соединенных резисторов.

Наиболее типично смешанное соединение, при котором параллельно включенные приемники энергии соединены последовательно с сопротивлением подводящих проводов и внутренним сопротивлением источника питания. Расчет

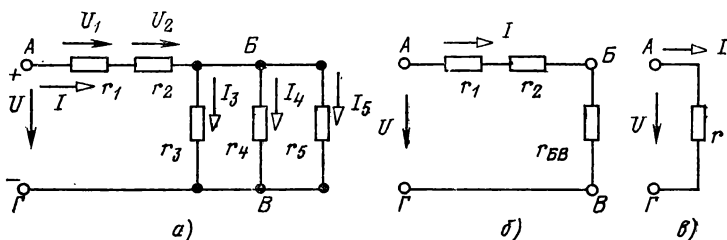


Рис. 2.7. Смешанное соединение резисторов (а), упрощенная (б) и эквивалентная схема (в)

такой цепи при заданной ЭДС или напряжения источника питания (рис. 2.7, а) и известных сопротивлениях резисторов заключается в нахождении токов и напряжений на всех участках цепи.

При расчете цепи со смешанным соединением резисторов пользуются обычно методом последовательного упрощения (свертывания) схемы.

Применяя этот метод, сначала определяем проводимость разветвленного участка цепи:

$$g_{БВ} = g_3 + g_4 + g_5 = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5}.$$

Эквивалентное сопротивление этого участка

$$r_{БВ} = 1/g_{БВ}.$$

Теперь заданную цепь можно представить схемой, состоящей из трех последовательно соединенных сопротивлений  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_{БВ}$  (рис. 2.7, б). Эквивалентное сопротивление этой цепи

$$r = r_1 + r_2 + r_{БВ}.$$

Полученная эквивалентная схема показана на рис. 2.7, в.

По закону Ома ток цепи

$$I = \frac{U}{r} = \frac{U}{r_1 + r_2 + r_{BB}}.$$

Напряжение  $U$  на рис. 2.7, как указывалось, обозначено стрелкой, направленной от вывода с большим потенциалом «+» к выводу с меньшим потенциалом «-».

Напряжения на последовательно соединенных участках цепи

$$U_1 = r_1 I; \quad U_2 = r_2 I; \quad U_{BB} = r_{BB} I.$$

Токи в параллельных ветвях

$$I_3 = U_{BB}/r_3; \quad I_4 = U_{BB}/r_4; \quad I_5 = U_{BB}/r_5.$$

Согласно (2.5)  $U = U_1 + U_2 + U_{BB}$ , откуда следует, что

$$U_{BB} = U - U_1 - U_2$$

меньше напряжения питания  $U$ , т. е. схема рис. 2.7, а—пример построения делителя напряжения.

## 2.5. СОЕДИНЕНИЕ ЗВЕЗДОЙ И ТРЕУГОЛЬНИКОМ

Электрические цепи, состоящие из приемников энергии (резисторов), соединенных последовательно, параллельно или смешанно при питании их от одного источника электрической энергии (рис. 2.4—2.7), а также цепи, содержащие один контур (рис. 1.17, 1.20), принято называть простыми цепями. При заданных ЭДС (напряжениях) источников питания и сопротивлениях токи и напряжения на всех участках простой цепи можно определить, пользуясь законом Ома и первым законом Кирхгофа (§ 2.1).

Разветвленные электрические цепи, имеющие несколько контуров с произвольным размещением потребителей и источников питания, относятся к сложным цепям, если их нельзя рассчитать, применяя только закон Ома и первый закон Кирхгофа. Методы расчета сложных цепей рассмотрены ниже.

Схему соединения трех ветвей, образующих замкнутый контур с тремя узлами  $A, B, B$  (рис. 2.8, а), называют треугольником.

В некоторых случаях расчет сложной цепи значительно упрощается, если треугольник сопротивлений заменить звездой сопротивлений, т. е. тремя ветвями, имеющими

дополнительный общий узел  $O$  (рис. 2.8, б). В других случаях расчета цепей встречается необходимость звезду заменить треугольником. Эти взаимные замены треугольника и звезды сопротивлений должны быть эквивалентными, т. е. при соответственно равных напряжениях между вершинами  $A$ ,  $B$  и  $B$  треугольника и звезды токи  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_B$  в подводящих проводах, соединяющих эти вершины с остальной частью цепи, должны остаться без изменений. Равенство токов должно выполняться при любых изменениях и переключениях в остальной части цепи и, в частности, при обрывах некоторых ее ветвей.

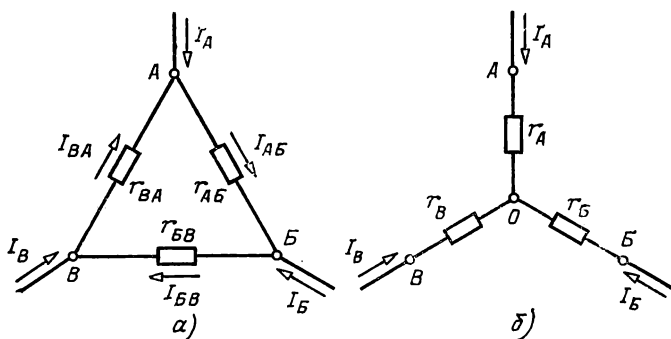


Рис. 2.8. Соединение резисторов треугольником (а) и звездой (б)

Сопротивления эквивалентной звезды  $r_A$ ,  $r_B$ ,  $r_C$  находятся в определенных соотношениях с сопротивлениями треугольника  $r_{AB}$ ,  $r_{BC}$ ,  $r_{CA}$ . Для выяснения этой зависимости допустим сначала, что в вершине  $A$  произошел обрыв подводящего провода и, следовательно, ток  $I_A = 0$ . Сопротивления между двумя оставшимися присоединенными вершинами  $B$  и  $C$  для обеих схем должны быть одинаковы, чтобы были соответственно равны токи  $I_B$  и  $I_C$  в обеих схемах. После обрыва в вершине  $A$  сопротивления  $r_B$  и  $r_C$  в звезде соединены последовательно, а в треугольнике сопротивления  $r_{BA}$  и  $r_{AC}$ , соединенные последовательно, образуют одну ветвь с суммарным сопротивлением  $r_{BA} + r_{AC}$ , параллельно которой подключено сопротивление  $r_{BC}$ . Поэтому можно написать

$$r_B + r_C = \frac{r_{BC}(r_{BA} + r_{AC})}{r_{BC} + (r_{BA} + r_{AC})}, \quad (2.14)$$

где принята во внимание формула расчета эквивалентного сопротивления двух параллельно включенных резисторов (2.11).

Рассуждая аналогично для случая обрыва в вершине  $B$ , при котором ток  $I_B = 0$ , а затем провода  $B$ , при котором ток  $I_B = 0$ , получим аналогичные выражения:

$$r_B + r_A = \frac{r_{BA}(r_{BB} + r_{AB})}{r_{BA} + (r_{BB} + r_{AB})}; \quad (2.15)$$

$$r_A + r_B = \frac{r_{AB}(r_{BA} + r_{BB})}{r_{AB} + (r_{BA} + r_{BB})}. \quad (2.16)$$

Чтобы преобразовать треугольник в звезду при заданных сопротивлениях сторон треугольника  $r_{AB}, r_{BB}, r_{BA}$ , требуется определить сопротивления лучей эквивалентной звезды  $r_A, r_B, r_B$ . Для этого составим полусумму левых и правых частей уравнений (2.15) и (2.16):

$$\begin{aligned} r_A + \frac{1}{2}(r_B + r_B) = \\ = \frac{r_{AB} r_{BA} + \frac{1}{2} r_{BB}(r_{AB} + r_{BA})}{r_{AB} + r_{BB} + r_{BA}} \end{aligned}$$

и вычтем из полученного выражения уменьшенные вдвое левую и правую части (2.14). В результате получим

$$r_A = \frac{r_{AB} r_{BA}}{r_{AB} + r_{BB} + r_{BA}}. \quad (2.17)$$

Аналогично получим

$$r_B = \frac{r_{BB} r_{AB}}{r_{AB} + r_{BB} + r_{BA}}; \quad (2.18)$$

$$r_B = \frac{r_{BA} r_{BB}}{r_{AB} + r_{BB} + r_{BA}}. \quad (2.19)$$

Таким образом, сопротивление луча эквивалентной звезды равно произведению сопротивлений двух сторон треугольника, которые присоединены к той же вершине, что и луч звезды, деленному на сумму сопротивлений всех сторон треугольника.

Если сопротивления треугольника равны друг другу:  $r_{AB} = r_{BB} = r_{BA} = r_{\Delta}$ , то будут равны друг другу и сопротив-

ления звезды, т. е.  $r_A=r_B=r_C=r_{\Delta}$ , причем из формул (2.17)—(2.19) получается простое соотношение

$$r_{\Delta} = r_{\Delta}/3. \quad (2.20)$$

При обратном преобразовании звезды в эквивалентный треугольник, т. е. при заданных сопротивлениях  $r_A, r_B, r_C$ , надо решить три уравнения (2.17)—(2.19) относительно сопротивлений  $r_{AB}, r_{BC}, r_{CA}$ :

$$r_{AB} = r_A + r_B + r_A r_B / r_C; \quad (2.21)$$

$$r_{BC} = r_B + r_C + r_B r_C / r_A; \quad (2.22)$$

$$r_{CA} = r_C + r_A + r_C r_A / r_B. \quad (2.23)$$

Таким образом, сопротивление стороны эквивалентного треугольника равно сумме сопротивлений двух лучей звезды, присоединенных к тем же вершинам, что и сторона треугольника, и их произведения, деленного на сопротивление третьего луча звезды.

**Пример 2.3.** Определить токи в ветвях мостовой схемы (рис. 2.9), если известны параметры цепи:  $E=4,4$  В,  $r_1=20$  Ом,  $r_2=60$  Ом,  $r_3=120$  Ом,  $r_4=8$  Ом,  $r_5=44$  Ом.

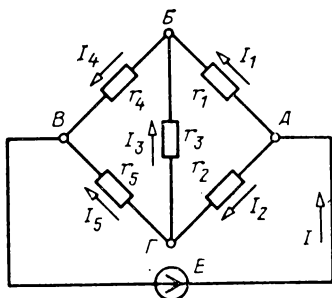


Рис. 2.9. Мостовая схема

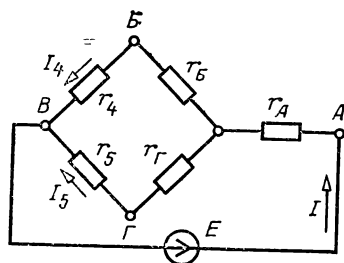


Рис. 2.10. Преобразованная мостовая схема

**Решение.** Заменяв один из треугольников схемы, например  $ABГ$ , образованный сопротивлениями  $r_1, r_2, r_3$ , эквивалентной звездой, сопротивление лучей которой  $r_A, r_B$  и  $r_Г$ , получим простую схему смешанного соединения элементов (рис. 2.10).



Найдем сопротивления лучей звезды:

$$r_A = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{20 \cdot 60}{20 + 60 + 120} = 6 \text{ Ом};$$

$$r_B = \frac{r_3 r_1}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{120 \cdot 20}{20 + 60 + 120} = 12 \text{ Ом};$$

$$r_\Gamma = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{60 \cdot 120}{20 + 60 + 120} = 36 \text{ Ом}.$$

Эквивалентное сопротивление участка (рис. 2.10), состоящего из сопротивления  $r_A$  и двух параллельных ветвей  $r_4 + r_B$  и  $r_5 + r_\Gamma$ ,

$$r = r_A + \frac{(r_4 + r_B)(r_5 + r_\Gamma)}{r_4 + r_B + r_5 + r_\Gamma} = 6 + \frac{(8 + 12)(44 + 36)}{8 + 12 + 44 + 36} = 22 \text{ Ом}.$$

Ток в неразветвленной части схемы (рис. 2.10)

$$I = E/r = 4,4/22 = 0,2 \text{ А}.$$

Ток в ветви с сопротивлениями  $r_4, r_B$  находим по формулам «разброса» общего тока (2.12):

$$I_4 = I \frac{r_5 + r_\Gamma}{r_4 + r_B + r_5 + r_\Gamma} = 0,2 \frac{44 + 36}{8 + 12 + 44 + 36} = 0,16 \text{ А}.$$

Аналогично ток в ветви с сопротивлениями  $r_5, r_\Gamma$

$$I_5 = I \frac{r_4 + r_B}{r_4 + r_B + r_5 + r_\Gamma} = 0,2 \frac{8 + 12}{8 + 12 + 44 + 36} = 0,04 \text{ А}.$$

Для определения токов  $I_1, I_2, I_3$ , которых нет в преобразованной схеме (рис. 2.10), найдем потенциалы узлов  $\Gamma$  и  $B$ .

Напряжение на сопротивлении  $r_4$

$$U_{BV} = \Phi_B - \Phi_B = r_4 I_4 = 8 \cdot 0,16 = 1,28 \text{ В}.$$

Напряжение на сопротивлении  $r_5$

$$U_{\Gamma B} = \Phi_\Gamma - \Phi_B = r_5 I_5 = 44 \cdot 0,04 = 1,76 \text{ В}.$$

Полагая потенциал точки  $B$  равным нулю, получаем

$$\Phi_B = U_{BV} \text{ и } \Phi_\Gamma = U_{\Gamma B}.$$

Напряжение на диагонали моста  $\Gamma B$

$$U_{\Gamma B} = \Phi_\Gamma - \Phi_B = U_{\Gamma B} - U_{BV} = 1,76 - 1,28 = 0,48 \text{ В}.$$

Переходя к схеме рис. 2.9, найдем токи ветвей в преобразованной части моста:

$$I_3 = U_{\Gamma B}/r_3 = 0,48/120 = 0,004 \text{ А}; \quad I_2 = I_3 + I_5 = 0,044 \text{ А};$$

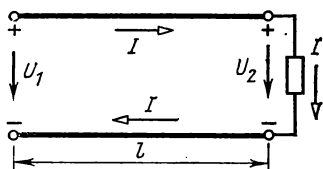
$$I_1 = I_4 - I_3 = 0,156 \text{ А}.$$

## 2.6. ПОТЕРЯ НАПРЯЖЕНИЯ В ПРОВОДАХ

Электрическая энергия от генератора к потребителю передается по проводам. Устройство, состоящее из прямого и обратного провода, изоляторов и опор, несущих эти изоляторы и провода, называется электрической двухпроводной линией (рис. 2.11).

Подробнее вопросы передачи электроэнергии и электрических сигналов рассмотрены далее в гл. 17. Здесь же только отметим, что участок электрической цепи, состоящий из двух проводов, которые соединяют источник питания с приемником (рис. 2.11), следует считать длинной линией, если

Рис. 2.11. Двухпроводная линия с приемником



сопротивлением проводов нельзя пренебречь. В противном случае остается справедливой схема замещения по рис. 1.14, на которой выводы приемника непосредственно соединены с выводами источника питания и напряжение  $U$  общее для приемника и источника.

Сопротивление обоих проводов линии определяется по формуле (1.21)

$$r = 2l/\gamma S.$$

При малой длине линии  $l$  сопротивлением проводов линии часто можно пренебречь. При большей их длине (десятки метров и более) сопротивлением проводов пренебрегать нельзя, так как при прохождении тока  $I$  в них будет заметное падение напряжения:

$$\Delta U = rI = \frac{2l}{\gamma S} I. \quad (2.24a)$$

Разность напряжений в начале и в конце линии (рис. 2.11)  $U_1 - U_2$ , равная падению напряжения в линии, называется потерей напряжения, т. е.

$$U_1 - U_2 = \Delta U = rI. \quad (2.24б)$$

При изменении сопротивления приемника и тем самым тока в цепи (нагрузки) от нуля до наибольшего допустимого пропорционально току изменяется и потеря напряжения. При неизменном напряжении  $U_1$  в начале линии напряжение  $U_2$  в конце линии, равное напряжению на приемнике, будет изменяться от  $U'_2 = U_1$  при  $I=0$  до  $U''_2 = U_1 - \Delta U$  при  $I \neq 0$ . Поэтому допустимая потеря напряжения  $\Delta U$  равна допустимому колебанию напряжения на приемниках энергии  $U'_2 - U''_2$ , которое для ламп накаливания составляет 1—2 %, для электродвигателей 2—5 % номинального напряжения приемников.

Если допустимая потеря напряжения задана, то из формулы (2.24а) можно определить необходимое сечение проводов двухпроводной линии:

$$S = 2Il/\gamma \Delta U. \quad (2.25a)$$

Часто потерю напряжения выражают в процентах относительно  $U_2$  и обозначают буквой  $e$ , так что

$$e = \frac{\Delta U}{U_2} 100\%, \quad (2.26)$$

откуда

$$\Delta U = eU_2/100\%.$$

Подставив последнее выражение в (2.25а), получим

$$S = 2Il \cdot 100\% / \gamma e U_2. \quad (2.25б)$$

Умножив правую часть последнего выражения на отношение  $U_2/U_2$ , найдем, что

$$S = \frac{2Il \cdot 100\%}{\gamma e U_2} \frac{U_2}{U_2} = \frac{2P_2 l \cdot 100\%}{\gamma e U_2^2}. \quad (2.25в)$$

Выбранное по допустимой потере напряжения сечение проводов должно быть проверено на допустимый ток, определяющий нагрев.

Из последней полученной формулы следует, что с увеличением передаваемой мощности  $P_2$  и длины линии  $l$  (при заданной потере напряжения  $e$  в линии) эффективным средством уменьшения сечения проводов является повышение напряжения. Поэтому при больших передаваемых мощностях и больших расстояниях передача энергии производится при высоких напряжениях (110, 220, 500, 800 кВ).

Умножив потерю напряжения в линии на ток, получим мощность потерь в линии:

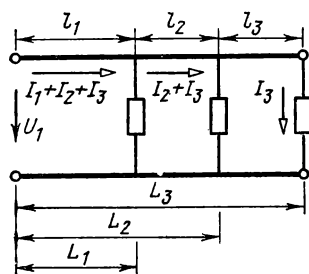
$$\Delta P = \Delta U I = r I^2 = (l/\gamma S) I^2.$$

Коэффициент полезного действия линии

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1 - \Delta P}{P_1} = \frac{U_1 I - \Delta U I}{U_1 I} = 1 - \frac{\Delta U}{U_1}. \quad (2.27)$$

Таким образом, с увеличением нагрузки (тока) КПД уменьшается. При допустимых потерях напряжения 2—5 % КПД составляет 98—95 %.

Рис. 2.12. Двухпроводная линия с тремя приемниками



Если к линии в разных точках присоединены несколько приемников (рис. 2.12), то потери напряжения на отдельных участках ( $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ ) могут быть выражены через произведение сопротивлений участков и токов, т. е.

$$\Delta U_1 = r_1 (I_1 + I_2 + I_3); \quad \Delta U_2 = r_2 (I_2 + I_3); \quad \Delta U_3 = r_3 I_3.$$

Потеря напряжения во всей линии равна сумме потерь на отдельных участках:

$$\begin{aligned} \Delta U &= \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 = r_1 (I_1 + I_2 + I_3) + r_2 (I_2 + I_3) + \\ &+ r_3 I_3 = r_1 I_1 + (r_1 + r_2) I_2 + (r_1 + r_2 + r_3) I_3. \end{aligned}$$

Если линия выполнена из проводов одного и того же материала и сечения, то

$$\Delta U = \frac{2}{\gamma U} l_1 I_1 + \frac{2}{\gamma S} (l_1 + l_2) I_2 + \frac{2}{\gamma S} (l_1 + l_2 + l_3) I_3$$

или, вводя расстояния от источника питания до соответ-

вующего приемника:  $L_1=l_1$ ;  $L_2=l_1+l_2$ ;  $L_3=l_1+l_2+l_3$ , получаем

$$\Delta U = \frac{2}{\gamma S} (L_1 I_1 + L_2 I_2 + L_3 I_3);$$

в общем случае

$$\Delta U = \frac{2}{\gamma S} \Sigma L I. \quad (2.28)$$

Последняя формула дает возможность определить необходимое сечение проводов линии:

$$S = \frac{2}{\gamma \Delta U} \Sigma L I. \quad (2.29)$$

**Пример 2.4.** Напряжение на выводах источника питания  $U_1=230$  В. На расстоянии 120 м от него присоединен приемник, мощность которого  $P_2=5$  кВт. Допустимое падение напряжения в линии  $\Delta U=10$  В. Определить сечение медных проводов линии.

**Решение.** Напряжение в конце линии

$$U_2 = U_1 - \Delta U = 230 - 10 = 220 \text{ В.}$$

Допустимая потеря напряжения в процентах

$$\epsilon = \frac{\Delta U}{U_2} 100\% = \frac{10}{220} 100\% \approx 4,5\%.$$

Сечение проводов [принимая для меди удельную проводимость  $\gamma=58$  м/(Ом · мм<sup>2</sup>)] по (2.25в)

$$S = \frac{2P_2 l}{\gamma \epsilon U_2^2} 100\% = \frac{2 \cdot 5000 \cdot 120}{58 \cdot 4,5 \cdot 220^2} 100\% \approx 9,5 \text{ мм}^2.$$

## 2.7. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ ИСТОЧНИКОВ ЭНЕРГИИ

При расчетах электрических цепей реальные источники электрической энергии заменяются одной из двух эквивалентных схем.

Первая схема замещения, состоящая из идеального источника ЭДС  $E$  и внутреннего сопротивления  $r_{вт}$ , была получена в § 1.10.

Для цепи, состоящей из реального источника электри-

ческой энергии с постоянными ЭДС  $E$  и внутренним сопротивлением  $r_{\text{вт}}$ , замкнутого на резистор с сопротивлением  $r$  (рис. 1.14), как известно (1.35), можно написать, что ЭДС

$$E = U + U_{\text{вт}} = U + r_{\text{вт}} I.$$

Поделив правую и левую части уравнения на внутреннее сопротивление  $r_{\text{вт}}$ , получим

$$\frac{E}{r_{\text{вт}}} = \frac{U}{r_{\text{вт}}} + I \text{ или } I_{\text{к}} = I_0 + I, \quad (2.30)$$

где, как и ранее,  $I_{\text{к}} = E/r_{\text{вт}}$ , а  $I_0 = U/r_{\text{вт}}$ .

Уравнению (2.30) отвечает вторая схема замещения источника, показанная на рис. 2.13. Она состоит из идеального источника тока, изображенного кружком с двумя стрелками внутри и буквой  $I_{\text{к}}$  рядом, внутреннее сопротивление которого бесконечно велико, и параллельно присоединенного внутреннего сопротивления  $r_{\text{вт}}$  источника питания.

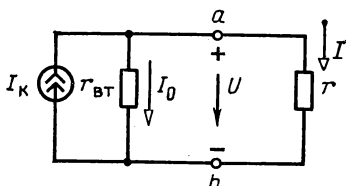


Рис. 2.13. Схема замещения реального источника тока

Ток короткого замыкания источника  $I_{\text{к}}$ , равный частному деления ЭДС источника на внутреннее сопротивление, является характеристикой источника, так как он не зависит от нагрузки (тока  $I$ ) и сопротивления  $r$ . Поэтому источник, ток которого не изменяется и равен  $I_{\text{к}}$ , и называют источником тока. Стрелки внутри кружка показывают направление тока источника. Таким образом, вторая возможная схема замещения (рис. 2.13) также состоит из двух элементов: идеального источника тока и сопротивления  $r_{\text{вт}}$ , равного внутреннему сопротивлению реального источника питания.

Схемы замещения по рис. 2.13 и 2.14 эквивалентны для приемников, которые можно к ним присоединять, так как при том же сопротивлении  $r$  расчет тока  $I$  и напряжения  $U = rI$  дает одинаковые численные значения. Поэтому внеш-

ная характеристика источника тока по рис. 2.13 такая же, как у источника ЭДС по рис. 1.14, т. е. характеристика рис. 1.16, а общая для обоих источников.

Из уравнения (2.30) также следует, что неизменный ток  $I_K$  источника тока складывается из двух составляющих: одна из них представляет собой ток  $I$  в сопротивлении нагрузки, другая — ток  $I_0$ , замыкающий через параллельно присоединенное внутреннее сопротивление источника энергии  $r_{BT}$ .

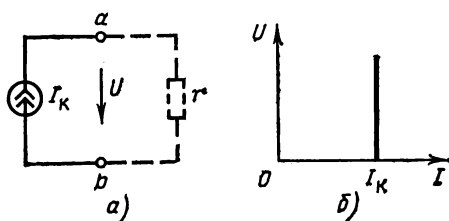


Рис. 2.14. Обозначение идеального источника тока (а) и его внешняя характеристика (б)

Ток  $I_K$  распределяется в параллельных ветвях (рис. 2.13) обратно пропорционально сопротивлениям ветвей  $r_{BT}$  и  $r$  [см. (2.12) и (2.13)]:

$$I = I_K \frac{r_{BT}}{r + r_{BT}}; \quad I_0 = I_K \frac{r}{r + r_{BT}}.$$

Если внутреннее сопротивление источника  $r_{BT}$  много больше сопротивления приемника  $r$ , т. е. ток  $I$  много больше тока  $I_0$ , то последним можно пренебречь и считать, что

$$I_K = I + I_0 \approx I. \quad (2.31)$$

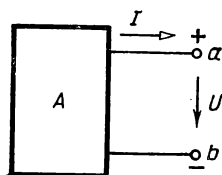
В этом случае и получается только идеальный источник тока, так как в схеме замещения отпадает ветвь с сопротивлением  $r_{BT}$  (рис. 2.14, а). Ток идеального источника тока не зависит от сопротивления нагрузки и остается равным  $I_K$ . Внешняя характеристика идеального источника тока показана на рис. 2.14, б. В этом случае при изменяющейся нагрузке напряжение приемника изменяется пропорционально сопротивлению приемника, так как по закону Ома  $U = rI_K$ , а ток равен постоянной величине  $I_K$ .

Рассмотренные схемы замещения с источником ЭДС и с источником тока, эквивалентные для внешних участков цепи (одинаковы внешние характеристики и режимы приемников), не эквивалентны в отношении мощности потерь внутри источника. Для схемы с источником ЭДС мощность

потерь  $r_{вт} I^2 = r_{вт} (U^2/r^2)$ , для схем с источником тока мощность потерь  $r_{вт} I^2 = r_{вт} (U^2/r_{вт}^2)$ . Они, очевидно, не равны друг другу, поэтому замена одной из схем замещения другой допустима только для участков цепи, находящихся вне источников.

Источники ЭДС и тока имеют два внешних вывода (*a* и *b*), т. е. это двухполюсники (см. § 2.1), но не пассивные, а активные (рис. 2.15). Следует обратить внимание на различие в выборе направлений токов у пассивных (рис. 2.3) и активных *A* (рис. 2.13—2.15) двухполюсников.

Рис. 2.15. Активный двухполюсник



Активным двухполюсником является любая часть электрической цепи с двумя выводами (*a* и *b*), к которым могут присоединяться другие участки цепи, если она содержит источники питания. Зависимость  $U(I)$  активного двухполюсника, как и для источника ЭДС, называется его внешней характеристикой (рис. 1.16, *a*). Поэтому для расчета режимов участков, присоединяемых к активному двухполюснику, последний можно заменить источником с ЭДС, равной напряжению холостого хода  $E = U_x$ , и внутренним сопротивлением  $r_{вт} = U_x/I_k$  (или источником тока).

## 2.8. СОЕДИНЕНИЯ ХИМИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ ПИТАНИЯ

Электродвижущие силы химических источников питания невелики: 1—2 В. Разрядные токи у первичных элементов составляют доли ампера, а у аккумуляторов — несколько ампер или десятков ампер. Так как в большинстве случаев токи и напряжения потребителей электрической энергии превышают разрядные токи и ЭДС химических источников питания, то последние обычно соединяются для совместной работы в батареи. Соединяются в батареи только однородные элементы, имеющие одинаковые ЭДС  $E_0$  и внутренние сопротивления  $r_0$ .

Применяются три способа соединения первичных и вто-



ричных элементов в батарею: последовательное, параллельное и групповое.

Последовательное соединение (рис. 2.16) применяется в тех случаях, когда напряжение потребителя  $U$  превышает ЭДС одного элемента  $E_0$ , а ток потребителя не превышает допустимый разрядный ток элемента. Число

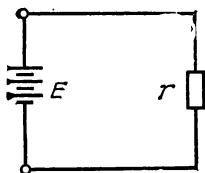


Рис. 2.16. Последовательное соединение элементов

последовательно соединенных элементов  $n$  должно быть не меньше отношения  $U/E_0$ , т. е.

$$n \geq \frac{U}{E_0}.$$

Электродвижущие силы элементов, соединенных в батарею, должны иметь одинаковое направление, что обеспечивается соединением положительного вывода первого элемента с отрицательным выводом второго, положительного вывода второго элемента с отрицательным выводом третьего и т. д. В этом случае ЭДС батареи

$$E = nE_0, \quad (2.32)$$

ее внутреннее сопротивление

$$r_{\text{вт}} = nr_0, \quad (2.33)$$

а емкость батареи равна емкости одного элемента.

Параллельное соединение (рис. 2.17) приме-

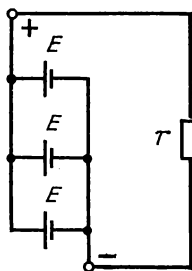


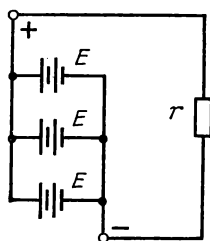
Рис. 2.17. Параллельное соединение элементов

няется, если ток потребителя  $I$  больше допустимого разрядного тока  $I_p$  элемента, а напряжение потребителя равно ЭДС одного элемента. Число параллельно соединяемых элементов  $m$  должно быть не менее отношения  $I/I_p$ , т. е.

$$m \geq I/I_p.$$

При параллельном соединении положительные выводы элементов соединяются в один узел, а отрицательные — в другой. Соединяемые элементы должны иметь одинаковые

Рис. 2.18. Групповое соединение элементов



ЭДС и одинаковые внутренние сопротивления. При этом соединении ЭДС батареи равна ЭДС одного элемента:

$$E = E_0, \quad (2.34)$$

внутреннее сопротивление батареи

$$r_{вт} = r_0/m, \quad (2.35)$$

разрядный ток батареи равен разрядному току элемента, умноженному на число элементов:

$$I = I_p m. \quad (2.36)$$

Емкость батареи равна сумме емкостей параллельно соединенных элементов.

Групповое соединение — это сочетание последовательного и параллельного соединений элементов (рис. 2.18). Оно применяется в том случае, если и напряжение и ток потребителя больше напряжения и разрядного тока элемента. Число последовательно соединенных элементов  $n$  в группе и число параллельных групп  $m$  определяются по ранее приведенным формулам.

## 2.9. МЕТОД УЗЛОВОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Метод узлового напряжения дает возможность более просто, по сравнению с другими далее рассмотренными методами, определить режим *цепи с двумя узлами* (рис. 2.19).

Действительные направления токов до расчета режима нельзя указать, так они зависят от значений ЭДС и сопротивлений. Поэтому выберем положительные направления токов, например так, как показано стрелками на рис. 2.19.

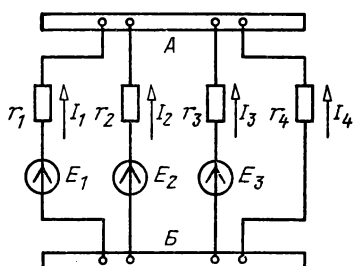


Рис. 2.19. Электрическая цепь с двумя узлами

Определим разность потенциалов между двумя узлами *A* и *Б*, которая называется узловым напряжением  $U = U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$ .

Перемещаясь по первой ветви от узла *Б* к узлу *A*, найдем потенциал точки *A*:

$$\varphi_B + E_1 - r_1 I_1 = \varphi_A$$

или

$$E_1 - U = r_1 I_1,$$

откуда ток первой ветви

$$I_1 = \frac{E_1 - U}{r_1} = (E_1 - U) g_1; \quad (2.37)$$

здесь  $r_1$  и  $g_1$  — сопротивление и проводимость первой ветви, в которые входит и внутреннее сопротивление первого источника.

Аналогично для остальных ветвей цепи

$$I_2 = (E_2 - U) g_2; \quad (2.38)$$

$$I_3 = (E_3 - U) g_3, \quad (2.39)$$

$$I_4 = (0 - U) g_4 = -U g_4. \quad (2.40)$$

По первому закону Кирхгофа запишем, например, для узла  $B$

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

Подставив в последнее уравнение выражения токов ветвей, получим

$$(E_1 - U) g_1 + (E_2 - U) g_2 + (E_3 - U) g_3 - U g_4 = 0.$$

Раскрыв скобки, находим узловое напряжение:

$$U = U_{AB} = \frac{E_1 g_1 + E_2 g_2 + E_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3 + g_4},$$

или в общем случае узловое напряжение

$$U = U_{AB} = \frac{\sum (Eg)}{\sum g}. \quad (2.41)$$

Таким образом, узловое напряжение равно отношению алгебраической суммы произведений ЭДС на проводимости соответствующих ветвей к сумме проводимостей всех ветвей. Со знаком «+» записываются ЭДС, направленные к узлу  $A$ . Если какая-либо из ЭДС имеет противоположное направление, то в формулу (2.41) она войдет со знаком «-».

Найдя узловое напряжение и подставив его в выражения для токов (2.37) — (2.40), можно определить токи во всех ветвях цепи.

**Пример 2.5.** Два источника питания работают на внешнюю цепь (рис. 2.20). Определить токи в ветвях цепи, если задано:  $E_1 = 225$  В,  $E_2 = 200$  В,  $r_1 = r_2 = 1$  Ом,  $r_3 = 2$  Ом.

**Решение.** Вычислим проводимости ветвей:

$$g_1 = g_2 = 1/r_1 = 1 \text{ См}; \quad g_3 = 1/r_3 = 1/2 = 0,5 \text{ См}.$$

Определим узловое напряжение:

$$U = U_{ab} = \frac{E_1 g_1 - E_2 g_2}{g_1 + g_2 + g_3} = \frac{225 \cdot 1 - 200 \cdot 1}{1 + 1 + 0,5} = 10 \text{ В}.$$

Определим токи в ветвях при выбранных положительных направлениях токов. По (2.37) и (2.38)

$$I_1 = (E_1 - U) g_1 = (225 - 10) \cdot 1 = 215 \text{ А};$$

$$I_2 = (-E_2 - U) g_2 = (-200 - 10) \cdot 1 = -210 \text{ А}.$$

По закону Ома ток

$$I_3 = U_{ba}/r_3 = -U g_3 = -10 \cdot 0,5 = -5 \text{ А}.$$

Знаки «-» показывают, что в действительности токи  $I_2$  и  $I_3$  направлены от узла  $a$  к узлу  $b$ .

Проверим результаты расчета по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 215 - 210 - 5 = 0.$$

Применяя метод узлового напряжения, выясним некоторые вопросы параллельной работы генераторов.

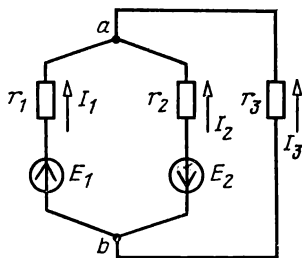


Рис. 2.20. Два источника питания, работающие параллельно

Нагрузка электрической станции в течение суток сильно изменяется. Ночью она минимальна, в начале рабочего дня и в его конце нагрузка максимальна. Ввиду этого на станциях устанавливают несколько генераторов. При малой нагрузке работает один генератор, при большой нагрузке — несколько генераторов.

При параллельном соединении нескольких (например, трех) генераторов, работающих на общий приемник  $r$ , получается схема, представленная на рис. 2.19, где  $r_1 = r_{вт1}$ ;  $r_2 = r_{вт2}$ ;  $r_3 = r_{вт3}$ . Как видно из формул (2.37) — (2.39), токи генераторов будут одинаковы, если равны их ЭДС  $E_1 = E_2 = E_3$  и проводимости  $g_1 = g_2 = g_3$  или внутренние сопротивления  $r_{вт1} = r_{вт2} = r_{вт3}$ .

Узловое напряжение  $U$  на выводах электрической станции практически мало отличается от ЭДС генераторов, так как внутренние сопротивления генераторов малы по сравнению с сопротивлением приемника, поэтому разность  $E - U$  составляет всего несколько процентов от  $U$  и самое незначительное изменение ЭДС какого-либо генератора приводит к весьма значительному изменению его тока. Например, при ЭДС генератора  $E_1 = 225$  В и узловом напряжении  $U = 220$  В разность их  $E_1 - U = 5$  В. Если ЭДС генератора увеличить на 1 %, или на 2 В, т. е. до 227 В, то при том же напряжении  $U$  разность  $E_1 - U$  возрастет с 5 до 7 В, т. е. на 40 %, на 40 % возрастает и ток первого генератора (2.37). Таким образом, для увеличения тока (нагрузки) генератора достаточно незначительного увеличения его ЭДС.

Наоборот, для полной разгрузки генератора достаточно его ЭДС уменьшить до значения узлового напряжения, так как в этом случае  $I = (E - U)g = 0$ . При дальнейшем уменьшении ЭДС генератора, т. е. при  $(E - U) < 0$ , ток генерато-

ра изменит направление и будет направлен навстречу ЭДС; таким образом, генератор перейдет в режим работы электродвигателя.

## 2.10. МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ

Метод наложения, который следует из принципа наложения или независимости действия сил в линейной системе, можно применить для определения токов и напряжений на отдельных участках цепи, в которой одновременно действует несколько ЭДС.

Сущность принципа наложения заключается в том, что ток в какой-либо ветви цепи с сопротивлениями, не зависящими от токов и напряжений, т. е. линейной, равен алгебраической сумме частичных токов, создаваемых в этой ветви всеми поочередно действующими ЭДС.

Проводя расчет с применением принципа наложения, вначале полагаем, что в цепи действует только первая ЭДС  $E_1$ . Все сопротивления цепи, включая и сопротивления источников, ЭДС которых приравниваются нулю, остаются неизменными. Для такой цепи находим частичные токи во всех ветвях. Затем расчет повторяют, полагая, что действует только вторая ЭДС  $E_2$ . Аналогичные расчеты производим поочередно для всех источников, включая и источники тока, если какие-либо реальные источники представлены схемами замещения с источниками тока.

Таким образом, для каждой ветви получается столько частичных токов, сколько источников содержит цепь. Алгебраическая сумма этих частичных токов и равна току  $I$  в ветви при одновременном действии всех источников:

$$I = I' + I'' + I''' + \dots, \quad (2.42)$$

где  $I'$ ,  $I''$ ... — частичные токи.

В некоторых случаях удобнее все источники цепи разделить на две или большее число групп и ток любой ветви рассматривать как алгебраическую сумму частичных токов этих групп источников.

В качестве примера рассмотрим цепь, изображенную на рис. 2.21, а, на которой указаны выбранные положительные направления токов. Положим сначала, что в цепи действует только одна ЭДС  $E_1$  (рис. 2.21, б). Общее или эквивалентное сопротивление цепи будет состоять из последова-

тельно соединенных сопротивления  $r_1$  и разветвления из двух параллельных сопротивлений  $r_2$  и  $r_3$ :

$$r_{\text{эк1}} = r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}.$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$I'_1 = E_1 / r_{\text{эк1}}.$$

Согласно (2.12) и (2.13) токи в параллельных ветвях

$$I'_2 = I'_1 \frac{r_3}{r_2 + r_3}; \quad I'_3 = I'_1 \frac{r_2}{r_2 + r_3}.$$

Затем, полагая, что действует только одна ЭДС  $E_2$

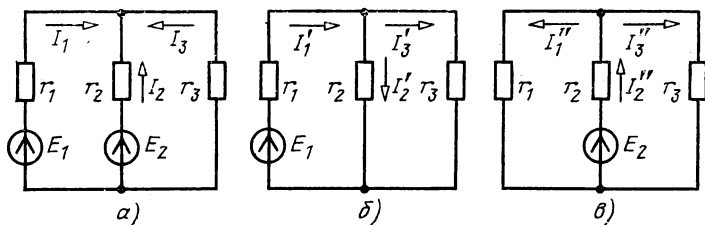


Рис. 2.21. Три схемы к расчету цепи методом наложения

(рис. 2.21, в), находим общее сопротивление и ток в неразветвленной части цепи:

$$r_{\text{эк2}} = r_2 + \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3}; \quad I''_2 = \frac{E_2}{r_{\text{эк2}}}.$$

Токи в параллельных ветвях

$$I''_1 = I''_2 \frac{r_3}{r_1 + r_3}; \quad I''_3 = I''_2 \frac{r_1}{r_1 + r_3}.$$

Токи в ветвях находим как алгебраические суммы частичных токов:

$$I_1 = I'_1 - I''_1; \quad I_2 = I'_2 - I''_2; \quad I_3 = -I'_3 - I''_3.$$

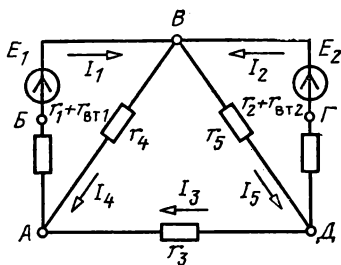
Знак, который ставится перед частичным током, зависит от того, совпадает ли направление частичного тока (рис. 2.21, б и в) с выбранным положительным направлением тока в ветви (рис. 2.21, а) или противоположно ему.

## 2.11. ПРИМЕНЕНИЕ ДВУХ ЗАКОНОВ КИРХГОФА

Расчет цепи с несколькими контурами, можно выполнить, применив два закона Кирхгофа.

Если для рассматриваемой цепи заданы значения ЭДС источников (а также токов источников, если в цепи есть источники тока) и сопротивлений, то для нахождения всех токов требуется столько расчетных уравнений, сколько в цепи неизвестных токов. При этом число независимых узловых уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, должно быть на единицу меньше числа узлов цепи,

Рис. 2.22. Схема разветвленной цепи



Например, если в цепи  $n$  узлов, то нужно составить уравнения для любых  $(n-1)$  узлов. Если составить узловое уравнение и для последнего,  $n$ -го узла, то оно будет следствием уже составленных  $(n-1)$  уравнений и окажется бесполезным для расчета. Остальные уравнения должны быть контурные, т. е. составляться по второму закону Кирхгофа. Контурные уравнения рекомендуется составлять для более простых контуров с меньшим числом ветвей. Кроме того, каждый новый контур, для которого составляется очередное уравнение, должен содержать не менее одной ветви, не входившей в контуры, для которых уже составлены уравнения. Выполнение последнего условия обеспечивает независимость составленных уравнений.

Определим токи во всех ветвях цепи, схема замещения которой показана на рис. 2.22, считая заданными ЭДС и сопротивления.

Для составления узловых и контурных уравнений необходимо знать направления токов. Так как направления токов в сложной цепи до расчета неизвестны, то зададимся произвольно направлениями токов во всех ветвях цепи и будем считать эти направления положительными. Они и указаны стрелками на рис. 2.22. Токи будут алгебраическими



величинами, т. е. могут принимать положительные или отрицательные значения. Если после составления уравнений и их решения получится отрицательное значение для какого-либо из токов, то этот ток в действительности проходит в направлении, противоположном выбранному и показанному на схеме.

Рассматривая цепь (рис. 2.22), имеем три узла  $A, B, D$  ( $n=3$ ), поэтому нужно составить два узловых уравнения для любых двух узлов, например для узла  $A$

$$I_1 - I_3 - I_4 = 0$$

и для узла  $D$

$$I_2 + I_3 - I_5 = 0.$$

Так как число ветвей с неизвестными токами равно пяти, то нужно иметь пять независимых уравнений; следовательно, три недостающих уравнения — контурные. Для контура  $ABBA$ , который обходим в порядке расположения букв, т. е. по движению часовой стрелки, запишем

$$E_1 = (r_1 + r_{вт1}) I_1 + r_4 I_4.$$

Для контура  $ABDA$

$$0 = -r_4 I_4 + r_5 I_5 + r_3 I_3$$

и для контура  $BГДВ$

$$-E_2 = -(r_2 + r_{вт2}) I_2 - r_5 I_5.$$

Для заданной цепи можно составить еще несколько контурных уравнений, например для контуров  $ABVDA$ ,  $ABГДА$  и  $ABBVГДА$ . Эти уравнения не являются независимыми, каждое из них может быть получено из ранее составленных уравнений и, следовательно, они не нужны для расчета цепи.

Если какие-либо токи ветвей известны (например, измерены), то число совместно решаемых уравнений, соответственно сокращается. Например, если известен только ток  $I_4$ , то можно не составлять одно уравнение, содержащее ток  $I_4$  (первое узловое, первое или второе контурное для цепи рис. 2.22).

Правильность выполненного расчета можно проверить, составив баланс мощностей: сумма мощностей источников должна равняться сумме мощностей потребителей, что следует из закона сохранения энергии.

Для цепей со многими ветвями необходимо совместно решить систему алгебраических уравнений с большим числом неизвестных. В этом случае целесообразно применение ЭВМ, программное обеспечение которых дает возможность получить решение системы алгебраических уравнений.

**Пример 2.6.** Определить токи, применяя узловые и контурные уравнения, и составить баланс мощностей для цепи примера 2.5.

**Решение.** Так как у цепи два узла ( $a$  и  $b$ ), то надо составить одно узловое уравнение (по первому закону Кирхгофа). Например, для узла  $b$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

Цепь имеет три ветви. Поэтому нужно составить еще два независимых контурных уравнения (по второму закону Кирхгофа). Для контура с ветвями 1 и 2

$$E_1 + E_2 = r_1 I_1 - r_2 I_2.$$

Для контура с ветвями 2 и 3 (это новая ветвь)

$$-E_2 = r_2 I_2 - r_3 I_3.$$

После подстановки численных значений получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными токами  $I_1, I_2, I_3$ :

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 &= 0; \\ 225 + 200 &= 1I_1 - 1I_2; \\ -200 &= 1I_2 - 2I_3. \end{aligned}$$

Систему уравнений можно решить, например, последовательным исключением неизвестных. Подставим ток  $I_1 = -I_2 - I_3$  из 1-го уравнения во 2-е и получим систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} 425 &= -2I_2 - I_3; \\ -200 &= 1I_2 - 2I_3. \end{aligned}$$

Умножим последнее уравнение на 2 и сложим со вторым:

$$25 = -5I_3,$$

откуда  $I_3 = -5$  А и из последнего уравнения

$$-200 = 1I_2 + 2 \cdot 5, \text{ т. е. } I_2 = -210 \text{ А.}$$

Наконец, из узлового уравнения определяем ток  $I_1 = 215$  А.

Мощность, развиваемая первым источником,

$$P_{\text{и1}} = E_1 I_1 = 225 \cdot 215 = 48\,375 \text{ Вт} = 48,375 \text{ кВт.}$$

У второго источника ток  $I_2$  направлен против ЭДС (рис. 2.20), но численное значение этого тока отрицательное, т. е. действительное направ-

ление тока  $I_2$  совпадает с направлением ЭДС. Поэтому и второй источник работает в режиме генератора с развиваемой мощностью:

$$P_{и2} = E_2 |I_2| = 200 \cdot 210 = 42\,000 \text{ Вт} = 42 \text{ кВт.}$$

Мощности преобразования электрической энергии в другие виды в приемниках:

$$P_1 = r_1 I_1^2 = 1 \cdot 215^2 = 46\,225 \text{ Вт}; \quad P_2 = r_2 I_2^2 = 1 (-210)^2 = 44\,100 \text{ Вт};$$

$$P_3 = r_3 I_3^2 = 2 (-5)^2 = 50 \text{ Вт.}$$

Составим баланс мощностей:

$$P_{и1} + P_{и2} = P_1 + P_2 + P_3$$

или

$$48\,375 + 42\,000 = 46\,225 + 44\,100 + 50,$$

т. е.

$$90\,375 = 90\,375,$$

что подтверждает правильность расчета токов.

**Пример 2.7.** На рис. 2.23 показана мостовая схема с двумя источниками ЭДС  $E_1=50 \text{ В}$ ,  $E_5=20 \text{ В}$  и источником тока (идеальный)  $I_K=$

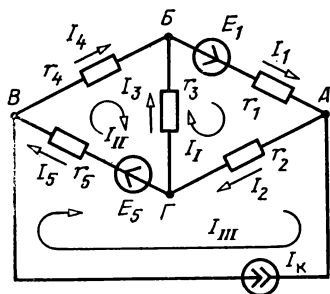


Рис. 2.23. Схема к примеру 2.7

$= 3 \text{ А}$ . Сопротивления ветвей  $r_1=r_3=r_5=10 \text{ Ом}$ ,  $r_2=5 \text{ Ом}$ ,  $r_4=20 \text{ Ом}$ . Определить токи, выбранные положительные направления которых показаны на рис. 2.23.

**Решение.** Составим узловые уравнения для трех из четырех (А, В, В, Г) узлов схемы. Например, для узлов В, В, Г

$$I_1 - I_3 - I_4 = 0; \quad I_K + I_4 - I_5 = 0; \quad -I_2 + I_3 + I_5 = 0.$$

Схема содержит 5 ветвей с неизвестными токами (ток шестой ветви

с идеальным источником тока  $I_k$  задан). Следовательно, необходимо составить еще 2 контурных уравнения. Для контура АГБ

$$E_1 = r_1 I_1 + r_2 I_2 + r_3 I_3.$$

Для контура БГВ (две новые ветви ГВ и ВВ)

$$E_5 = -r_3 I_3 + r_5 I_5 + r_4 I_4.$$

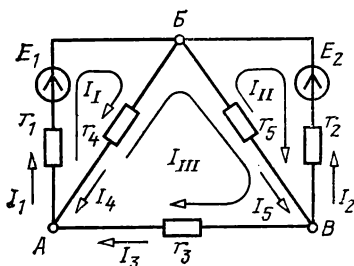
После подстановки в контурные уравнения численных значений и их совместного решения с узловыми уравнениями определяются токи:  $I_1 = 1$  А,  $I_2 = 4$  А,  $I_3 = 2$  А,  $I_4 = -1$  А,  $I_5 = 2$  А.

Для контура АВГ *нельзя* составить контурное уравнение, так как ветвь с идеальным источником тока имеет бесконечно большое сопротивление (см. § 2.7).

## 2.12. МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Метод контурных токов требует совместного решения меньшего числа независимых уравнений по сравнению с методом узловых и контурных уравнений (применением двух законов Кирхгофа, § 2.11), что сокращает расчеты. Он основан на применении второго закона Кирхгофа.

Рис. 2.24. К расчету цепи методом контурных токов



Для расчета токов в заданной цепи (рис. 2.24) выберем контуры, как и при записи уравнений по второму закону Кирхгофа. На рис. 2.24 выбраны элементарные контуры (ячейки) и для каждого из них произвольно выбрано положительное направление тока, замыкающегося в этом контуре, — контурного тока.

Для каждого контура составим уравнение по второму закону Кирхгофа, причем направление обхода контура принимаем совпадающим с направлением контурного тока. Если цепь можно представить разбитой на ячейки (нет

пересекающихся проводов), то число независимых уравнений по второму закону Кирхгофа как раз равно числу ячеек. После решения этих уравнений определяются все контурные токи.

Контурные обозначим римскими цифрами (рис. 2.24), а каждый контурный ток отметим индексом, соответствующим своему контуру. Токи в ветвях отмечены индексами своих ветвей (арабскими цифрами). Токи в ветвях, которые являются общими для двух контуров, определяются как алгебраические суммы соответствующих контурных токов, например  $I_4 = I_I - I_{III}$ . В остальных ветвях токи равны контурным, например,  $I_3 = I_{III}$ .

Алгебраическую сумму ЭДС в контуре называют контурной ЭДС. Со знаком плюс записываются ЭДС, действующие в направлении контурного тока, со знаком минус — направленные встречно.

Рассмотрим применение этого метода для цепи (рис. 2.24), которая имеет три контура — ячейки, для которых можно составить независимые уравнения по второму закону Кирхгофа: контур из 1-й и 4-й ветвей с контурным током  $I_I$  и контурной ЭДС  $E_I = E_1$ , контур из 2-й и 5-й ветвей с контурным током  $I_{II}$  и ЭДС  $E_{II} = -E_2$ , контур из 4-й, 5-й и 3-й ветвей с контурным током  $I_{III}$  и ЭДС  $E_{III} = 0$ .

Выбрав и показав на схеме положительные направления контурных токов, составим для каждого контура уравнение по второму закону Кирхгофа. Для первого контура

$$E_I = E_1 = (r_1 + r_4) I_I - r_4 I_{III}, \quad (2.43)$$

так как контурный ток  $I_I$  проходит по обоим сопротивлениям контура, а на сопротивлении  $r_4$  есть падение напряжения от тока  $I_{III}$ , который направлен навстречу обходу контура. Поэтому второе слагаемое записано со знаком «—».

Для второго контура

$$E_{II} = -E_2 = (r_2 + r_5) I_{II} - r_5 I_{III} \quad (2.44)$$

и для третьего контура

$$E_{III} = 0 = (r_3 + r_4 + r_5) I_{III} - r_4 I_I - r_5 I_{II}. \quad (2.45)$$

Сумма сопротивлений ветвей, входящих в контур, называется собственным сопротивлением контура. Например, собственные сопротивления контуров I и III:  $r_I = r_1 + r_4$ ;  $r_{III} = r_3 + r_4 + r_5$ . Сопротивление ветви, входящей в два контура, называется общим сопро-

тивлением этих контуров. Например, для контуров I и III общее сопротивление  $r_{I\text{ III}} = r_4$ .

Таким образом, контурное уравнение содержит произведение тока в контуре на все сопротивления контура и произведения токов других контуров на общие сопротивления.

Подставив в записанные уравнения численные значения сопротивлений и ЭДС и решив их совместно, найдем контурные токи  $I_I, I_{II}, I_{III}$ . Токи в ветвях цепи:  $I_1 = I_I, I_2 = -I_{II}, I_3 = I_{III}, I_4 = I_I - I_{III}, I_5 = I_{III} - I_{II}$ .

Для цепи рис. 2.23 нужно составить контурные уравнения *только* для контуров I и II, так как ток  $I_{III} = -I_K$ , а ток источника тока, как и другие параметры цепи (сопротивления, ЭДС), считаются заданными.

**Пример 2.8.** Методом контурных токов определить токи в цепи примера 2.7.

**Решение.** Для 1-го контура

$$E_1 = (r_1 + r_2 + r_3) I_I - r_3 I_{II} - r_2 I_{III}.$$

Для 2-го контура

$$E_5 = (r_3 + r_4 + r_5) I_{II} - r_3 I_I - r_5 I_{III}.$$

После подстановки численных значений получаем два уравнения с двумя неизвестными контурными токами:

$$50 = (10 + 5 + 10) I_I - 10 I_{II} - 5 \cdot 3;$$

$$20 = (10 + 20 + 10) I_{II} - 10 I_I - 10 \cdot 3.$$

Отметим, что по сравнению с расчетом, основанном на применении законов Кирхгофа, число решаемых уравнений сократилось с 5 до 2.

Подставив ток  $I_{II}$  из 2-го уравнения в 1-е, получим одно уравнение с одним неизвестным током  $I_I$ , для которого получается численное значение 1 А. Далее значение тока  $I_{II} = -1$  А получим из любого из двух уравнений.

Токи в ветвях:

$$I_2 = I_I - I_{III} = I_I + I_K = 1 + 3 = 4 \text{ А};$$

$$I_3 = I_I - I_{II} = 1 - (-1) = 2 \text{ А}, \quad I_4 = I_{II} = -1 \text{ А};$$

$$I_5 = I_{II} - I_{III} = I_{II} + I_K = -1 + 3 = 2 \text{ А}.$$

Получены, конечно, те же значения токов в ветвях, что и в примере 2.7.

## 2.13. МЕТОД УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ (НАПРЯЖЕНИЙ)

Метод узловых потенциалов, как и метод контурных токов, требует совместного решения меньшего числа независимых уравнений по сравнению с методом узловых и контурных уравнений (применением двух законов Кирхгофа), что сокращает расчеты. Он основан на применении первого закона Кирхгофа.

Для расчета токов методом узловых потенциалов, кроме первого закона Кирхгофа, применяется обобщенный закон Ома. Рассмотрим его применение для отдельных ветвей, представленных на рис. 2.25, а и б. Сопротивления  $r_1$

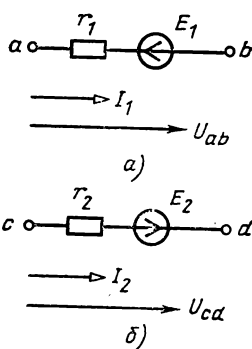


Рис. 2.25. К обобщенному закону Ома

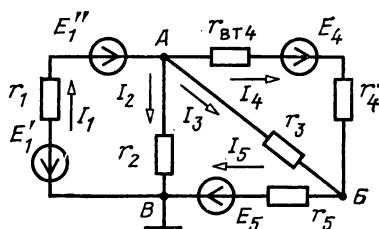


Рис. 2.26. Схема к примеру 2.9

и  $r_2$  — это суммарные сопротивления элементов каждой из ветвей. ЭДС в общем случае могут быть суммами ЭДС в каждой из ветвей. Для токов указаны выбранные положительные направления.

По тем же правилам, что и в § 1.14, запишем потенциалы точек а и с:

$$\varphi_a = \varphi_b + E_1 + r_1 I_1; \quad \varphi_c = \varphi_d - E_2 + r_2 I_2$$

и определим токи через разности потенциалов:

$$I_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_b - E_1}{r_1} = \frac{U_{ab} - E_1}{r_1}; \quad (2.46a)$$

$$I_2 = \frac{\varphi_c - \varphi_d + E_2}{r_2} = \frac{U_{cd} + E_2}{r_2}. \quad (2.46b)$$

Эти зависимости токов от напряжения между выводами ветви и ее параметрами и называются обобщенным законом Ома. Потенциал вывода, от которого ток от-

текает, входит в (2.46) со знаком «+», а потенциал вывода, к которому ток притекает, — со знаком «—». Со знаком «+» записывается ЭДС, направление которой совпадает с положительным направлением тока ( $E_2$ ), и со знаком «—» направленная навстречу ( $E_1$ ).

Расчет токов методом узловых потенциалов рассмотрим на примере цепи рис. 2.24 с тремя узлами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Для двух узлов можно составить независимую систему уравнений по первому закону Кирхгофа. Например, для узлов  $A$  и  $B$

$$I_1 - I_4 - I_3 = 0; \quad -I_1 + I_4 + I_5 - I_2 = 0. \quad (2.47)$$

Токи  $I_1$  и  $I_2$  запишем по обобщенному закону Ома (2.46):

$$I_1 = \frac{\varphi_A - \varphi_B + E_1}{r_1}; \quad I_2 = \frac{\varphi_B - \varphi_C + E_2}{r_2},$$

а остальные токи по закону Ома:

$$I_3 = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{r_3}; \quad I_4 = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{r_4}; \quad I_5 = \frac{\varphi_B - \varphi_C}{r_5}.$$

Как указывалось (§ 1.14), потенциал одной из точек цепи можно принять равным нулю. Выберем, например, равным нулю потенциал узла  $C$  и подставим выражения для токов в уравнения (2.47). Для узла  $A$

$$\frac{\varphi_A - \varphi_B + E_1}{r_1} - \frac{\varphi_B - \varphi_A}{r_4} - \frac{-\varphi_A}{r_3} = 0.$$

Для узла  $B$

$$-\frac{\varphi_A - \varphi_B + E_1}{r_1} + \frac{\varphi_B - \varphi_A}{r_4} + \frac{\varphi_B}{r_5} - \frac{-\varphi_B + E_2}{r_2} = 0.$$

Заменим сопротивления ветвей проводимостями  $g = 1/r$  и перенесем слагаемые с ЭДС в правую часть уравнений. Получим для узла  $A$

$$(g_1 + g_4 + g_3)\varphi_A - (g_1 + g_4)\varphi_B = -g_1 E_1 \quad (2.48a)$$

и для узла  $B$

$$-(g_1 + g_4)\varphi_A + (g_1 + g_4 + g_5 + g_2)\varphi_B = g_2 E_2. \quad (2.48б)$$

Из полученной системы уравнений после совместного решения определяются неизвестные величины, а именно потенциалы узлов  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$ .

Сумма проводимостей ветвей, присоединенных к узлу, называется собственной узловой проводи-



мостью, например  $g_A = g_1 + g_4 + g_3$ , так как к узлу  $A$  присоединены 1-я, 4-я и 3-я ветви. Сумма проводимостей ветвей, соединяющих два узла, называется общей узловой проводимостью, например,  $g_{AB} = g_1 + g_4$ .

Метод узловых напряжений (§ 2.9) является частным случаем метода узловых потенциалов для цепи с двумя узлами.

Систему уравнений (2.48) можно составить и сразу, учитывая, что в (2.48) собственная проводимость входит со знаком «+», а перед общей проводимостью стоит знак «—». В правой части в общем случае записываются алгебраические суммы произведений  $gE$ : со знаком «+» для ЭДС, направленных к узлу, для которого составляется уравнение, и со знаком «—» для ЭДС, направленных от узла. Таким образом, в общем случае (цепь с числом узлов более трех), например, для узла  $A$

$$g_A \varphi_A - g_{AB} \varphi_B - g_{AC} \varphi_C - \dots = \sum_A gE. \quad (2.49)$$

Таким образом, уравнение для данного узла содержит произведение потенциала узла на сумму проводимостей всех ветвей, присоединенных к этому узлу, и произведения потенциалов других узлов на общие проводимости.

Если схема электрической цепи содержит источник тока, подключенный к узлу  $A$ , то в правой части (2.49) дополнительно записывается ток  $I_k$  со знаком «+», если он направлен к узлу, и со знаком «—» в противном случае.

Аналогично (2.49) надо составить уравнения для всех других узлов, кроме одного, потенциал которого принят равным нулю.

Из сравнения методов узловых и контурных уравнений, контурных токов и узловых потенциалов следует, что для определения токов в цепи первый метод требует совместного решения большего числа уравнений (равного числу ветвей с неизвестными токами). Методом контурных токов составляется и решается совместно только число уравнений, равное числу контурных уравнений, а методом узловых потенциалов — число уравнений, равное числу узловых уравнений.

**Пример 2.9.** Методом узловых потенциалов определить токи в цепи рис. 2.26 с параметрами  $r_1 = 2$  Ом,  $r_2 = 10$  Ом,  $r_3 = r_5 = 4$  Ом,  $r_{B74} = 1$  Ом,  $r_4 = 3$  Ом,  $E'_1 = 2$  В,  $E''_1 = 20$  В,  $E_4 = 4$  В,  $E_5 = 6$  В. На рис. 2.26 показано, что заземлена точка  $B$ , т. е. принято  $\varphi_B = 0$ .

**Решение.** Для цепи с тремя узлами нужно составить два узловых уравнения (по первому закону Кирхгофа), например для узлов *A* и *B*.

Выберем положительные направления токов, показанные на рис. 2.26. Для узла *A*

$$-I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

Для узла *B*

$$-I_4 - I_3 + I_5 = 0.$$

Каждый из токов запишем по обобщенному закону Ома (2.46) или по закону Ома:

$$I_1 = \frac{0 - \varphi_A - E_1' + E_1''}{r_1} = \frac{-\varphi_A - 2 + 20}{2} = -0,5\varphi_A + 0,5 \cdot 18;$$

$$I_2 = \frac{\varphi_A}{r_2} = \varphi_A / 10 = 0,1\varphi_A; \quad I_3 = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{r_3} = \\ = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{4} = 0,25\varphi_A - 0,25\varphi_B;$$

$$I_4 = \frac{\varphi_A - \varphi_B + E_4}{r_{BT4} + r_4} = \frac{\varphi_A - \varphi_B + 4}{1 + 3} = 0,25\varphi_A - 0,25\varphi_B + 0,25 \cdot 4;$$

$$I_5 = \frac{\varphi_B + E_5}{r_5} = \frac{\varphi_B + 6}{4} = 0,25\varphi_B + 0,25 \cdot 6.$$

Подставим эти значения токов в узловые уравнения:

$$0,5\varphi_A - 0,5 \cdot 18 + 0,1\varphi_A + 0,25\varphi_A - 0,25\varphi_B + 0,25\varphi_A - \\ - 0,25\varphi_B + 0,25 \cdot 4 = 0; \\ -0,25\varphi_A + 0,25\varphi_B - 0,25 \cdot 4 - 0,25\varphi_A + 0,25\varphi_B + 0,25\varphi_B + \\ + 0,25 \cdot 6 = 0$$

или

$$1,1\varphi_A - 0,5\varphi_B = 9 - 1; \\ -0,5\varphi_A + 0,75\varphi_B = 1 - 1,5.$$

Из полученных двух уравнений находим неизвестные потенциалы:

$$\varphi_A = 10 \text{ В}, \quad \varphi_B = 6 \text{ В}.$$

Последнюю систему уравнений можно составить сразу по типу (2.29). Например в 1-м уравнении

$g_A = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = 0,5 + 0,1 + 0,25 + 0,25 \text{ См}$  — это сумма проводимостей ветвей, присоединенных к узлу *A*,

$g_{AB} = g_3 + g_4 = 0,25 + 0,25 \text{ См}$  — сумма проводимостей ветвей, соединяющих узлы  $A$  и  $B$ ;

$\sum_A gE = g_1 E_1 - g_4 E_4 = 0,5 \cdot 18 - 0,25 \cdot 4 \text{ А}$  — правая часть уравнения.

Аналогично для узла  $B$  проводимость

$$g_B = g_3 + g_4 + g_5 = 0,25 + 0,25 + 0,25 \text{ См};$$

$$\sum_B gE = g_4 E_4 - g_5 E_5 = 0,25 \cdot 4 - 0,25 \cdot 6 \text{ А}.$$

Для цепей с большим числом контуров и узлов необходимо решать совместно систему многих уравнений. Поэтому следует проводить расчеты на ЭВМ.

## 2.14. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА

Для определения тока в какой-либо одной ветви сложной цепи целесообразно применять метод эквивалентного генератора.

Для расчета тока в одной ветви заданную цепь разбивают на две части: участок цепи или ветвь с сопротивле-

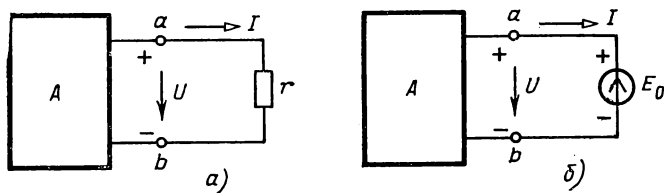


Рис. 2.27. Активный двухполюсник с выделенным участком (а), замена сопротивления участка источником ЭДС (б)

нием  $r$ , ток  $I$  в которой надо определить, и остальную часть цепи, состоящую из ветвей с источниками питания и без источников, соединенных по любой схеме. Эта вторая часть цепи имеет *два вывода*, которыми присоединена ветвь или участок с неизвестным током  $I$ . Поэтому вторую часть цепи можно считать активным двухполюсником (содержит источники питания), обозначение которого было дано на рис. 2.15. На рис. 2.27, а показано, что к активному двухполюснику присоединен участок цепи с сопротивлением  $r$ .

Заменим сопротивление  $r$  идеальным источником ЭДС

$E_0 = rI = U = U_{ab}$  (рис. 2.27, б). Такая замена называется принципом компенсации. После замены ток  $I$  останется таким же, как был в цепи по рис. 2.27, а, так как разность потенциалов  $\varphi_a - \varphi_b = U_{ab} = U$  не изменилась и источник ЭДС работает в режиме потребителя (заряжаемый аккумулятор, электрическая машина в режиме двигателя).

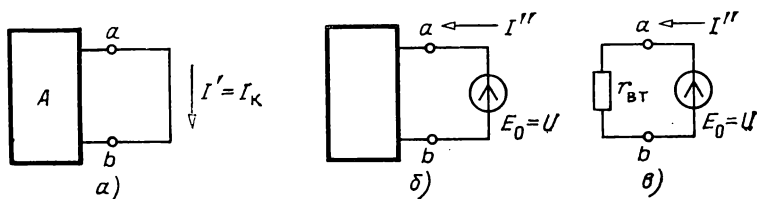
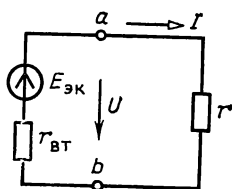


Рис. 2.28. Применение метода наложения к расчету режима активного двухполюсника

Неизвестный ток  $I$  в цепи по рис. 2.27, б рассчитаем методом наложения. Сначала определим ток  $I$  от всех источников, находящихся в активном двухполюснике (рис. 2.28, а). Ток  $I'$  равен току короткого замыкания активного двухполюсника, так как источник ЭДС  $E_0$  не действует, а внутреннее сопротивление этого источника (идеальный) равно нулю.

Рис. 2.29. Схема замещения активного двухполюсника



Далее определим ток  $I''$  при действии только источника ЭДС  $E_0$  (рис. 2.28, б). Источники активного двухполюсника не действуют. Поэтому активный двухполюсник замещается пассивным (см. рис. 2.3, а), который, в свою очередь, можно заменить его внутренним (входным) сопротивлением (рис. 2.28, в). Как следует из схемы рис. 2.28, в, ток  $I'' = E_0 / r_{вт} = U / r_{вт}$ .

По методу наложения для активного двухполюсника (рис. 2.27, а)  $I = I' - I'' = I_K - U / r_{вт}$ , откуда  $U = r_{вт} I_K - r_{вт} I$ .

В частности, в режиме короткого замыкания ток  $I=I_k$  и получается, как и должно быть;  $U=0$ , а в режиме холостого хода  $I=0$  и напряжение  $U_x=r_{вт}I_k$ , т. е. такое же, как у источника с ЭДС  $E_{эк}=U_x$  и внутренним сопротивлением  $r_{вт}$  (рис. 2.29), для которого справедливо уравнение  $U=E_{эк}-r_{вт}I$ . Следовательно, при расчете тока  $I$  участка цепи с сопротивлением  $r$  активный двухполюсник можно представить источником ЭДС (рис. 2.29). По схеме рис. 2.29 сразу определяется искомый ток

$$I = \frac{E_{эк}}{r + r_{вт}} = \frac{U_x}{r + r_{вх}}. \quad (2.50)$$

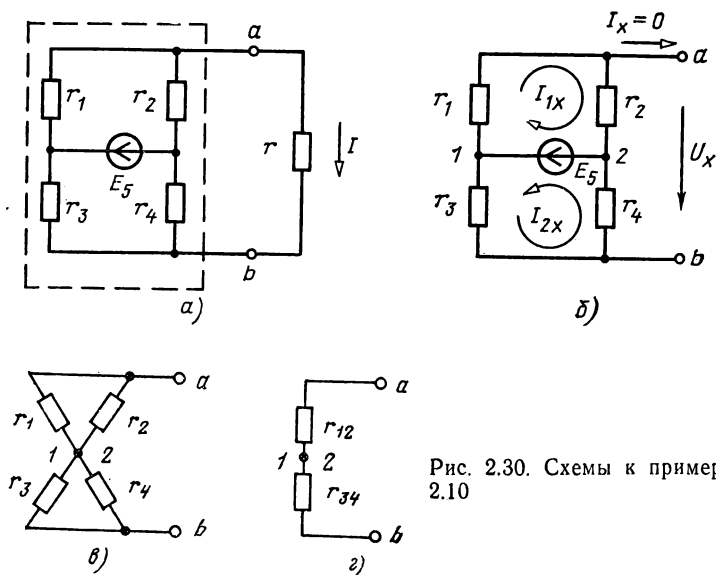


Рис. 2.30. Схемы к примеру 2.10

Чтобы вычислить ток по (2.50), надо предварительно найти напряжение холостого хода активного двухполюсника и определить внутреннее (входное) сопротивление соответствующего пассивного двухполюсника, который отличается от активного только тем, что все источники внутри двухполюсника не действуют.

**Пример 2.10.** Определить ток в ветви с сопротивлением  $r=8$  Ом (рис. 2.30, а), если сопротивление  $r_1=20$  Ом,  $r_2=5$  Ом,  $r_3=10$  Ом,  $r_4=40$  Ом и ЭДС  $E_5=25$  В.

**Решение.** Определим напряжение холостого хода активного двухполюсника (на рис. 2.30 внутри штриховой линии), отключив ветвь с сопротивлением  $r$  (рис. 2.30, б).

На схеме рис. 2.30, б через сопротивления  $r_1$  и  $r_2$  идет один и тот же ток:

$$I_{1x} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{r_1 + r_2} = \frac{E_5}{r_1 + r_2} = \frac{25}{20 + 5} = 1 \text{ А.}$$

Аналогично

$$I_{2x} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{r_3 + r_4} = \frac{E_5}{r_3 + r_4} = \frac{25}{10 + 40} = 0,5 \text{ А.}$$

Потенциалы точек

$$\Phi_{2x} = \Phi_{bx} - r_4 I_{2x}; \quad \Phi_{ax} = \Phi_{2x} + r_2 I_{1x} = \Phi_{bx} - r_4 I_{2x} + r_2 I_{1x},$$

откуда разность потенциалов выводов  $a$  и  $b$ , т. е. напряжение холостого хода,

$$U_x = \Phi_{ax} - \Phi_{bx} = -r_4 I_{2x} + r_2 I_{1x} = -40 \cdot 0,5 + 5 \cdot 1 = -15 \text{ В.}$$

При определении внутреннего сопротивления двухполюсника считаем, что ЭДС  $E_5$  не действует, а внутреннее сопротивление этого источника равно нулю. Поэтому пассивный двухполюсник получится из активного после соединения узлов 1 и 2 (рис. 2.30, в).

Сопротивления  $r_1$  и  $r_2$  соединены параллельно. Их общее сопротивление

$$r_{12} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{20 \cdot 5}{20 + 5} = 4 \text{ Ом.}$$

Аналогично для сопротивлений  $r_3$  и  $r_4$

$$r_{34} = \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} = \frac{10 \cdot 40}{10 + 40} = 8 \text{ Ом.}$$

Эквивалентная схема с сопротивлениями  $r_{12}$  и  $r_{34}$  показана на рис. 2.30, г. Внутреннее или входное сопротивление пассивного двухполюсника

$$r_{вт} = r_{12} + r_{34} = 4 + 8 = 12 \text{ Ом.}$$

Ток в ветви с сопротивлением  $r$

$$I = \frac{U_x}{r + r_{вт}} = \frac{-15}{8 + 12} = -0,75 \text{ А.}$$

Напряжение холостого хода и ток короткого замыкания активного двухполюсника можно определить опытным путем. Вольтметр на рис. 2.31, а измеряет напряжение на выводах  $a$  и  $b$  при отключенной ветви с сопротивлением  $r$ , т. е. напряжение  $U_x$  (сопротивление вольтметра считается

очень большим по сравнению с  $r$ ) Амперметр на рис. 2.31, б измеряет ток короткого замыкания  $I_k$  (сопротивление амперметра считается очень малым по сравнению с  $r$ ). Внутреннее сопротивление  $r_{вт} = U_x / I_k$ .

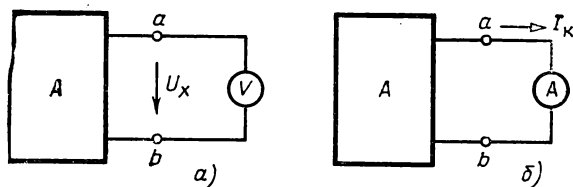


Рис. 2.31. Измерение параметров активного двухполюсника

## 2.15. ИЗМЕРЕНИЕ ТОКОВ, НАПРЯЖЕНИЙ И СОПРОТИВЛЕНИЙ

Приборы, предназначенные для измерения тока меньше 1 мкА, называются гальванометрами, а для измерения больших токов — микроамперметрами, миллиамперметрами, амперметрами или килоамперметрами в зависимости от значений измеряемых ими токов.

Главной частью любого прибора для измерения тока является измерительный механизм, или, короче, измеритель *И*. Ток, проходя по измерителю, вследствие теплового или электромагнитного действия вызывает поворот подвижной части измерителя. Это дает возможность на шкале прибора нанести значения тока, соответствующие различным углам поворота подвижной части (указательной стрелки), и проградуировать прибор.

Для устройства измерительного механизма иногда используют тепловое действие тока. Главной частью теплового измерителя является обладающая большим коэффициентом линейного удлинения тонкая платиноиридиевая проволока, натянутая между двумя выводами. Проходящий по ним измеряемый ток вызывает ее нагревание и удлинение. Удлинение проволоки преобразуется во вращательное движение указательной стрелки. Таким образом, каждому значению тока соответствует определенный угол поворота стрелки. Номинальный ток измерителя не превышает 0,5 А. Для измерения больших токов применяют шунт. Шунт выполнен из манганина с постоянным со-

противлением  $r_{ш}$ , параллельно ему присоединяют измеритель  $I$  с сопротивлением  $r_{и}$  (рис. 2.32).

Измеряемый ток  $I$  делится на две части: ток измерителя  $I_{и}$  и ток шунта. Ток измерителя согласно (2.12)

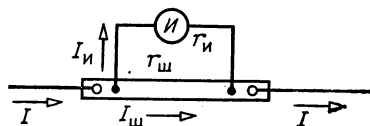
$$I_{и} = I \frac{r_{ш}}{r_{и} + r_{ш}},$$

откуда измеряемый ток

$$I = \frac{r_{и} + r_{ш}}{r_{ш}} I_{и} = p I_{и}. \quad (2.51)$$

При постоянных сопротивлениях ветвей между измеряемым током  $I$  и током измерителя  $I_{и}$  будет постоянное

Рис. 2.32. Схема соединения измерителя и шунта



отношение  $p$ . Таким образом, по углу поворота измерителя можно определить измеряемый ток.

Из (2.51) следует, что шунтирующий множитель

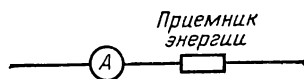
$$p = 1 + r_{и}/r_{ш}, \quad (2.52)$$

и сопротивление шунта

$$r_{ш} = r_{и}/(p - 1). \quad (2.53)$$

Амперметр показывает значение тока, который идет через него. Поэтому для измерения тока в каком-либо приемнике, генераторе или участке цепи амперметр надо включать последовательно (рис. 2.33). Включение амперметра

Рис. 2.33. Схема включения амперметра



не должно влиять на режим работы цепи, следовательно, сопротивление его должно быть малым по сравнению с сопротивлением приемника, генератора или участка цепи. В этом случае будет мала и мощность потерь в амперметре.



\* \* \*

Приборы для измерения напряжения называются милливольтметрами, вольтметрами или киловольтметрами в зависимости от значений их номинальных напряжений.

Измерительный механизм вольтметра может быть таким же, как и у амперметра, но номинальный ток его мал (не превышает 50—100 мА). Угол поворота подвижной части вольтметра зависит от тока в его измерителе, а при по-



Рис. 2.34. Схема присоединения вольтметра

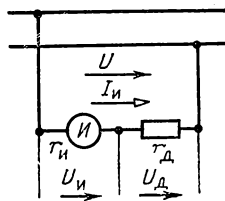


Рис. 2.35. Схема соединения измерителя и добавочного сопротивления

стоянном сопротивлении вольтметра и от напряжения на выводах вольтметра. На шкале вольтметра наносятся деления, соответствующие напряжению, приложенному к его выводам. Поэтому для измерения напряжения между какими-либо двумя точками цепи эти точки должны быть соединены с выводами вольтметра, а сопротивление вольтметра должно быть много больше сопротивления цепи между точками, к которым подключается вольтметр (рис. 2.34), чтобы присоединение вольтметра не изменило режим работы цепи. Большое сопротивление вольтметра обеспечивается добавочным сопротивлением  $r_d$  из манганина, которое соединяется последовательно с измерителем (рис. 2.35).

Отношение, показывающее, во сколько раз напряжение на выводах вольтметра  $U = (r_i + r_d)I_i$  больше напряжения на измерителе  $U_i = r_i I_i$ , называется множителем добавочного сопротивления  $p$ . Таким образом, множитель

$$p = \frac{U}{U_i} = \frac{r_i + r_d}{r_i} = 1 + \frac{r_d}{r_i}, \quad (2.54)$$

откуда определяется добавочное сопротивление

$$r_d = r_{\text{и}}(p - 1). \quad (2.55)$$

Переносные вольтметры часто имеют несколько номинальных напряжений, например 3—25—150 В. Это достигается включением различных добавочных сопротивлений.

Для измерения постоянных токов и постоянных напряжений применяются преимущественно измерители магнитоэлектрической системы (§ 5.10).

\* \* \*

Одним из распространенных методов измерения сопротивлений является метод амперметра и вольтметра.

Измерив ток амперметром и напряжение вольтметром (рис. 2.36), сопротивление рассчитаем по формуле закона Ома:

$$r'_x = U/I.$$

Найденное значение  $r'_x$  больше действительного измеряемого сопротивления  $r_x$ , так как вольтметр, включенный

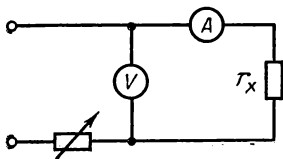


Рис. 2.36. Схема измерения относительно больших сопротивлений

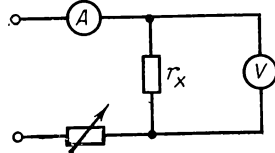


Рис. 2.37. Схема измерения относительно малых сопротивлений

по схеме рис. 2.36, измеряет сумму напряжений на измеряемом сопротивлении  $r_x I$  и на амперметре  $r_A I$ . Действительное значение сопротивления

$$r_x = U/I - r_A. \quad (2.56)$$

Если измеряемое сопротивление  $r_x$  велико по сравнению с сопротивлением амперметра, то последним можно пренебречь и  $r'_x$  считать за действительное  $r_x$ .

При измерении по схеме рис. 2.37 сопротивление, найденное по формуле

$$r_x'' = U/I,$$

будет меньше действительного, так как амперметр измеряет сумму токов в измеряемом сопротивлении  $I$  и в вольтметре  $I_B$ . Поэтому действительное сопротивление

$$r_x = U/(I - I_B). \quad (2.57)$$

Если сопротивление вольтметра велико по сравнению с измеряемым сопротивлением, то током вольтметра можно пренебречь и найденное значение  $r_x''$  принять за действительное  $r_x$ .

Кроме рассмотренного метода амперметра и вольтметра часто для измерения сопротивлений применяют измерительный мост.

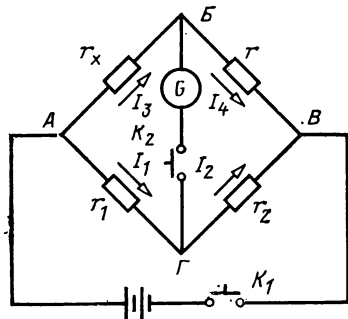


Рис. 2.38. Мост для измерения сопротивлений

Три измерительных резистора с сопротивлениями  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r$  и одно измеряемое сопротивление  $r_x$  образуют замкнутый контур АБВГА (рис. 2.38). В одну диагональ контура включен источник питания (например, химический), в другую (БГ) — гальванометр  $G$ . При замкнутых ключах  $K_1$  и  $K_2$  в четырех плечах моста проходят токи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ .

Изменяя сопротивления плеч моста  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r$ , можно добиться равенства потенциалов  $\varphi_B$  и  $\varphi_\Gamma$ . При этом ток в гальванометре равен нулю, следовательно,  $I_1 = I_2$ ,  $I_3 = I_4$ , равны и разности потенциалов  $\varphi_A - \varphi_\Gamma = \varphi_A - \varphi_\Gamma$ , а также  $\varphi_B - \varphi_\Gamma = \varphi_B - \varphi_\Gamma$ .

Разности потенциалов можно выразить через падения напряжения на соответствующих плечах моста, т. е.

$$r_x I_3 = r_1 I_1 \text{ и } r I_4 = r_2 I_2. \quad (2.58)$$

Разделив почленно уравнения (2.58) и сократив соответствующие равные токи, получим

$$r_x/r = r_1/r_2 \text{ или } r_x r_2 = r r_1,$$

откуда определяется измеряемое сопротивление

$$r_x = rr_1/r_2. \quad (2.59)$$

Этот метод измерения сопротивлений дает более точные результаты, чем метод амперметра и вольтметра.

## Глава третья

### НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

#### 3.1. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Элемент электрической цепи, сопротивление которого зависит от тока в нем или от напряжения на его выводах, называется нелинейным элементом. Наоборот, если сопротивление элемента постоянно, то элемент называется линейным.

Строго говоря, линейных элементов нет, так как при различных токах в проводнике развивается различная тепловая мощность и изменяется температура, а следовательно, и сопротивление. Таким образом, любой элемент цепи теоретически нелинеен, однако если нелинейность невелика и ею можно пренебречь, то элемент практически можно считать линейным.

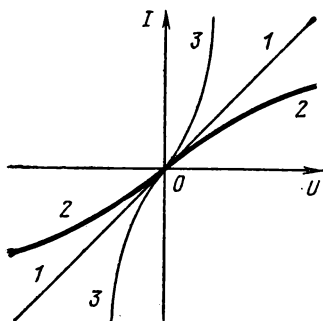


Рис. 3.1. Вольт-амперные характеристики

Электрическая цепь называется линейной, если она содержит только линейные элементы, и нелинейной при наличии одного или нескольких нелинейных элементов.

Вольт-амперные характеристики нелинейных элементов делятся на симметричные и несимметричные относительно начала координат. У линейного пассивного элемента зависимость напряжения от тока  $U(I)$  или зависимость тока от напряжения  $I(U)$ , т. е. вольт-амперная характеристика, симметричная и представляет собой прямую, проходящую через начало координат (прямая 1 на рис. 3.1). Для нелинейного элемента она непрямолинейна. Например,

вольт-амперная характеристика лампы с металлической нитью, имеющей положительный температурный коэффициент, симметричная и отличается от прямой, отклоняясь вниз (кривая 2 на рис. 3.1), а у лампы с угольной нитью, имеющей отрицательный температурный коэффициент, симметричная и отклоняется от прямой вверх (кривая 3 на рис. 3.1). Если вольт-амперная характеристика симметричная, то при изменении полярности напряжения изменится только направление тока на обратное. Несимметричные вольт-амперные характеристики имеют, например, полупроводниковые элементы (см. § 3.4 и рис. 3.17, в).

Другими примерами нелинейных элементов могут служить электронные лампы и газоразрядные приборы, терморезисторы, полупроводниковые вентили, стабилитроны, транзисторы.

### 3.2. ЭЛЕКТРОВАКУУМНЫЕ ПРИБОРЫ

Под вакуумным промежутком понимают рабочее пространство электровакуумного прибора. Электровакуумным прибором называют прибор, принцип действия которого связан с использованием электрических явлений в его рабочем пространстве, причем рабочий промежуток изолирован газонепроницаемой оболочкой от окружающей среды и в нем создан вакуум.

Под вакуумом понимается газ, в частности воздух, имеющий такую высокую степень разрежения [давления около  $10^{-5}$ — $10^{-4}$  Па], при которой движение электронов происходит практически без соударений с оставшимися молекулами газа. Вакуум является непроводящей средой, так как в нем почти отсутствуют частицы вещества и, следовательно, невозможна ионизация, т. е. расщепление частиц газа на обеспечивающие электропроводность ионы и электроны.

Для получения в вакууме электрического тока необходим источник заряженных частиц — электронов. Таким источником служит металлический электрод, называемый катодом, при этом используется электронная эмиссия.

Электронной эмиссией называется явление выхода электронов за пределы проводника (твердого или жидкого). Для того чтобы покинуть проводник, электрон должен совершить работу выхода  $A_v$ , определяемую произведением заряда электрона  $q_0$  и потенциала выхода  $\phi$ , т. е.  $A_v = \phi q_0$ . При нормальной температуре кинетическая энергия электронов недостаточна для совершения работы выхода и по-

этому выхода электронов из проводника практически не наблюдается. Для того чтобы электрон покинул электрод, ему необходимо сообщить дополнительную энергию.

Выход электронов, обусловленный исключительно нагревом катода, называется термоэлектронной эмиссией. При нагревании металла скорости электронов и их кинетическая энергия увеличиваются и число электронов, покидающих металл, возрастает. Все электроны, вылетающие из катода в единицу времени, образуют электрический ток эмиссии  $I_e$ . При повышении температуры катода ток эмиссии растет сначала медленно, а затем все быстрее и быстрее. Чем больше работа выхода, тем большая температура необходима для получения определенной эмиссии. Следовательно, материал для катода должен иметь высокую температуру плавления.

По способу нагрева катоды делятся на катоды прямого накала и косвенного, или подогревные.

Простейшая двухэлектродная электронная лампа — диод относится к нелинейным элементам электрической цепи. Диод имеет металлический, керамический или стеклянный баллон, в котором создан вакуум. В баллоне расположены два электрода: анод  $A$  в виде пластины или цилиндра и катод  $K$  (рис. 3.2).

Присоединим к катоду диода батарею накала (или обмотку трансформатора) и установим номинальный ток накала  $I_n$  (рис. 3.2); катод соединим с отрицательным выводом, а анод — с положительным выводом источника питания, т. е. подведем к лампе анодное напряжение  $U_a$ . Электроны, покидающие катод, под действием сил электрического поля между электродами устремляются от катода к аноду, образуя анодный ток  $I_a$ , направление которого противоположно направлению движения электронов. Электроны, покидающие катод, вначале имеют незначительные скорости, но по мере движения к аноду скорости их возрастают. Чем больше электронов покинуло катод, тем сильнее тормозятся последующие электроны, вылетающие из катода, так как они испытывают противодействие со стороны электронов, ранее покинувших катод. Поэтому электроны образуют вблизи катода объемный отрицательный заряд — «электронное облачко». Этот заряд частично рассасывается силами электрического поля между анодом и катодом, но одновременно пополняется электронами, эмиттируемыми катодом. Объемный заряд тормозит вылет электронов из катода и движение их внутри лампы.

Анодный ток зависит от анодного напряжения. При малых значениях этого напряжения ток мал и нарастает медленно, так как мало поле в лампе и объемный отрицательный заряд оказывает относительно большое замедляющее действие. При увеличении анодного напряжения ток и скорость его нарастания увеличиваются вследствие увеличе-

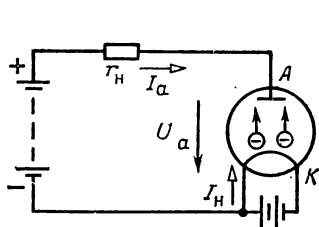


Рис. 3.2. Схема включения диода

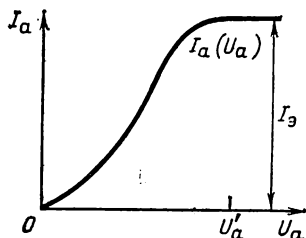


Рис. 3.3. Вольт-амперная характеристика диода

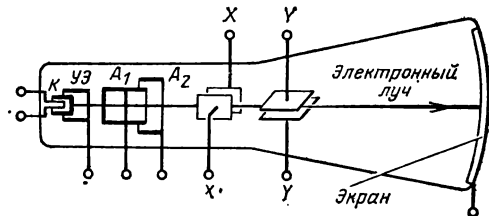
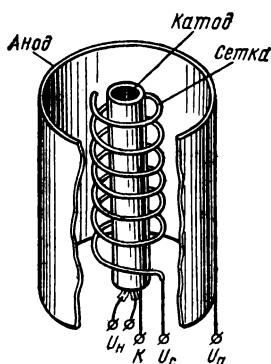


Рис. 3.5. Электронно-лучевая трубка

Рис. 3.4. Устройство триода

ния поля и уменьшения объемного заряда. При некотором значении анодного напряжения  $U'_a$  анодный ток становится равным току эмиссии:

$$I_a = I_{\text{э}},$$

а при дальнейшем увеличении напряжения остается неизменным. Зависимость анодного тока от анодного напряжения  $I_a(U_a)$ , называемая вольт-амперной характеристикой диода, показана на рис. 3.3. Ток эмиссии, а следовательно, и анодный ток можно увеличить, увеличив ток накала и тем самым повысив температуру катода.

Через диод ток может проходить только в одном направлении. Действительно, если катод лампы присоединить к положительному выводу, а анод — к отрицательному, то электроны, покинувшие катод, под действием сил поля возвратятся обратно на катод.

Диоды (имеющие два электрода) являются неуправляемыми приборами.

Трехэлектродная электронная лампа — триод (рис. 3.4) отличается от диода наличием третьего электрода, называемого управляющей сеткой, которая имеет, например, форму спирали, расположенной между катодом и анодом.

Сетка, на которую подается управляющее сеточное напряжение  $U_c$ , предназначена для управления электронным потоком в лампе между катодом и анодом, а следовательно и анодным током.

Электронно-лучевая трубка представляет собой прибор, в котором используется поток электронов в форме луча. Электронно-лучевые трубки широко применяются в различных областях техники: радиолокации, телевидении, измерении быстропеременных величин (осциллографирование), счетно-решающих устройствах и т. д.

Конструкция одного из типов трубки показана на рис. 3.5. Стекланный баллон трубки имеет форму колбы. Торец расширенной части колбы, покрытый с внутренней стороны люминофором, образует экран. На другом конце баллона расположено устройство, предназначенное для формирования электронного луча, называемое электронным прожектором или электронной пушкой. Это устройство состоит из подогревного катода  $K$ , управляющего электрода  $УЭ$  и двух анодов  $A_1$  и  $A_2$  цилиндрической формы. Электрическое поле между катодом и анодами сообщает электронам, покинувшим катод, необходимые скорости и придает потоку электронов форму луча, сходящегося в фокусе на поверхности экрана. В точке падения электронного луча на экран возникает свечение. Изменяя напряжение между управляющим электродом и катодом, можно регулировать количество электронов в луче, т. е. интенсивность (яркость) свечения экрана. Изменением напряжения между одним из анодов и катодом можно более точно фокусировать электронный луч на экране и получить большую резкость светящейся точки.

Электронный луч проходит между двумя парами отклоняющих пластин, к которым при работе трубки прикладываются два напряжения. Электрическое поле пластин  $X$



отклоняет электронный луч в горизонтальной плоскости, после второй пары пластин  $Y$  отклоняет луч в вертикальной плоскости. Отклонение луча на экране в каждый момент времени пропорционально напряжению, приложенному к соответствующей паре пластин.

К пластинам  $X$  часто подводится вспомогательное (пилообразное) напряжение. Это напряжение от нуля увеличивается пропорционально времени, и электронный луч с постоянной скоростью перемещается по экрану от исходной (нулевой) точки слева направо до некоторой крайней точки в правой части экрана, соответствующей максимуму вспомогательного напряжения. Достигнув максимума, это напряжение относительно быстро падает до нуля и электронный луч также быстро перемещается по экрану в об-

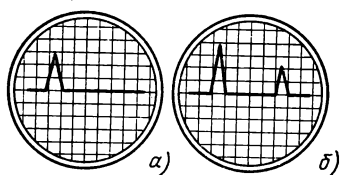


Рис. 3.6. След электронного луча на экране трубки

ратном направлении, достигая нулевой точки экрана к концу цикла повторения пилообразного напряжения. Затем процесс повторяется. В результате многократного перемещения луча по одной и той же траектории на экране (при отсутствии напряжения на пластинах  $Y$ ) видна светлая горизонтальная линия.

Если в какой-нибудь момент времени на пластины  $Y$  будет подан импульс напряжения, то электрическое поле пластин  $Y$  вызовет пропорциональное импульсу отклонение электронного луча в вертикальном направлении. Если импульс будет повторяться с той же частотой, что и пилообразное напряжение, то будет повторяться в одном и том же месте экрана отклонение луча. Вследствие световой инерции экрана на нем будет видна светлая линия с зубцом (рис. 3.6,  $a$ ), вызванным импульсом. Наличие двух зубцов (рис. 3.6,  $b$ ) покажет, что в течение каждого цикла повторения пилообразного напряжения на пластины  $Y$  подаются два импульса и т. д.

Электронно-лучевая трубка — одна из основных частей радиолокатора, который при помощи электромагнитных

волн определяет местонахождение какого-либо объекта. С этой целью в предполагаемом направлении нахождения объекта посылаются импульсы электромагнитных волн. Дойдя до объекта, волны частично отражаются. В момент послышки импульса и в момент получения отраженной волны на пластинах  $Y$  появятся импульсы напряжения, а следовательно, и зубцы на экране трубки. Расстояние между зубцами зависит от расстояния объекта до радиолокатора и может быть определено, так как скорость распространения электромагнитных волн в воздухе известна (300 000 км/с).

Управлять электронным лучом можно при помощи не только электрического, но и магнитного поля. В последнем случае управляющее магнитное поле создается токами, проходящими по катушкам, которые укреплены у поверхности трубки, как, например, у кинескопов в телевизорах.

### 3.3. ГАЗОРАЗРЯДНЫЕ ПРИБОРЫ

а) **Электропроводность газа.** Под газоразрядным промежутком понимают рабочее пространство ионного прибора. Ионным прибором называют прибор, действие которого основано на использовании электрического разряда в газе или парах. В зависимости от вида разряда различают: приборы тлеющего разряда, приборы дугового разряда и т. д.

В обычных условиях газ является изолятором, так как практически не содержит свободных электронов и ионов. Некоторая проводимость газа вызывается его ионизацией радиоактивными веществами земли, атмосферы и космическими лучами; высокая температура и сильное электрическое поле также вызывают ионизацию газа.

Ионизация газа состоит в расщеплении его молекул на электроны и положительные ионы и образовании отрицательных ионов при соединении нейтральных молекул со свободными электронами.

Напряжение  $U$ , которое приложено к двум электродам (рис. 3.7), расположенным в ионизированном газе, вызовет между электродами электрическое поле и перемещение электронов и отрицательных ионов в направлении, противоположном полю, а положительных ионов — в направлении поля. Таким образом, в газовом промежутке будет проходить постоянный электрический ток.

Совокупность явлений, происходящих в газе в связи

с прохождением через него электрического тока, называется электрическим разрядом.

При увеличении напряжения  $U$  (рис. 3.7) вначале ток растет пропорционально напряжению; начальная часть вольт-амперной характеристики прямолинейна (отрезок  $OA$  на рис. 3.8). При дальнейшем увеличении напряжения рост тока замедляется (участок  $AB$ ), а затем совсем прекращается (участок  $BB$ ). Максимальный ток при данной интенсивности ионизации называется током насыщения.

Проводимость газа, для поддержания которой необходимо воздействие на газ внешнего ионизатора, называется

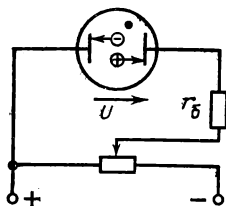
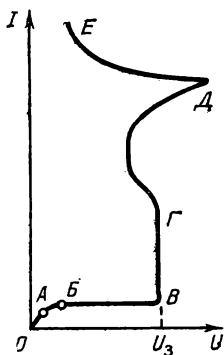


Рис. 3.7. Электрический ток в газе

Рис. 3.8. Вольт-амперная характеристика газового разряда



несамостоятельной проводимостью. Она уменьшается до нуля при прекращении действия ионизатора.

б) **Стадии самостоятельного разряда в газе.** Сильное электрическое поле может вызвать в газовом промежутке самостоятельный разряд. Очевидно, для его поддержания необходимо непрерывное образование свободных заряженных частиц, источником которых является ударная ионизация газа.

При увеличении напряжения  $U$  между электродами (рис. 3.7) до напряжения зажигания  $U_3$  ток резко возрастает (участок  $BΓ$  на рис. 3.8) и газ начнет светиться вследствие ударной ионизации и возбуждения молекул газа. Электрические заряды, всегда содержащиеся в небольшом количестве, ускоряются полем и накапливают кинетическую энергию, достаточную для ионизации нейтральных молекул. Вновь полученные вторичные заряды, в свою очередь, также ионизируют нейтральные молекулы газа; про-

цесс образования ионов развивается лавинообразно. Разрядный промежуток оказывается заполненным ионизированным газом, содержащим примерно одинаковое количество положительных и отрицательных заряженных частиц, — газовой плазмой. Газовая плазма обладает большой проводимостью, которая увеличивается с повышением температуры. Ток в этом случае ограничивается балластным резистором  $r_6$  (рис. 3.7), включенным последовательно с ионным прибором.

При нормальном или пониженном давлении в газах наблюдается несколько различных стадий самостоятельного разряда: темный, тлеющий, искровой и дуговой. Характер разряда зависит от состава газа, его температуры, давления, формы и расположения электродов, расстояния между ними и от напряжения.

в) **Темный (тихий) разряд.** Как показывает само название, этот разряд сопровождается весьма слабым испусканием света и звука. Он представляет собой начальную стадию самостоятельного разряда и характеризуется незначительными плотностями тока около  $10^{-6}$  А/см<sup>2</sup> (участок ВГ вольт-амперной характеристики на рис. 3.8). Ионизация газа происходит вдоль всего междуэлектродного промежутка; электроны перемещаются к аноду, а положительные ионы к катоду. Когда число ионов, падающих на катод, будет достаточным для того, чтобы выбитые ими электроны могли поддерживать разряд без внешнего ионизатора, разряд из несамостоятельного переходит в самостоятельный. У проводников, находящихся под достаточно высоким напряжением, на выступающих и заостренных частях (остриях), а также у проводов малого диаметра напряженность поля имеет наибольшее значение. Если она достигает некоторого критического значения, то в этих местах появится разряд, который сопровождается слабым свечением, называемым короной, и который вызван ионизацией и возбуждением газа.

г) **Тлеющий разряд.** Темный разряд переходит в тлеющий, для которого характерны значительно большие плотности тока (приблизительно  $10^{-3}$  А/см<sup>2</sup>) и большая интенсивность ионизации, в связи с чем вначале уменьшается напряжение на электродах (участок ГД рис. 3.8). Положительные ионы образуют вблизи катода положительный объемный заряд, что связано с увеличением падения напряжения (катодного падения напряжения) на этом участке разрядного промежутка. Увеличение катодного падения

напряжения означает возрастание на этом участке напряженности поля, вызывающей увеличение скоростей электронов и положительных ионов и увеличение интенсивности ионизации. Положительные ионы, бомбардируя катод, вызывают вторичную эмиссию. Нормальный тлеющий разряд характеризуется постоянной плотностью тока.

Тлеющий разряд в газах при низких давлениях (около 100 Па) сопровождается свечением газа у анода — анодное свечение. В длинных трубках анодное свечение занимает значительную часть трубки. Такие трубки, наполненные неоном (красный свет) и аргоном (голубой свет), применяются для рекламного и декоративного освещения.

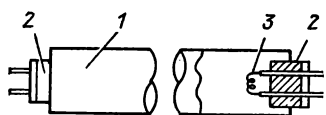


Рис. 3.9. Люминесцентная лампа

Большое распространение получили люминесцентные лампы. Лампа (рис. 3.9) состоит из стеклянной трубки 1 с двумя цоколями 2 и укрепленными в них спиральными электродами 3. Внутренняя поверхность трубки покрыта особым составом — люминофором. В трубке находятся пары ртути при низком давлении. При разряде возникает ультрафиолетовое излучение, под действием которого люминофор светится. Люминофоры в зависимости от их состава дают световой поток разных цветов. Средний срок службы люминесцентных ламп составляет 3000 ч. Они в 2,5—3 раза экономичнее ламп накаливания.

На рис. 3.10, а и б показаны газосветные (неоновые) лампы с тлеющим разрядом, которые применяются в каче-

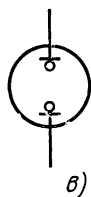
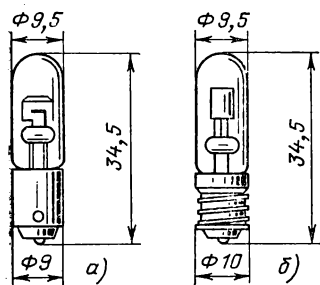


Рис. 3.10. Неоновые лампы:

а — с плоскими электродами; б — с цилиндрическими электродами; в — условное изображение

стве индикатора напряжения. В стеклянном баллоне, заполненном неоном, расположены два металлических электрода, покрытых тонким слоем бария. При напряжении около 70 В возникает тлеющий разряд, сопровождаемый свечением. Мощность лампы составляет доли ватта.

Тлеющий разряд используется также в газотронах, тиратронах, стабилитронах и других приборах.

д) **Искровой разряд (искра).** Если повышать напряжение между двумя электродами, расположенными в воздухе (газе) при нормальном давлении, что при некотором критическом значении напряжения, называемого пробивным  $U_{пр}$ , произойдет искровой разряд. Он имеет вид ярко светящегося соединяющего оба электрода извилистого канала, форма которого зависит от «наиболее легкого пути» ионизации. Лавина электронов и ионов, перемещающихся в канале, вызывает резкое повышение температуры и давления, отчего искровой разряд сопровождается характерным треском. Искровой разряд возникает в том случае, если напряженность поля достигает значения пробивной напряженности (электрической прочности), которая зависит от рода газа, его состава, давления и температуры.

Если мощность источника питания невелика, то появление искры, а следовательно, и большого тока вызывает резкое снижение напряжения между электродами почти до нуля. После прекращения искрового разряда напряжение восстанавливается и наступает новый искровой разряд.

Пробивное напряжение между двумя электродами, например, шаровой формы, при прочих равных условиях зависит от расстояния между ними, от давления и температуры газа. Таким образом, по расстоянию между электродами, при котором происходит искровой разряд, можно определить напряжение. На этом принципе основано устройство шарового вольтметра, применяемого для измерения высоких напряжений.

Наибольших размеров достигает искровой разряд в случае молнии.

Искровой разряд вызывает электроэрозию, т. е. вырывание частиц вещества анода. Это явление используется для электроискровой обработки металлов.

е) **Дуговой разряд (электрическая дуга).** Он может развиваться и существовать как при разреженном газе, так и при нормальном атмосферном давлении. Дуговой разряд получается различными путями: он возникает из тлеющего разряда при повышении напряжения на разрядном проме-

жутке выше некоторого определенного значения; он развивается из искрового при достаточной мощности источника питания; часто дуговой разряд получают сближением угольных электродов до соприкосновения друг с другом, когда сильное нагревание током места соприкосновения углей обеспечивает при их раздвигании образование дуги, излучающей ослепительный свет. Газ ионизируется при этом электронами, эмиттируемыми накалившимся катодом. Наиболее сильно накаляется анод, у которого из-за бомбардировки электронами образуется кратер с температурой до 4000 °С. Газоразрядная плазма между электродами имеет температуру еще более высокую и обладает очень большой проводимостью. Поэтому при относительно большом напряжении (10—40 В) между электродами возникает большой ток с плотностью от 100 А/см<sup>2</sup> и выше.

При увеличении тока температура плазмы возрастает, увеличивается ее проводимость, вследствие этого напряжение на участке дугового разряда уменьшается. Таким образом, электрическая дуга имеет «падающую характеристику» (участок *ДЕ* на рис. 3.8).

Наряду с рассмотренным дуговым разрядом, обусловленным термоэлектронной эмиссией катода, применяется дуговой разряд с электростатической эмиссией, получаемой от ртутного (жидкого) катода, например, в ртутных вентилях. В этом случае дуговой разряд происходит в парах ртути. Основанием дуги является светящееся (катодное) пятно на поверхности ртутного катода, эмиттирующее электроны, которые ионизируют пары ртути над катодом.

Электрическая дуга была открыта в 1802 г. профессором физики Петербургской медицинской академии В. В. Петровым. Она применяется для освещения (прожекторы, проекционные фонари) и нагревания (электропечи, электросварка, резка металлов). Впервые электрическая дуга была применена для освещения в 1876 г. П. Н. Яблочковым, который, расположив параллельно угольные электроды, получил устойчивую дугу (переменного тока) с равномерным износом обоих электродов. Электрическая свеча Яблочкова — «русский свет» — применялась во многих странах мира.

Электрическая дуга служит для резки и сварки металлов. Электрическая сварка — один из прогрессивных технических методов соединения металлов; она широко применяется и все более совершенствуется и автоматизируется.

ж) Газотрон. Газотрон представляет собой ионный при-

бор с металлическим или графитовым анодом  $A$  (рис. 3.11) и вольфрамовым оксидным катодом  $K$ . Стеклоанная колба газотрона заполняется парами ртути или инертным газом при давлении 15—70 Па. Накал катода производится током от независимого источника питания.

При увеличении анодного напряжения до напряжения зажигания  $U_z$  (рис. 3.8) в приборе начнется процесс ионизации газа, образование плазмы и газотрон зажжется. Рабочему режиму газотрона соответствует участок  $ГД$  вольт-амперной характеристики газового разряда.

Увеличение анодного тока вследствие изменения нагрузки почти не влияет на падение напряжения между анодом и катодом. Это падение напряжения невелико, чем газотрон выгодно отличается от вакуумной двухэлектродной лампы.

Газотроны изготовляются на токи до нескольких десятков ампер. Они применяются в качестве выпрямителей переменного тока в постоянный.

з) **Тиратрон** отличается от газотрона наличием третьего электрода — сетки. В противоположность процессу в электронной лампе — триоде сетка тиратрона не влияет на значение тока; при помощи сетки можно только изменять момент зажигания тиратрона.

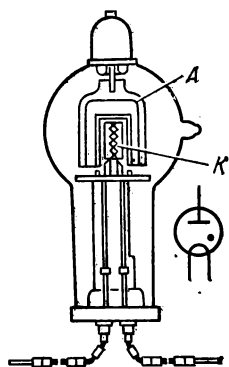


Рис. 3.11. Газотрон и его обозначение на схемах

### 3.4. ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ ДИОДЫ И ТРИОДЫ

а) **Собственная электропроводность полупроводников.** Полупроводниковыми называются материалы, занимающие промежуточное положение между проводниками и изоляторами. Удельное электрическое сопротивление в границах  $10^{-3}$ — $10^{-9}$  Ом·см.

Для полупроводников характерна сильная зависимость проводимости от температуры, электрического поля, освещенности, сжатия и т. д. В отличие от проводников они имеют не только электронную, но и «дырочную» проводимость, кроме того, в них под действием внешних источников тепловой, электрической и лучистой энергии возникают свободные носители зарядов.



В электротехнике наиболее широко применяются германий, кремний, селен и арсенид галлия.

Химическую связь двух соседних атомов, обусловленную образованием общей пары электронов на одной орбите (рис. 3.12, а), называют парноэлектронной или ковалентной. Она условно изображена двумя линиями, соединяющими атомы (рис. 3.12, б). Например, германий принадлежит к элементам четвертой группы периодической системы Менделеева. Следовательно, он имеет на внешней орбите четыре валентных электрона. Каждый атом в кристалле германия образует парноэлектронные связи с четырьмя со-

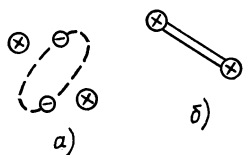
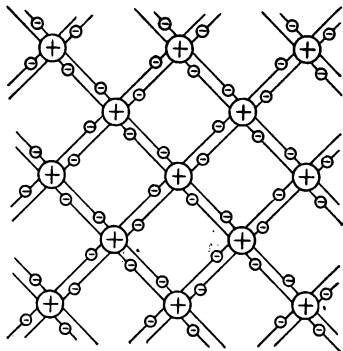


Рис. 3.12. Ковалентная связь атомов

Рис. 3.13. Схема парноэлектронных связей в кристаллической решетке германия



седними атомами (рис. 3.13). В действительности, конечно, решетка не плоская, а пространственная.

При температуре, близкой к абсолютному нулю, и отсутствии примесей все валентные электроны атомов в кристалле германия взаимно связаны, свободных электронов нет; следовательно, кристалл не обладает проводимостью. При повышении температуры или при облучении увеличивается энергия части электронов, что приводит к частичному нарушению ковалентных связей и появлению свободных электронов. Германий уже при комнатной температуре становится полупроводником. Под действием внешнего электрического поля свободные электроны перемещаются, обуславливая электронную проводимость (*n*-проводимость).

В момент образования свободного электрона в ковалентных связях образуется свободное место — «электронная дырка». При наличии дырки какой-либо из электронов соседней связи может занять место дырки и нормальная связь в этом месте восстанавливается, однако нормальная

связь нарушается в том месте, где был электрон; эту новую дырку может занять еще какой-либо электрон и т. д. Под действием внешнего электрического поля происходит перемещение дырок в направлении поля, т. е. в направлении, обратном перемещению электронов. Перемещение дырок эквивалентно движению положительных зарядов. Этот процесс называется дырочной проводимостью (*p*-проводимостью). Таким образом, проводимость полупроводника складывается из электронной и дырочной проводимостей.

При нарушении парноэлектронных связей в кристалле одновременно возникает одинаковое число свободных электронов и дырок. С одной стороны, с повышением температуры происходит образование пар электрон—дырка, а с другой стороны, происходит их частичная рекомбинация. При заданной температуре число пар в единице объема полупроводника в среднем остается постоянным. Например, при температуре 20 °C концентрация электронов и дырок у германия  $n \approx 2,5 \cdot 10^{13}$ , а у металлических проводников  $n \approx 10^{22} \div 10^{23}$ , откуда следует, что проводимость германия при нормальной температуре значительно меньше проводимости металлов. При повышении температуры число свободных электронов и дырок сильно возрастает и проводимость германия значительно увеличивается.

Электропроводность полупроводника при отсутствии в нем примесей называется собственной электропроводностью полупроводника.

Полупроводники имеют отрицательный температурный коэффициент сопротивления, который по абсолютному значению в 10—20 раз больше, чем у металлов. При нагревании металла на 1 °C его сопротивление увеличивается примерно на 0,4 %, а сопротивление полупроводников уменьшается на 4—8 %. Это свойство полупроводников используется в технике для различных целей, например для изготовления терморезисторов, сопротивление которых резко меняется при незначительных изменениях температуры.

**б) Примесная электропроводность полупроводников.** Свойства полупроводника можно изменить, внося в него ничтожное количество примеси. Вводя в полупроводник атомы других элементов, можно получить преобладание свободных электронов над дырками или, наоборот, преобладание дырок над свободными электронами. Например, при замещении в кристаллической решетке атома германия атомом мышьяка, имеющим пять валентных электронов, четыре электрона мышьяка образуют заполненные связи

с соседними атомами германия, а пятый электрон, слабо связанный с атомом мышьяка, превратится в свободный. Поэтому примесь мышьяка увеличивает электронную проводимость.

При замещении атома германия атомом индия, имеющим три валентных электрона, они вступят в ковалентную связь с тремя атомами германия, а связи с четвертым атомом германия будут отсутствовать, так как у индия нет четвертого электрона. Восстановление всех связей возможно, если недостающий четвертый электрон будет получен от ближайшего атома германия. Но в этом случае на месте электрона в атоме германия появится дырка, которая может быть заполнена электроном из соседнего атома германия. Процесс последовательного заполнения свободной связи эквивалентен движению дырок в полупроводнике. Таким образом, примесь индия повышает дырочную проводимость кристалла германия.

Полупроводники с преобладанием электронной проводимости называются полупроводниками типа  $n$  (от латинского слова *negative* — отрицательный), а полупроводники с преобладанием дырочной проводимости — типа  $p$  (от латинского *positive* — положительный). Носители заряда, определяющие вид проводимости в примесном полупроводнике, называются основными (электроны в  $n$ -полупроводнике или дырки в  $p$ -полупроводнике), а носители заряда противоположного знака — неосновными.

В зависимости от процентного содержания примеси проводимость примесного полупроводника возрастает по сравнению с собственной проводимостью полупроводника в десятки и сотни тысяч раз.

в) **Полупроводниковый диод.** Полупроводниковый диод представляет собой соединение двух полупроводников, один из которых с электронной проводимостью, а другой с дырочной (рис. 3.14), например, германий типа  $n$  и германий типа  $p$ .

Вследствие большей концентрации электронов в полупроводнике  $n$  по сравнению с полупроводником  $p$  будет происходить диффузия электронов из первого полупроводника во второй. Аналогично будет происходить диффузия дырок в полупроводник  $n$ . В тонком пограничном слое полупроводника  $n$  возникает положительный объемный заряд, в пограничном слое полупроводника  $p$  — отрицательный. Между разноименными заряженными слоями возникает разность потенциалов — потенциальный барьер и

образуется электрическое поле переходного слоя напряженностью  $\mathcal{E}_{\text{пер}}$ , препятствующее дальнейшей диффузии, которая прекратится при равенстве сил электрического поля и сил, вызывающих диффузию. Тонкий пограничный слой, обедненный основными носителями зарядов и обладающий большим сопротивлением, называют запирающим слоем или  $p$ - $n$  переходом.

Соединив положительный вывод источника питания, напряжение которого  $U$ , с металлическим электродом — анодом  $A$  полупроводника  $p$ , а отрицательный вывод с электро-

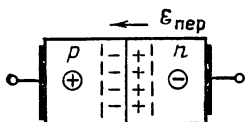


Рис. 3.14. Полупроводниковый диод

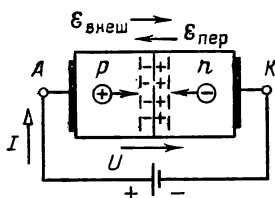
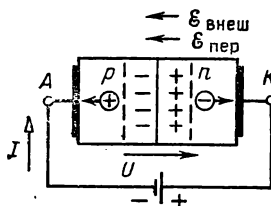


Рис. 3.15. Включение диода в прямом направлении

Рис. 3.16. Включение диода в обратном направлении



дом — катодом  $K$  полупроводника  $n$ , получим внешнее электрическое поле  $\mathcal{E}_{\text{внеш}}$ , направленное навстречу полю  $p$ - $n$  перехода; под действием внешнего поля электроны и дырки будут двигаться навстречу друг другу (рис. 3.15). При движении электронов и дырок число основных носителей заряда в переходном слое возрастает, а объемный заряд уменьшится; следовательно, уменьшится потенциальный барьер и сопротивление переходного слоя. Таким образом, в цепи установится ток  $I = I_{\text{пр}}$ , называемый прямым, который будет значительным даже при относительно небольшом напряжении источника питания.

Присоединив к диоду источник питания в обратном на-

правлении (рис. 3.16), получим внешнее поле одного направления с полем  $p$ - $n$  перехода и, следовательно, усиливающим его. Теперь поле еще больше будет препятствовать прохождению основных носителей заряда через запирающий слой. Кроме того, внешнее поле вызовет движение электронов в  $n$ -полупроводнике и дырок в  $p$ -полупроводнике в противоположные стороны от запирающего слоя. Это повлечет за собой увеличение объемного заряда, потенциального барьера и сопротивления запирающего слоя. Ток  $I_{обр}$ , называемый обратным, весьма мал и в ряде практических случаев может считаться равным нулю.

Итак, соединение двух полупроводников с разными проводимостями обладает явно выраженной односторонней проводимостью, т. е. является вентилем.

Отношение прямого тока к обратному току при одном и том же напряжении называется коэффициентом выпрямления

$$k_v = I_{пр}/I_{обр}.$$

г) Германиевые и кремниевые диоды. В этих диодах используются явления, происходящие в  $p$ - $n$  переходах между областью кристалла германия (кремния) с  $p$ -проводимостью и областью с  $n$ -проводимостью.

Одна из конструкций плоскостного диода показана на рис. 3.17, а. Он состоит из пластины германия 1 с примесью мышьяка или сурьмы, имеющей электронную проводимость, в пластину вплавляется капля индия 2. Атомы расплавленного индия, диффундируя в германий, образуют область 2а (рис. 3.17, а) с дырочной проводимостью. На границе двух областей создается  $p$ - $n$  переход.

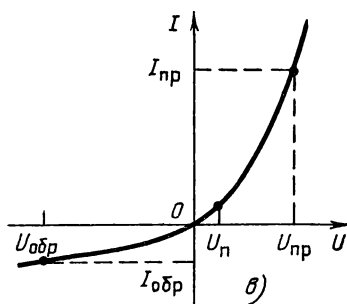
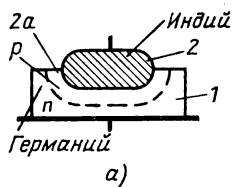


Рис. 3.17. Плоскостной германиевый диод (а), обозначение диода на схеме (б), вольт-амперная характеристика (в)

На рис. 3.17, *б* показано условное обозначение вентиля и на рис. 3.17, *в* — вольт-амперная характеристика плоскостного германиевого диода. Характеристика нелинейная, т. е. диод — это нелинейный пассивный двухполюсник. При положительном напряжении, называемом пороговым  $U_n$  (порядка 0,3 В для германиевого диода),  $p$ - $n$  переход становится хорошо проводящим и далее с ростом напряжения ток значительно увеличивается. Нагрузочную способность диода характеризуют допустимые прямые напряжения  $U_{пр}$  и ток  $I_{пр}$  и обратные  $U_{обр}$ ,  $I_{обр}$ .

Германиевые диоды допускают плотность тока до 100 А/см<sup>2</sup> при прямом напряжении до 0,8 В. Допустимое

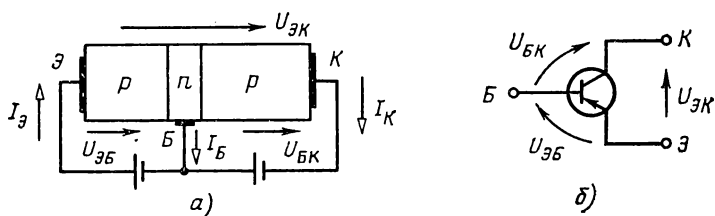


Рис. 3.18. Полупроводниковый триод — транзистор (а) и его обозначение на схемах (б)

обратное напряжение не более 400 В. Кремниевые диоды для выпрямления переменного тока изготавливаются сплавлением алюминия в кремний  $n$ -типа. У этих диодов плотность тока доходит до 200 А/см<sup>2</sup> при прямом напряжении до 1—1,2 В. Допустимое обратное напряжение не более 1000 В.

**д) Полупроводниковый триод.** Полупроводниковые триоды, состоящие, как и диоды, из  $n$ - и  $p$ -полупроводников, называются биполярными транзисторами. В отличие от диода транзистор имеет три слоя полупроводников, из которых два  $p$ -полупроводники и один  $n$ -полупроводник (рис. 3.18) или наоборот. Источники питания подключаются в трех металлических электродах, как показано на рис. 3.18, *а* для  $p$ - $n$ - $p$  транзистора. Левый электрод называется эмиттером Э, средний электрод — базой Б, правый — коллектором К. На рис. 3.18, *б* показано графическое обозначение  $p$ - $n$ - $p$  транзистора и положительные направления напряжений между тремя электродами.

Между  $n$ -полупроводником и каждым из  $p$ -полупроводников образуется переходный слой, как и у полупроводниково-

го диода. При положительном напряжении  $U_{ЭБ}$  потенциальный барьер  $p$ - $n$  перехода между эмиттером и базой уменьшается, как и у диода, включенного в прямом направлении (рис. 3.15). Поэтому происходит диффузия дырок из эмиттера в базу, т. е. возникает ток  $I_Э$ . Между базой и коллектором при положительном напряжении  $U_{БК}$  потенциальный барьер увеличивается, как у диода, включенного в обратном направлении (рис. 3.16). Сильное поле этого перехода вытягивает большинство дырок, поступивших в базу, т. е. возникает ток  $I_К$ . Этот ток составляет от 95 до 99 % тока эмиттера. Остаток образует малый ток базы  $I_Б$ . Так как

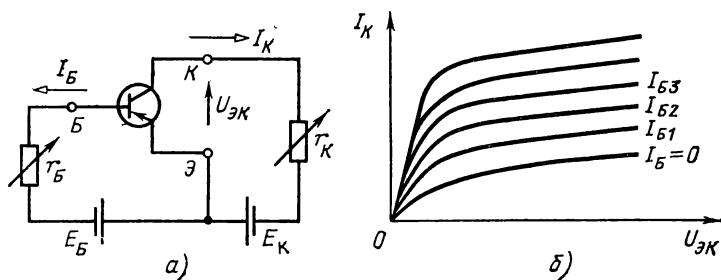


Рис. 3.19. Включение транзистора по схеме с общим эмиттером (а), вольт-амперные характеристики (б)

диод эмиттер — база работает в прямом направлении, то уже при небольшом напряжении  $U_{ЭБ}$  получаются значительные токи  $I_Э$  и  $I_К$ . На резисторе, включенном в цепь коллектора, можно получить напряжение, значительно превышающее  $U_{ЭБ}$ , т. е. транзистор является усилителем.

На рис. 3.18, а транзистор включен по схеме с общей базой. Чаще применяется другое включение по схеме с общим эмиттером, при помощи которой можно получить самое значительное усиление мощности.

На рис. 3.19, а показано включение транзистора по схеме с общим эмиттером для снятия вольт-амперных характеристик.

У диода одна вольт-амперная характеристика (рис. 3.17, в). У транзистора (как и у триода — лампы) три вывода (электрода), т. е. это трехполюсник. Поэтому у транзистора не одна вольт-амперная характеристика, а семейство вольт-амперных характеристик. На рис. 3.19, б представлено семейство зависимостей тока коллектора  $I_К$  от

напряжения между эмиттером и коллектором  $U_{ЭК}$  при различных значениях тока базы  $I_B$ . Для изменения  $U_{ЭК}$  и  $I_B$  в схеме предусмотрены регулируемые резисторы, сопротивления  $r_K$  и  $r_B$  которых можно изменять. Другое семейство вольт-амперных характеристик  $I_B(U_{ЭБ})$  получается при различных значениях напряжения  $U_{ЭК}$ .

### 3.5. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Для расчета нелинейных электрических цепей применяются графические и аналитические методы расчета. Графические методы расчета нелинейных цепей более просты.

Рассмотрим графический метод расчета неразветвленных цепей с нелинейными элементами на примере цепи (рис. 3.20) с двумя нелинейными элементами (НЭ).

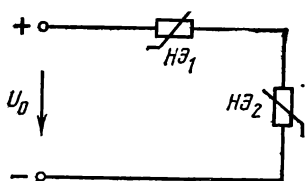


Рис. 3.20. Неразветвленная цепь с двумя нелинейными резисторами

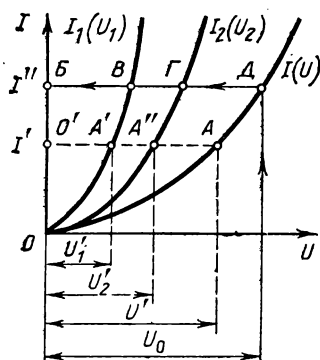


Рис. 3.21. Построение вольт-амперной характеристики неразветвленной цепи

Выбрав масштабы для тока и напряжения, построим на одном графике вольт-амперные характеристики (ВАХ) первого  $I_1(U_1)$  и второго  $I_2(U_2)$  нелинейных элементов (рис. 3.21), откладывая напряжения по оси абсцисс, а токи по оси ординат.

Так как напряжение на общих выводах цепи  $U$  с двумя последовательно соединенными участками равно сумме напряжений  $U_1$  и  $U_2$  на этих участках, а ток в обоих элементах один и тот же ( $I_1 = I_2 = I$ ), то, складывая абсциссы двух ВАХ, соответствующие одному и тому же току, получаем абсциссы ВАХ цепи  $I(U)$ . Например, складывая абсциссы  $O'A'$  и  $O'A''$  (рис. 3.21), получаем абсциссу  $O'A$ ,



представляющую собой напряжение на выводах цепи  $U' = U'_1 + U'_2$  при токе  $I'$ . Аналогично, задаваясь другими значениями тока, найдем соответствующие точки, через которые проходит ВАХ цепи.

Полученная ВАХ  $I(U)$  дает возможность по заданному напряжению найти ток в цепи и напряжения на нелинейных элементах и, наоборот, при заданном токе определить общее напряжение и напряжения на нелинейных элементах. Например, при заданном напряжении питания  $U = U_0$ , изображаемом отрезком  $БД$  (рис. 3.21), ток в цепи будет иметь значение  $I''$  — отрезок  $ОБ$ , напряжение на первом нелинейном элементе изображается отрезком  $БВ$ , а на втором отрезком  $БГ$ . Аналогичные построения можно выполнить и в том случае, если один из элементов линейный или соединено последовательно более двух НЭ.

При заданном токе  $I = I_0$  нет необходимости строить вольт-амперную характеристику цепи  $I(U)$ , так как по характеристикам НЭ сразу определяются напряжения  $U_1$  и  $U_2$ , а общее напряжение  $U = U_1 + U_2$ .

Ток в цепи, состоящей из линейного элемента с сопротивлением  $r$  и НЭ (рис. 3.22), при заданной ВАХ  $I(U_1)$  (рис. 3.23) нелинейного элемента и известных значениях сопротивления  $r$  и напряжения питания  $U = U_0$  можно найти и методом пересечений.

Так как ток в обоих элементах один и тот же  $I_1 = I_2 = I$ , а напряжение на НЭ

$$U_1 = U_0 - U_2 = U_0 - rI,$$

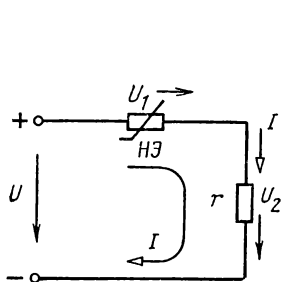


Рис. 3.22. Неразветвленная цепь с линейным и нелинейным элементами

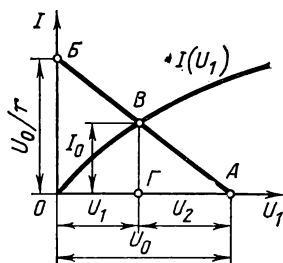


Рис. 3.23. График для определения тока и напряжений на отдельных участках неразветвленной цепи

то ток в цепи

$$I = (U_0 - U_1)/r. \quad (3.1)$$

По линейному уравнению (3.1), выражающему зависимость тока в цепи  $I$  от напряжения на НЭ  $U_1$ , можно построить в той же системе координат, что и ВАХ, эту зависимость — прямую  $BA$  (рис. 3.23). Точка  $B$  соответствует току в цепи  $I=U_0/r$  и напряжению на НЭ  $U_1=0$ , а точка  $A$  — напряжению на НЭ  $U_1=U_0$ , так как в этом случае  $I=0$ . Точка  $B$  пересечения прямой с ВАХ НЭ  $I(U_1)$  определяет единственно возможный режим цепи, одновременно удовлетворяющий как линейному уравнению (3.1), так и ВАХ НЭ. Ток цепи  $I=I_0$  представлен отрезком  $B\Gamma$ , напряжение  $U_1$  на НЭ — отрезком  $O\Gamma$ , напряжение  $U_2$  на сопротивлении  $r$  — отрезком  $\Gamma A$ .

**Пример 3.1.** Определить ток и напряжение на участках неразветвленной цепи, состоящей из резистора с сопротивлением  $r=60$  Ом и лампы при напряжении источника питания 120 В (рис. 3.22). Вольт-амперная характеристика лампы задана (табл. 3.1).

Т а б л и ц а 3.1

$U_{\text{л}}, \text{ В}$	0	20	40	60	80	100	120
$I_{\text{л}}, \text{ А}$	0	0,2	0,5	0,9	1,35	1,85	2,3

**Решение.** Вольт-амперная характеристика  $U_{\text{л}}(I_{\text{л}})$  построена по данным табл. 3.1 на рис. 3.24.

При токе  $I=0$  напряжение на лампе  $U_1=U_{\text{л}}=U_0-rI=120-0=120$  В. Отложив по оси абсцисс отрезок  $OA$ , соответствующий напряжению 120 В, получим точку  $A$ . При напряжении на лампе  $U_{\text{л}}=0$  ток в цепи  $I=U_0/r=120/60=2$  А. Отложив по оси ординат отрезок  $OB$ , соответствующий току 2 А, найдем точку  $B$ . Прямая, проведенная через точки  $A$  и  $B$ , пересекает вольт-амперную характеристику в точке  $B$ . Ордината точки  $B$  выражает ток  $I=0,95$  А, отрезок  $O\Gamma$  оси абсцисс определяет напряжение на лампе  $U_{\text{л}}=63$  В, а отрезок  $\Gamma A$  — напряжение на сопротивлении  $U_2=57$  В.

Расчет цепи с параллельно соединенными нелинейными элементами (рис. 3.25) при заданных напряжении питания  $U=U_0$  и ВАХ  $I_1(U_1)$  и  $I_2(U_2)$  (рис. 3.26) сводится к определению по этим характеристикам токов в ветвях  $I_1$  и  $I_2$ , так

как  $U_1 = U_2 = U_0$ . Отложив на оси абсцисс заданное напряжение  $U_0$  (отрезок  $OA$ ) и восстановив перпендикуляр из точки  $A$ , найдем отрезки  $AA_1$  и  $AA_2$ , выражающие токи  $I_1$  и  $I_2$ . Ток в неразветвленной части цепи равен сумме токов в ветвях, т. е.  $I = I_1 + I_2$ .

Если требуется найти токи  $I_1$  и  $I_2$  по заданному току в неразветвленной части цепи  $I$ , то необходимо построить общую ВАХ  $I(U)$ , складывая ординаты ВАХ параллельных ветвей, соответствующие одним и тем же значениям на-

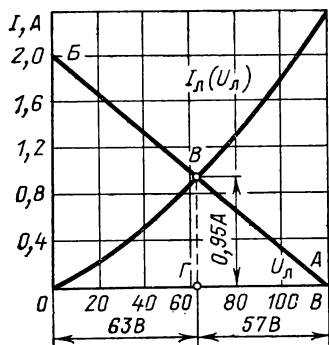


Рис. 3.24. К примеру 3.1

пряжения (рис. 3.26). При заданном токе  $I$  (точка  $B$  на общей ВАХ) находим напряжение  $U_0 = U_1 = U_2$  (точка  $A$ ) и токи  $I_1$  и  $I_2$  (точки  $A_1$  и  $A_2$ ). Аналогично рассчитываются цепи при произвольном числе параллельных ветвей с нелинейными элементами.

Графический метод расчета цепей со смешанным (параллельно-последовательным) соединением нелинейных элементов заключается в построении общих вольт-амперных характеристик для разветвленных

участков цепи и для последовательно соединенных участков. Полученная таким образом общая ВАХ цепи дает возможность определить токи и напряжения на всех участках цепи.

Рассмотрим расчет цепи со смешанным соединением нелинейных элементов на примере схемы, данной на рис. 3.27.

Сначала по заданным ВАХ параллельных ветвей  $I_2(U_{23})$  и  $I_3(U_{23})$ , которые показаны на рис. 3.28, находим ВАХ разветвленного участка  $I_1(U_{23})$ . Для этого складываем ординаты ВАХ ветвей, соответствующие одним и тем же значениям напряжения, как и на рис. 3.21.

Полученная ВАХ  $I_1(U_{23})$  представляет собой зависимость суммарного тока параллельных ветвей от общего напряжения между узлами ( $U_{23} = U_2 = U_3$ ). Далее до полученной ВАХ  $I_1(U_{23})$  и заданной ВАХ  $I_1(U_1)$  первого элемента находим ВАХ всей цепи  $I(U)$ . Для этого складываем абсциссы ВАХ  $I_1(U_1)$  и  $I_1(U_{23})$ , т. е. ВАХ последовательно соединенных участков, соответствующие одним и тем же значениям тока. Нахождение суммарной абсциссы соответ-

ствует определению суммарного напряжения последовательно соединенных участков, равного напряжению питания ( $U=U_1+U_{23}$ ).

Если напряжение  $U=U_0$  задано, то, отложив по оси абсцисс отрезок  $OO'$ , изображающий напряжение  $U_0$ , по

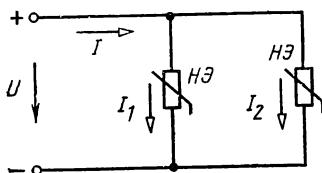


Рис. 3.25. Параллельное соединение двух нелинейных элементов

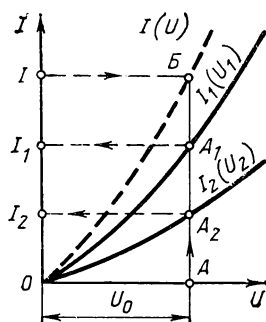


Рис. 3.26. График для определения токов при параллельном соединении двух нелинейных элементов

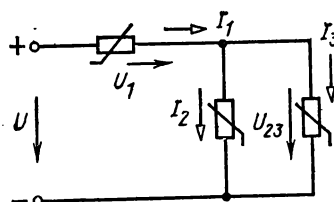
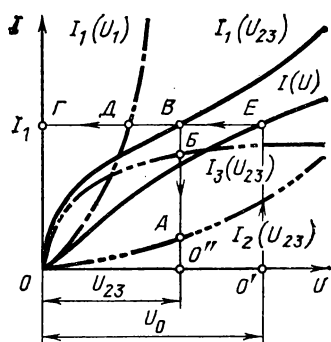


Рис. 3.27. Цепь со смешанным соединением нелинейных элементов

Рис. 3.28. Графический расчет цепи, изображенной на рис. 3.27



общей вольт-амперной характеристике  $I(U)$  находим ток  $I=I_1$ , изображаемый отрезком  $O'E=OG$ . Затем, определив точку пересечения  $B$  горизонтальной прямой  $GE$  с вольт-амперной характеристикой  $I_1(U_{23})$  и опустив перпендикуляр, находим напряжение на параллельных ветвях  $U_{23}$  (отрезок  $OO''=GB$ ) и, отметив точки  $A$  и  $B$  на вольт-амперных характеристиках  $I_2(U_{23})$  и  $I_3(U_{23})$ , определим токи в ветвях:  $I_2$  (отрезок  $O''A$ ) и  $I_3$  (отрезок  $O''B$ ).

### 3.6. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Режим работы нелинейной цепи можно определить аналитически, если, например, какой-либо участок ее ВАХ с достаточным приближением можно заменить отрезком прямой. При этом нелинейная цепь заменяется эквивалентной схемой с линейными элементами, которая рассчитывается одним из методов расчета линейных цепей.

На рис. 3.29 дана ВАХ нелинейного элемента; по оси абсцисс в масштабе  $m_U$  [В/см] отложено напряжение, а по оси абсцисс в масштабе  $m_I$  [А/см] ток. Часть ВАХ между точками  $ab$  заменена отрезком прямой.

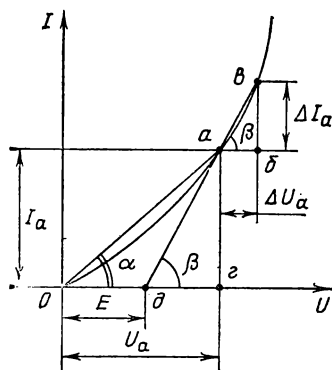


Рис. 3.29. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента, сопротивление которого уменьшается с увеличением напряжения

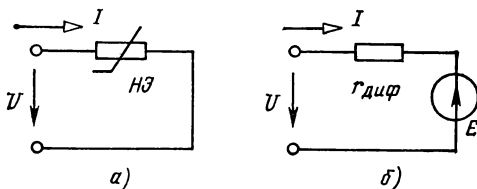


Рис. 3.30. Нелинейный элемент, сопротивление которого уменьшается с увеличением напряжения (а), и его замещения (б)

Нелинейный элемент в любой точке ВАХ характеризуется статическим сопротивлением, которое равно отношению напряжения к току, соответствующих этой точке. Например, для точки  $a$

$$r_{ст} = U_a / I_a = \frac{m_U}{m_I} \frac{Oz}{ag} = m, \operatorname{ctg} \alpha, \quad (3.2)$$

т. е. статическое сопротивление пропорционально котангенсу угла  $\alpha$ ;  $m_r = m_U / m_I$  [Ом].

Статическое сопротивление элемента, вольт-амперная характеристика которого построена на рис. 3.29, с ростом напряжения уменьшается.

Кроме статического сопротивления нелинейный элемент характеризуется дифференциальным сопротив-

лением, под которым понимают отношение бесконечно малого или весьма малого приращения напряжения  $\Delta U$  к соответствующему приращению тока  $\Delta I$ . Например, для точки  $a$  характеристики — рабочей точки с током  $I_a$  и напряжением  $U_a$  (рис. 3.29) — можно записать

$$r_{\text{диф}} = \frac{dU}{dI} \approx \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{m_U}{m_I} \frac{ab}{bs} = m_r \operatorname{ctg} \beta, \quad (3.3)$$

где  $\beta$  — угол наклона касательной, проведенной через точку  $a$ .

У линейного элемента статическое сопротивление равно дифференциальному.

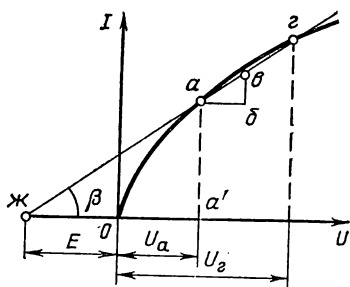


Рис. 3.31. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента, сопротивление которого возрастает с увеличением напряжения

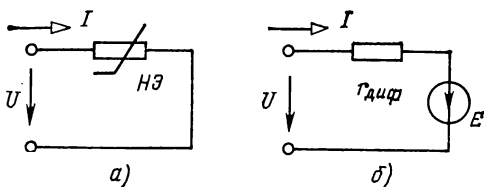


Рис. 3.32. Схема замещения нелинейного элемента, сопротивление которого возрастает с увеличением напряжения

Проведем через точки  $a$  и  $b$  прямую. В общем случае эта прямая не проходит через начало координат, как на рис. 1.15. Поэтому вблизи точки  $a$  нелинейный элемент (рис. 3.30,  $a$ ) нельзя заменить только элементом (резистором) с постоянным сопротивлением  $r_{\text{диф}}$ . Необходимо в схему замещения (рис. 3.30,  $б$ ) включить дополнительно источник ЭДС  $E$ , значение которой определяет точка пересечения  $d$  касательной с осью абсцисс (рис. 3.29). Схема замещения рис. 3.30,  $б$  представляет нелинейный элемент (рис. 3.30,  $a$ ) только при значениях напряжения  $U$  и тока  $I$ , близких к рабочей точке  $a$ , для которой найдено дифференциальное сопротивление. В противном случае нужно для другой рабочей точки найти новые значения  $r_{\text{диф}}$  и  $E$ .

При заданном напряжении  $U$  ток  $I$  определяется по

обобщенному закону Ома (2.46а), как для ветви рис. 2.25, а:

$$I = (U - E)/r_{\text{диф}}. \quad (3.4)$$

На рис. 3.31 приведена вольт-амперная характеристика нелинейного элемента, статическое сопротивление которого увеличивается с ростом напряжения на выводах. Продолжив прямолинейный участок *ав* характеристики до пересечения с осью абсцисс, получим значение ЭДС *E* на отрицательной части оси абсцисс. Поэтому на схеме замещения направление ЭДС нужно изменить (рис. 3.32, б). По обобщенному закону Ома (2.46б), как и для ветви рис. 2.25, б,

$$I = (U + E)/r_{\text{диф}}. \quad (3.5)$$

### 3.7. СТАБИЛИЗАТОРЫ ТОКА И НАПРЯЖЕНИЯ

Нелинейные элементы, у которых ВАХ имеют участки, параллельные оси абсцисс или оси ординат, применяются для стабилизации тока или напряжения.

К числу стабилизаторов тока относится, например, бареттер. Он представляет собой стальную или вольфрамовую проволоку — нить, помещенную в баллон, который заполнен водородом при давлении  $(6-10)10^3$  Па. Условия охлаждения и нагревания нити бареттера подобраны так, что изменение напряжения на его выводах в известных границах вызывает почти пропорциональное изменение сопротивления нити.

Включим бареттер (НЭ) последовательно с потребителем, имеющим постоянное сопротивление *r* (рис. 3.22). Построив прямые, как на рис. 3.23, из точек *A'* и *A''*, определяющих изменение напряжения питания от  $U'_0$  до  $U''_0 = U'_0 + \Delta U$  (рис. 3.33), убедимся, что ток в цепи изменяется очень незначительно от *I'* до  $I'' = I' + \Delta I$  (точки *B'* и *B''*). Границы изменения напряжения, при которых ток цепи изменяется в допустимых пределах, зависят от сопротивления приемника, включенного последовательно с бареттером, т. е. от наклона прямых.

Эффективность стабилизации характеризуют коэффициентом стабилизации, показывающим, во сколько раз относительное изменение тока меньше относительно изменения напряжения:

$$S_I = \frac{\Delta U/U}{\Delta I/I}. \quad (3.6)$$

Чем больше коэффициент  $S_I$ , тем лучше стабилизация. Коэффициент стабилизации можно определить по ВАХ стабилизатора.

Для стабилизации напряжения применяют или газоразрядные стабилитроны или полупроводниковые (кремниевые).

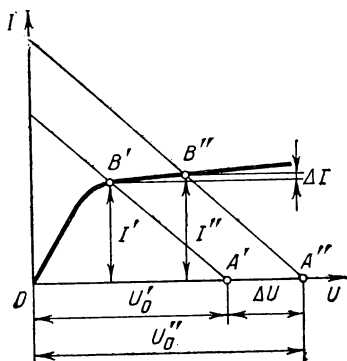


Рис. 3.33. Вольт-амперная характеристика бареттера

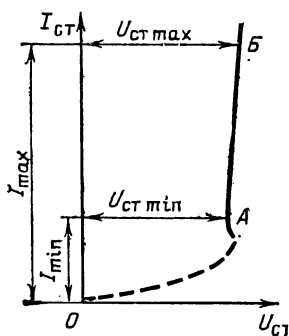
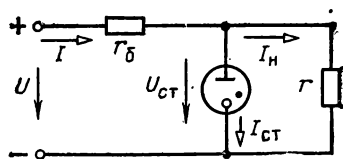


Рис. 3.34. Вольт-амперная характеристика газоразрядного стабилитрона

Рис. 3.35. Схема стабилизатора с газоразрядным стабилитроном



Газоразрядный стабилитрон имеет стеклянный баллон, в котором находится цилиндрический катод и анод в виде проволоки, расположенный на оси катода. Давление газа в баллоне составляет несколько тысяч паскалей.

Рабочий участок  $AB$  ВАХ стабилитрона (рис. 3.34) почти параллелен оси ординат. Напряжение в пределах, соответствующих участку  $AB$ , называется напряжением стабилизации  $U_{ст}$ .

Стабилитрон включается параллельно приемнику с сопротивлением  $r$  (рис. 3.35). Последовательно с разветвленным участком включается балластное сопротивление  $r_δ$ ,



напряжение на котором равно разности между напряжением питания  $U$  и напряжением стабилизации, или

$$U = Ir_6 + U_{\text{ст}},$$

где  $I = I_{\text{ст}} + I_{\text{н}}$  — ток источника питания.

Значительное увеличение входного напряжения  $\Delta U$  вызывает увеличение тока в стабилитроне  $I_{\text{ст}}$  и тока источника питания, поэтому падение напряжения на балластном сопротивлении возрастает, а напряжение на стабилитроне ( $U_{\text{ст}}$ ) увеличивается незначительно. Увеличение тока нагрузки  $I_{\text{н}}$  вызывает уменьшение тока в стабилитроне и незначительное изменение напряжения на разветвлении.

Коэффициент стабилизации показывает, во сколько раз относительное изменение стабилизированного напряжения на сопротивлении нагрузки меньше относительного изменения напряжения питания:

$$S_U = \frac{\Delta U/U}{\Delta U_{\text{ст}}/U_{\text{ст}}}. \quad (3.7)$$

В схемах стабилизаторов напряжения теперь все чаще применяются полупроводниковые стабилитроны.

## Глава четвертая

## ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

### 4.1. ЗАКОН КУЛОНА

Опытами Кулона установлено, что электрическое поле точечного заряда  $Q_1$  действует на помещенный в точке  $A$  (рис. 4.1) второй точечный пробный заряд  $Q_2$  с силой  $F_{12}$ , прямо пропорциональной численным значениям обоих зарядов, обратно пропорциональной квадрату расстояния  $R$

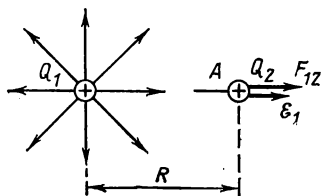


Рис. 4.1. Электрическое поле точечного заряда

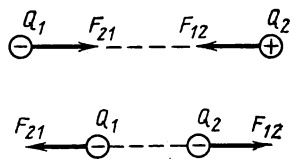


Рис. 4.2. Силы взаимодействия между электрическими зарядами (кулоновские силы)

между ними и зависящей от среды, в которой находятся заряды. Таким образом, по закону Кулона сила

$$F_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_a R^2}. \quad (4.1)$$

Коэффициент  $\epsilon_a$ , называемый абсолютной диэлектрической проницаемостью среды, учитывает влияние на силу заряженных частиц среды, в которой находятся заряды  $Q_1$  и  $Q_2$ ; его численное значение зависит от системы единиц.

Величина

$$\mathcal{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_a R^2} \quad (4.2)$$

представляет собой напряженность электрического поля заряда  $Q_1$  в точке  $A$ . Так как поле симметрично, то во всех точках, удаленных от заряда  $Q_1$  на равные расстояния  $R$ , напряженность поля численно одинакова. Направление вектора напряженности поля  $\mathcal{E}_1$  в точке  $A$  совпадает с направлением прямой, проходящей через точечные заряды  $Q_1$  и  $Q_2$ , и определяется по направлению силы  $F_{12}$ , действующей на положительный пробный заряд  $Q_2$ .

Таким образом, силу, действующую на заряд  $Q_2$ , можно представить произведением напряженности поля заряда  $Q_1$  и значения заряда  $Q_2$ :

$$F_{12} = \mathcal{E}_1 Q_2. \quad (4.3)$$

С другой стороны, заряд  $Q_1$  расположен в поле заряда  $Q_2$  и на заряд  $Q_1$  действует сила

$$F_{21} = \mathcal{E}_2 Q_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_a R^2}, \quad (4.3a)$$

т. е. численно равная силе, с которой поле заряда  $Q_1$  действует на заряд  $Q_2$ .

Силы взаимодействия (кулоновские силы) вызывают притяжение разноименных зарядов и отталкивание одноименных (рис. 4.2), как уже указывалось в § 1.1.

Если электрическое поле создается несколькими зарядами, то для определения силы и напряженности поля

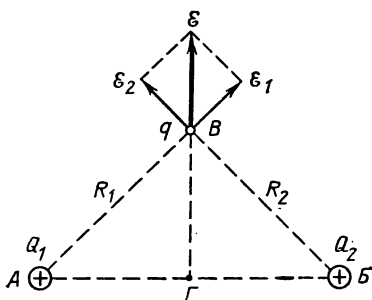


Рис. 4.3. Силы, действующие на пробный заряд

в среде, в которой  $\epsilon_a$  не зависит от напряженности поля (линейная среда), применяют принцип наложения. Например, сила, с которой заряды  $Q_1$  и  $Q_2$  действуют на пробный точечный заряд  $q$ , находящийся в точке  $B$  (рис. 4.3), равна геометрической сумме двух сил: во-первых, силе  $F_1$ , с которой  $Q_1$  действует на заряд  $q$  в отсутствие  $Q_2$ , и, во-вторых, силе  $F_2$ , с которой  $Q_2$  действует на заряд  $q$  в отсутствие  $Q_1$ . Силы  $F_1$  и  $F_2$  определяются по выражению, аналогичному (4.1). Поэтому и напряженность поля зарядов  $Q_1$  и  $Q_2$  в точке  $B$  или любой другой точке поля определяется как геометрическая сумма или сумма векторов

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2,$$

где  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  — векторы напряженности поля зарядов  $Q_1$  и  $Q_2$ , значения которых определяются по (4.2), а направления совпадают с направлениями сил  $F_1$  и  $F_2$ , действующих на положительный пробный заряд.

Из (4.2) определяется единица измерения абсолютной проницаемости среды в системе СИ:

$$[\epsilon_a] = \left[ \frac{Q}{4\pi R^2 \mathcal{E}} \right] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2 \cdot \text{В/м}} = \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}} = \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

Единица Кл/В называется фарад ( $\Phi$ ) — единица емкости (см. § 4.8), единица абсолютной диэлектрической проницаемости называется фарад на метр ( $\Phi/\text{м}$ ).

Различные среды имеют разные значения абсолютной диэлектрической проницаемости. Абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума, называемая электрической постоянной, в системе СИ

$$\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}. \quad (4.4)$$

Диэлектрические проницаемости других сред обычно измеряют в относительных единицах (по отношению к электрической постоянной). Отношение абсолютной диэлектрической проницаемости среды к электрической постоянной  $\epsilon_0$  называется относительной диэлектрической проницаемостью (часто сокращенно диэлектрической проницаемостью):

$$\epsilon_r = \epsilon_a / \epsilon_0 \text{ и } \epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon_r = 8,85 \cdot 10^{-12} \epsilon_r \text{ Ф/м}. \quad (4.5)$$

Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_r$  — отвлеченная величина. Для вакуума  $\epsilon_r = 1$ , для воздуха практически  $\epsilon_r = 1$ ,

для дистиллированной воды  $\epsilon_r = 80$ , для большинства веществ и материалов  $\epsilon_r$  выражается числами от 1 до 10.

**Пример 4.1.** Два точечных заряда  $Q_1 = Q_2 = 6 \cdot 10^{-11}$  Кл находятся на расстоянии 12 см друг от друга в воздухе. Определить напряженность поля этих зарядов в точке  $B$  (рис. 4.3), если она находится на перпендикуляре  $BG$  к прямой  $AB$  и если отрезки  $AG = GB = GB$ , и силу  $F$ , действующую на точечный заряд  $q = 2 \cdot 10^{-11}$  Кл, находящийся в точке  $B$ .

**Решение.** Определим расстояние  $R_1$  между точками  $A$  и  $B$ :

$$R_1 = R_2 = \sqrt{(AG)^2 + (GB)^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{2} \cdot 6 \text{ см} = \sqrt{2} \cdot 0,06 \text{ м}.$$

По (4.2) напряженность  $\mathcal{E}_1$  в точке  $B$ , созданная зарядом  $Q_1$ ,

$$\mathcal{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_a R^2} = \frac{6 \cdot 10^{-11}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} (\sqrt{2} \cdot 0,06)^2} = 75 \text{ В/м}.$$

Так как  $R_2 = R_1$  и  $Q_2 = Q_1$ , то  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 = 75 \text{ В/м}$ .

Векторы  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  расположены под углом  $90^\circ$  друг к другу (рис. 4.3), и так как результирующий вектор равен геометрической сумме слагающих, то

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2} = \sqrt{75^2 + 75^2} \approx 106 \text{ В/м}.$$

По (4.3) сила  $F = \mathcal{E}q = 106 \cdot 2 \cdot 10^{-11} = 2,12 \cdot 10^{-9} \text{ Н}$  (ньютон).

## 4.2. ТЕОРЕМА ГАУССА

Произведение напряженности электрического поля  $\mathcal{E}$  и такой плоской площадки  $S$ , во всех точках которой напряженность поля одинакова и перпендикулярна к ней, составляет поток  $N$  вектора напряженности через площадку  $S$ :

$$N = \mathcal{E}S. \quad (4.6)$$

Если вектор напряженности не перпендикулярен к площадке, то необходимо определить составляющую вектора напряженности  $\mathcal{E}_n$ , перпендикулярную к площадке, которую называют нормальной составляющей (рис. 4.4):

$$N = \mathcal{E}_n S = (\mathcal{E} \cos \beta) S.$$

При вычислении потока через произвольную поверхность площадью  $S$  в неоднородном поле эту поверхность следует разбить на малые плоские элементы  $dS$ , в пределах каждого из которых напряженность поля можно счи-

тать одинаковой; поток через отдельную элементарную площадку

$$dN = \mathcal{E}_n dS.$$

Поток вектора напряженности через произвольную замкнутую поверхность находится суммированием (интегрированием) элементарных потоков:

$$N = \oint dN = \oint \mathcal{E}_n dS. \quad (4.7)$$

Единицу измерения потока вектора напряженности найдем из формулы (4.6):

$$[N] = [\mathcal{E}S] = \frac{B}{M} \cdot M^2 = B \cdot M.$$

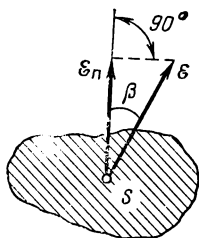


Рис. 4.4. Нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля

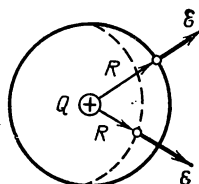


Рис. 4.5. Электрический заряд внутри сферической поверхности

В качестве примера найдем поток вектора напряженности поля точечного заряда  $Q$ , помещенного в центре сферической (шаровой) поверхности радиуса  $R$  (рис. 4.5).

Напряженность поля заряда  $Q$  одинакова во всех точках этой поверхности и согласно (4.2)

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 R^2}. \quad (4.8)$$

Так как векторы напряженности перпендикулярны к сферической поверхности, то  $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}$  и проходящий через поверхность поток вектора напряженности поля

$$N = \oint \mathcal{E}_n dS = \mathcal{E} \oint dS = \mathcal{E} 4\pi R^2. \quad (4.9a)$$

так как  $\oint dS = 4\pi R^2$  — площадь сферы.

Подставив в написанную формулу выражение  $\mathcal{E}$ , получим

$$N = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_a}. \quad (4.9)$$

Как видно из (4.9), полученное для частного случая сферической поверхности выражение потока не зависит ни от формы поверхности, ни от места расположения зарядов внутри нее. Поэтому формула (4.9) справедлива для замкнутой поверхности любой формы и произвольно расположенных внутри нее зарядов, суммарное значение которых равно  $Q$ .

Итак, поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность равен отношению суммы зарядов, расположенных внутри этой поверхности, к абсолютной диэлектрической проницаемости среды. Полученное соотношение называют теоремой Гаусса.

Наглядно поток изображают электрическими линиями, так чтобы вектор напряженности поля в любой точке был касательным к электрической линии, проведенной через эту точку.

Электрические линии поля неподвижных зарядов начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных (см. также § 1.1). Число линий, пересекающих данную площадку, выбирают пропорциональным значению потока  $N$  через эту площадку. На рис. 4.1 показаны электрические линии точечного заряда  $+Q_1$ .

Электрическое поле неподвижных зарядов называют электростатическим.

### 4.3. ОДНОРОДНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Вокруг бесконечной плоской равномерно заряженной с одинаковой плотностью заряда проводящей (металлической) пластины вследствие симметрии существует однородное электрическое поле (рис. 4.6). Электрические линии этого поля перпендикулярны к поверхности пластины.

Действительно, предположим, что электрические линии поля, а следовательно, и векторы напряженности направлены не перпендикулярно к заряженной плоскости. Тогда в каждой ее точке вектор напряженности можно будет разложить на две составляющие: нормальную  $\mathcal{E}_n$ , т. е. перпендикулярную к поверхности, и тангенциальную  $\mathcal{E}_t$ , направленную вдоль поверхности (рис. 4.7). Под действием

тангенциальных составляющих должно было бы происходить перемещение зарядов (ток) по поверхности пластины. Но рассматриваемое в этой главе электростатическое поле — это поле неподвижных зарядов и, следовательно, тангенциальных составляющих быть не может, т. е. векторы напряженности и электрические линии поля могут быть только перпендикулярными к проводящей поверхности.

Электрическое поле двух плоских параллельных пластин, заряженных разноименно (рис. 4.8), можно получить наложением полей отдельных пластин. Между пластинами электрические линии полей обеих пластин направлены одинаково. Вне пластин линии напряженности двух пластин направлены встречно, и при их одинаковой плотности напряженность поля здесь равна нулю. Такие две металлические пластины, разделенные диэлектриком (изолятором), представляют собой плоский конденсатор.

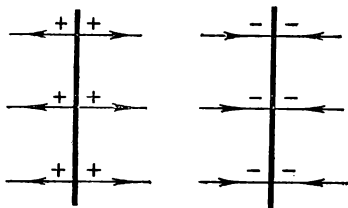


Рис. 4.6. Электрические поля плоских пластин, заряженных зарядами противоположных знаков  $+Q$  и  $-Q$

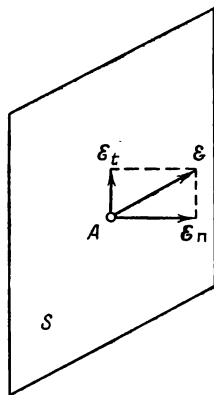


Рис. 4.7. Нормальная  $E_n$  и тангенциальная  $E_t$  составляющие вектора напряженности поля

Напряженность поля между пластинами (электродами) плоского конденсатора пропорциональна поверхностной плотности заряда  $\sigma$ , т. е. заряду, приходящемуся на единицу поверхности пластины.

Выделим на одной из пластин конденсатора площадку  $S$  (рис. 4.8), заряд которой

$$Q = \sigma S,$$

откуда следует, что единица измерения поверхностного заряда

$$[\sigma] = [Q/S] = \text{Кл/м}^2.$$

Проведем вокруг заряда  $Q$  замкнутую поверхность в виде параллелепипеда со сторонами, параллельными пластине, равными  $S$  (рис. 4.8). Поток вектора напряженности (4.9) через эту поверхность

$$N = Q/\epsilon_a = \sigma S/\epsilon_a,$$

и так как для однородного поля между пластинами

$$N = \mathcal{E}S,$$

то

$$\mathcal{E}S = \sigma S/\epsilon_a,$$

а напряженность поля между пластинами

$$\mathcal{E} = \sigma/\epsilon_a = Q/\epsilon_a S. \quad (4.10)$$

При конечных размерах пластин практически однородное поле получается при малом расстоянии между пласти-

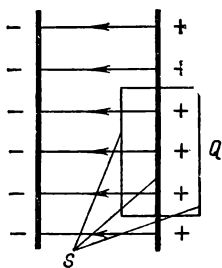


Рис. 4.8. Поле плоского конденсатора

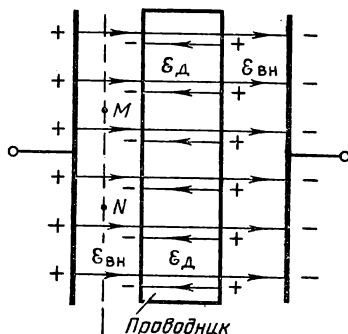


Рис. 4.9. Проводник в электрическом поле

нами по сравнению с их линейными размерами. У краев пластин поле всегда неоднородно.

Для однородного поля существует простая связь между напряженностью поля  $\mathcal{E}$  и напряжением  $U$ ; согласно (1.4)

$$\mathcal{E} = U/l,$$

где предполагается, что  $l$  — это расстояние между точками, взятыми на одной и той же электрической линии.

Таким образом, напряженность однородного электрического поля равна отношению напряжения между двумя точками электрической линии к расстоянию между ними.



В общем случае для неоднородного поля значение напряженности электрического поля определяется отношением напряжения  $dU$  между концами отрезка  $dl$  электрической линии:

$$\mathcal{E} = dU/dl,$$

откуда напряжение  $dU$  между двумя точками поля, находящимися на одной электрической линии на расстоянии  $dl$ ,

$$dU = \mathcal{E} dl.$$

Если две точки находятся на расстоянии  $dl$  не на одной электрической линии, то нужно разложить вектор  $\mathcal{E}$  на две составляющие: перпендикулярную отрезку  $dl$  и параллельную отрезку  $dl$  (составляющую  $\mathcal{E}_l$ ). Напряжение

$$dU = \mathcal{E}_l dl. \quad (4.11a)$$

Для вычисления напряжения между двумя произвольными точками  $a$  и  $b$  весь путь между этими точками нужно разбить на отрезки  $dl$  и просуммировать напряжения  $dU$ :

$$U = U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \int_a^b dU = \int_a^b \mathcal{E}_l dl. \quad (4.11b)$$

В электростатическом поле, как и в электрическом поле в проводящей среде при постоянном токе (§ 1.4), это напряжение не зависит от пути между точками  $a$  и  $b$ . Такие поля называются **потенциальными**.

С любой плоскостью, параллельной пластинам конденсатора (штриховая линия на рис.4.9), вектор напряженности электрического поля составляет прямой угол, т. е. имеет только нормальную составляющую  $\mathcal{E}_n$  (рис. 4.7), а тангенциальная составляющая равна нулю. Поэтому между любыми точками  $M$  и  $N$  такой плоскости разность потенциалов равна нулю. Поверхность, все точки которой имеют одинаковые потенциалы, называют **эквипотенциальной** (равнопотенциальной). Следовательно, в поле плоского конденсатора эквипотенциали — это плоскости, параллельные его пластинам. В частности, и каждая из пластин является эквипотенциальной поверхностью.

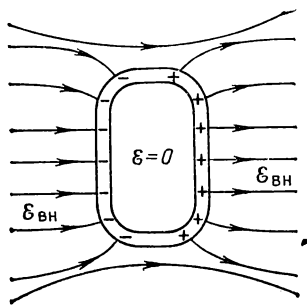


Рис. 4.10. Экран

Электростатическое поле внутри проводника отсутствует. В металлическом проводнике, например в пластине, помещенной во внешнее электрическое поле (рис. 4.9) с напряженностью  $\mathcal{E}_{\text{вн}}$ , свободные электроны под действием поля будут перемещаться в направлении, противоположном направлению внешнего поля. Вследствие этого на одной стороне пластины накапливается отрицательный заряд, на другой — положительный. Разделение зарядов приводит к возникновению добавочного электрического поля с напряженностью  $\mathcal{E}_{\text{д}}$ , направленного противоположно внешнему полю. Разделение зарядов продолжается до тех пор, пока созданное ими внутри проводника дополнительное поле не компенсирует внешнее поле, следовательно, результирующее поле внутри проводника при неподвижных зарядах будет равно нулю:

$$\mathcal{E}_{\text{вн}} - \mathcal{E}_{\text{д}} = 0.$$

Явление разделения зарядов на проводящих телах под влиянием внешнего электрического поля называется электростатической индукцией. При помощи электростатической индукции, например, защищают какую-либо часть пространства электростатического поля. Для этого защищаемое пространство окружают замкнутой проводящей оболочкой — экраном (рис. 4.10). Вследствие электростатической индукции на внешней поверхности оболочки появятся электрические заряды, но в самой оболочке и внутри нее поле отсутствует. В технике для экранирования вместо сплошных оболочек часто применяют оболочки из металлических сеток.

#### 4.4. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрим подробнее процессы в диэлектрике, помещенном во внешнее электрическое поле, например, между разноименно заряженными электродами.

У одной группы диэлектриков, называемых неполярными, при отсутствии внешнего (основного) поля положительно и отрицательно заряженные частицы, входящие в молекулы (атомы), как бы уравнивают друг друга (собственное поле отсутствует); молекулы их являются электрически нейтральными или неполярными (рис. 4.11, а). У таких диэлектриков под действием внешнего поля происходит смещение электрического центра отрицательных зарядов (электронов) навстречу направлению поля (рис.

4.11, б). С точки зрения электрических свойств такая молекула во внешнем поле может рассматриваться как диполь, т. е. пара разноименных точечных зарядов  $+q$  и  $-q$  (рис. 4.11, в), находящихся на небольшом расстоянии  $l$  друг от друга (плечо диполя). Заряды, образующие диполи диэлектрика, называют связанными, а произведение заряда  $q$  и плеча  $l$  — электрическим моментом диполя:

$$p = ql.$$

Электрический момент рассматривают как векторную величину  $p$ , направленную от отрицательного заряда диполя к положительному.

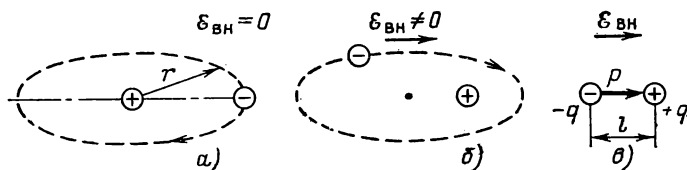


Рис. 4.11. Неполарная молекула:

а — при отсутствии внешнего поля; б — при наличии внешнего поля; в — ее эквивалентный диполь

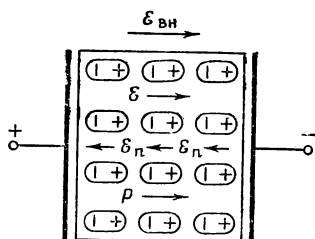


Рис. 4.12. Поляризованный диэлектрик

Таким образом, неполярные молекулы во внешнем поле становятся диполями, электрические моменты  $p$  которых стремятся расположиться в направлении внешнего поля, и диэлектрик поляризуется (рис. 4.12). При исчезновении внешнего поля смещение исчезает и молекулы снова становятся электрически нейтральными. Рассмотренная поляризация называется деформационной.

У каждой группы диэлектриков, называемых полярными, молекулы всегда полярны (электрические центры электронов в молекулах расположены несимметрично относи-

тельно ядер). Полярную молекулу можно считать диполем с зарядами  $+q$  и  $-q$  и моментом  $p=ql$ . При отсутствии внешнего поля все диполи расположены хаотически (рис. 4.13, а) и суммарный электрический момент диэлектрика равен нулю. При появлении внешнего поля его силы стремятся ориентировать диполи в направлении поля. В результате диполи несколько повернутся в направлении поля и диэлектрик приобретает электрический момент (рис. 4.13, б). Такая поляризация называется ориентационной.

При той или другой поляризации диэлектрика поле его диполей, или поле поляризации  $\mathcal{E}_п$  (рис. 4.12), направлено

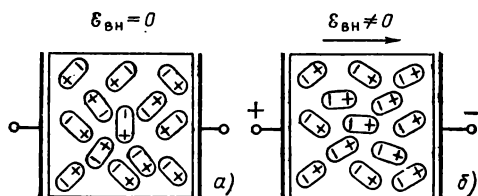


Рис. 4.13. Полярные молекулы диэлектрика:

а — при отсутствии внешнего поля; б — в присутствии внешнего поля

от положительных зарядов к отрицательным, т. е. противоположно внешнему полю  $\mathcal{E}_{вн}$ . Напряженность результирующего поля  $\mathcal{E}$ , равная алгебраической сумме напряженностей внешнего поля и поля поляризации, меньше напряженности внешнего поля, т. е.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{вн} - \mathcal{E}_п.$$

Чем сильнее поляризуется диэлектрик, тем слабее результирующее поле, т. е. меньше его напряженность  $\mathcal{E}$  при том же внешнем поле, а следовательно, тем больше его диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_r$ .

У диэлектрика, находящегося в периодически изменяющемся внешнем электрическом поле, смещение зарядов также будет периодическим, что вызывает нагревание диэлектрика. Чем с большей частотой изменяется внешнее поле, тем сильнее нагрев диэлектрика. Это явление применяется для нагрева и сушки влажных материалов, для получения или ускорения химических реакций, требующих повышенной температуры.

Мощность, идущая на нагрев диэлектрика при периодическом смещении зарядов диэлектрика (связанных зарядов) и отнесенная к единице объема, называется удельными диэлектрическими потерями.

#### 4.5. ВЕКТОРЫ ПОЛЯРИЗОВАННОСТИ И СМЕЩЕНИЯ

Выше было показано, что вследствие поляризации диэлектрика, т. е. смещения его связанных зарядов, изменяется напряженность электрического поля. Результирующее влияние диэлектрика на электрическое поле оценивают векторной величиной, называемой поляризованностью  $\mathbf{P}$  (вектором поляризации).

Средняя интенсивность поляризации  $P_{\text{ср}}$  определяется как сумма дипольных моментов в единице объема диэлектрика, а чтобы найти поляризованность в данном месте поля, надо выбрать достаточно малый объем  $\Delta V$ :

$$\mathbf{P} = \Sigma \mathbf{p} / \Delta V.$$

Единица измерения поляризованности

$$[P] = [ql/V] = \text{Кл} \cdot \text{м} / \text{м}^3 = \text{Кл} / \text{м}^2.$$

Вектор поляризации направлен навстречу вектору напряженности электрического поля связанных зарядов  $\mathcal{E}_{\text{п}}$  (рис. 4.12).

Вектор поляризации для большинства диэлектриков (за исключением группы сегнетоэлектриков) пропорционален напряженности электрического поля:

$$\mathbf{P} = k \epsilon_0 \mathcal{E}, \quad (4.12)$$

и его направление совпадает с направлением внешнего  $\mathcal{E}_{\text{вн}}$  и результирующего  $\mathcal{E}$  полей (рис. 4.12).

Коэффициент  $k$  называется электрической восприимчивостью диэлектрика и характеризует его способность поляризоваться.

При расчетах электрических полей в диэлектриках с различными диэлектрическими проницаемостями пользуются еще вектором электрического смещения.

Электрическое смещение  $\mathbf{D}$  связано с напряженностью электрического поля простым соотношением

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathcal{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathcal{E}, \quad (4.13)$$

откуда можно определить единицу измерения электрического смещения:

$$[D] = [\epsilon_a \mathcal{E}] = \frac{Kл}{В \cdot м} \frac{В}{м} = \frac{Кл}{м^2},$$

которая такая же, как у вектора, поляризации и у поверхностной плотности зарядов на электродах.

Электрическое смещение и поверхностная плотность свободных зарядов численно одинаковы на поверхностях всех проводящих тел, находящихся в электростатическом поле. Например, у внутренней поверхности пластины плоского конденсатора (рис. 4.8) напряженность однородного электрического поля, как и в любой точке однородного поля (4.10),

$$\mathcal{E} = Q/\epsilon_a S,$$

а электрическое смещение в любой точке поля, в том числе и у металлической поверхности,

$$D = \epsilon_a \mathcal{E} = Q/S = \sigma, \quad (4.13a)$$

т. е. совпадает с поверхностной плотностью заряда на пластине.

Из (4.13a) следует, что при заданной плотности поверхностных свободных зарядов на электродах электрическое смещение в однородном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_a$  не зависит от  $\epsilon_a$ , а напряженность электрического поля зависит. Поэтому можно сказать, что напряженность электрического поля определяется и свободными (на электродах) и связанными (в диэлектриках) зарядами, т. е. поляризацией диэлектрика, а электрическое смещение *в однородном диэлектрике* не зависит от связанных зарядов.

Связь между тремя векторными величинами, характеризующими электрическое поле в диэлектрике, выражается равенством

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \mathbf{P}. \quad (4.14)$$

Приняв во внимание (4.12) и (4.13), получим

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \epsilon_0 k \mathcal{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathcal{E}, \quad (4.15)$$

откуда диэлектрическая проницаемость

$$\epsilon_r = 1 + k,$$

а электрическая восприимчивость

$$k = (\epsilon_r - 1).$$

Рассмотрим еще неоднородное электрическое поле заряженного металлического шара (рис. 4.14), радиус которого  $R_{\text{ш}}$ . Известно, что электрический заряд  $Q$  находится на поверхности такого шара. Поверхностная плотность заряда

$$\sigma = Q/S = Q/(4\pi R_{\text{ш}}^2).$$

Поле металлического шара с зарядом  $Q$  совпадает вне шара с полем равного ему по значению точечного заряда  $Q$ , расположенного в центре шара (4.8); поэтому напряженность поля на расстоянии  $R$  от центра шара и, в частности, у его наружной поверхности, т. е. при  $R=R_{\text{ш}}$ ,

$$\mathcal{E} = Q/(4\pi\epsilon_a R^2) = Q/(4\pi\epsilon_a R_{\text{ш}}^2),$$

а электрическое смещение

$$D = \epsilon_a \mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi R_{\text{ш}}^2} = \sigma, \quad (4.16)$$

т. е. равно поверхностной плотности заряда.

Внутри металлического шара поля нет, как и во всяком проводнике в условиях электростатики (рис. 4.9). Поэтому потенциалы всех точек шара одинаковые, т. е. шар — эквипотенциальное тело, как и всякое металлическое тело в электростатическом поле.

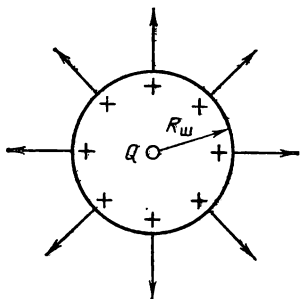


Рис. 4.14. Поле заряженного шара

Аналогично потоку вектора напряженности поля (4.7) применяется понятие потока вектора электрического смещения.

Поток вектора смещения  $N_D$  в однородном поле равен произведению численного значения вектора смещения  $D$  и площадки  $S$ , во всех точках которой вектор смещения имеет одинаковое значение и направлен перпендикулярно к ней, т. е.

$$N_D = DS. \quad (4.17)$$

При неоднородном поле произвольную поверхность площадью  $S$  разбивают на элементарные, в пределах каждой из которых смещение одинаково; так что поток вектора смещения через такую элементарную площадку

$$dN_D = D_n dS,$$

где  $D_n$  — нормальная составляющая вектора смещения (перпендикулярная к элементарной площадке).

Поток вектора смещения через произвольную замкнутую поверхность находится суммированием элементарных потоков:

$$N_D = \oint dN_D = \oint D_n dS. \quad (4.18)$$

Так как  $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$  и соответственно  $D_n = \epsilon_a E_n$ , то поток вектора смещения

$$N_D = \epsilon_a N = \epsilon_r \epsilon_0 N. \quad (4.19)$$

В частности, в случае шаровой поверхности

$$N_D = \oint D_n dS = \epsilon_r \epsilon_0 \oint E_n dS = Q. \quad (4.20)$$

Таким образом, поток вектора электрического смещения через шаровую поверхность равен заряду, расположенному внутри поверхности.

Полученное выражение  $N_D = Q$  справедливо для замкнутой поверхности любой формы, охватывающей заряд, как в однородной среде с  $\epsilon_r = \text{const}$ , так и в среде, диэлектрическая проницаемость которой неодинакова в различных участках среды, например в двухслойном конденсаторе.

На поверхности шара, как следует из (4.18),

$$N_D = D \cdot 4\pi R_{\text{ш}}^2,$$

откуда определяется электрическое смещение у поверхности шара:

$$D = N_D / (4\pi R_{\text{ш}}^2) = Q / (4\pi R_{\text{ш}}^2),$$

что согласуется с (4.16).

Соотношение (4.20), как и (4.9), называют теоремой Гаусса. Для расчета электростатических полей в неоднородных средах теорема Гаусса в форме (4.20) предпочтительней формы (4.9), так как в (4.20) не входит проницаемость среды.

#### 4.6. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ ДИЭЛЕКТРИКОВ

При нормальных условиях диэлектрик (изолятор) обладает ничтожной электропроводностью. Это свойство сохраняется до тех пор, пока напряженность внешнего электрического поля не достигнет значения, при котором произой-



дет пробой диэлектрика, т.е. местное разрушение его с образованием канала высокой проводимости.

Напряженность поля, при котором происходит пробой диэлектрика, называется электрической прочностью диэлектрика  $\mathcal{E}_{\text{пр}}$ , а напряжение — пробивным  $U_{\text{пр}}$ . Отношение пробивного напряжения к толщине  $h$  диэлектрика в месте пробоя равно напряженности поля при пробое, т.е. электрической прочности:

$$\mathcal{E}_{\text{пр}} = U_{\text{пр}}/h. \quad (4.21)$$

Электрическая прочность измеряется в кВ/см или кВ/мм.

Напряженность электрического поля, которая допускается в диэлектрике (изоляторе) при его применении в электротехнических установках, называется допустимой напряженностью. Для надежной работы установки нужно, чтобы допустимая напряженность была в несколько раз меньше электрической прочности.

Характер пробоя твердого диэлектрика может быть различным. При электрическом пробое немногочисленные (в начальный момент) свободные электроны в диэлектрике под действием электрического поля достигают критической скорости, достаточной для выбивания новых электронов из нейтральных атомов и молекул, так что возникает ударная ионизация, приводящая к пробую.

При электрохимическом пробое длительное воздействие напряжения, под влиянием которого развиваются электрохимические процессы, приводит к необратимым физико-химическим изменениям в диэлектрике и, в частности, к увеличению электрической проводимости и уменьшению электрической прочности диэлектрика, что и приводит к пробую.

При тепловом пробое происходит разогрев диэлектрика в электрическом поле до значений, при которых возникает термическое повреждение или разрушение, например, растрескивание, обугливание и т.д. Причиной разогрева могут быть диэлектрические потери или увеличение электрической проводимости и непропорциональное увеличение тока при повышении напряжения вследствие отрицательного температурного коэффициента сопротивления.

При пробое жидких диэлектриков происходят и тепловые, и электрические процессы, в частности разрушение молекул диэлектрика силами электрического поля. Одной из решающих причин пробоя является наличие примесей

и особенно влаги. При тепловом пробое жидкого диэлектрика происходит перегрев в местах скопления наибольшего количества примесей и образование газового мостика между электродами. Очисткой жидкого диэлектрика, и в частности трансформаторного масла, от примесей и влаги можно в несколько раз повысить его электрическую прочность.

Пробой газовых диэлектриков был рассмотрен в § 3.3.

После пробоя газового и жидкого диэлектриков и снятия напряжения электрические свойства диэлектрика почти полностью восстанавливаются вследствие подвижности частиц. При пробое твердого диэлектрика канал высокой проводимости сохраняется и после снятия напряжения и диэлектрик выходит из строя.

#### 4.7. ЭЛЕКТРОИЗОЛЯЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Всякая электрическая цепь должна не только иметь токопровод, т. е. путь, по которому проходит электрический ток, но и быть защищенной от прохождения тока по каким-либо побочным путям, вне этого токопровода. Таким образом, токопровод на всем протяжении должен быть окружен электрической изоляцией, которая отделяет токопровод от окружающей среды и разделяет друг от друга участки токопровода, находящиеся под различными потенциалами. Кроме того, изоляция должна оградить людей от прикосновения к участкам токопровода, находящимся под потенциалом, отличным от потенциала земли.

В некоторых устройствах, например в конденсаторах, кабелях, изоляция должна обладать и заданными диэлектрическими свойствами, влияющими на их электрические параметры.

Правильный выбор изоляции, рациональная конструкция ее и контроль за состоянием изоляции обеспечивают безаварийную работу электроустановок. При этом необходимо помнить, что изоляция легче подвергается действию внешних условий и легче повреждается, чем токопровод. Роль электрической изоляции и ее стоимость повышаются с увеличением рабочего напряжения электроустановки.

Получение и рациональное применение новых изоляционных материалов высокой электрической прочности, высокой нагревостойкости и с большой диэлектрической проницаемостью имеет очень большое технико-экономическое значение, так как дает возможность уменьшить габариты,

массу и стоимость электрических сетей, линий передач электроэнергии и других электротехнических устройств.

К свойствам электроизоляционных материалов предъявляются весьма разнообразные требования, главные из которых: 1) электрическая прочность; 2) удельное объемное сопротивление; 3) удельное поверхностное сопротивление; 4) диэлектрическая проницаемость; 5) диэлектрические потери. Кроме того, большое значение имеют механические, термические и другие физические и химические свойства.

В соответствии с большим разнообразием требований в электротехнике применяются самые различные электроизоляционные материалы, которые можно разделить на группы по разным признакам: 1) по их агрегатному состоянию на газообразные, жидкие, твердые; 2) по их химической природе на органические и неорганические; 3) по их нагревостойкости на классы и т. д.

#### 4.8. ЕМКОСТЬ. КОНДЕНСАТОР

Система из двух металлических пластин или проводников произвольной формы, разделенных диэлектриком, образуют конденсатор. Пластины конденсатора часто называются электродами или обкладками.

Примерами естественных конденсаторов могут служить два провода электрической сети, две жилы кабеля, жила кабеля и броня, проходной изолятор (изолирующий провод от стены или стенки металлического кожуха). Широко применяются изготавливаемые промышленностью конденсаторы различного устройства, в частности плоские, образуемые параллельно расположенными металлическими изолированными друг от друга пластинами.

Обозначения конденсаторов на схемах показаны на рис. 4.15.

Конденсаторы обладают свойством накапливать и удерживать на своих обкладках равные по значению и разные по знаку электрические заряды  $+Q$  и  $-Q$ . Емкостью конденсатора называется коэффициент пропорциональности между зарядом  $Q$  и напряжением  $U$  между обкладками конденсатора:

$$C = Q/U. \quad (4.22)$$

В Международной системе единиц СИ единицей измерения емкости служит ф а р а д (Ф) — емкость конденсатора,

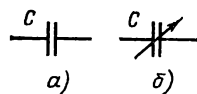
заряд которого равен 1 Кл при напряжении на обкладках, равном 1 В, т. е.  $1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/1 В}$ .

Фарад — крупная единица, поэтому чаще емкость измеряют в микрофарадах ( $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$ ) и пикофарадах ( $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$ ).

Наша промышленность выпускает конденсаторы емкостью от единиц пикофарад до тысяч микрофарад. Номинальное напряжение конденсаторов также весьма различ-

Рис. 4.15. Обозначение на схемах конденсатора:

*а* — постоянной емкости; *б* — переменной емкости



но — от единиц вольт до десятков киловольт. Естественно, что конденсаторы с такими различными параметрами отличаются друг от друга размерами, конструкцией и диэлектриком. Чаще применяются конденсаторы бумажные, слюдяные, керамические и электролитические. Электролитические конденсаторы могут работать только в цепях постоянного тока, все остальные — в цепях как постоянного, так и переменного тока.

Бумажные конденсаторы (рис. 4.16, *а, б*) состоят из двух длинных лент фольги, изолированных лентами тонкой парафинированной бумаги. Свернутые ленты помещаются в защитную оболочку. Обкладки соединяются с выводами, конструкция которых определяется номинальным напряжением.

Самые большие по размерам бумажные конденсаторы применяются для подключения аппаратуры телемеханики и связи к высоковольтным линиям.

Самые маленькие по размерам конденсаторы применяются в радиоаппаратуре и автоматических устройствах. Например, керамический конденсатор КДС-1 емкостью 1000 пФ, с номинальным напряжением 250 В имеет форму диска диаметром 4,2 мм и высотой 2,5 мм.

У конденсаторов переменной емкости одна обкладка поворачивается относительно другой (рис. 4.16, *в*). Для увеличения емкости число пар обкладок увеличивают.

В электролитических конденсаторах диэлектриком служит тончайший слой окиси на поверхности алюминиевой или танталовой фольги — одной из обкладок конденсатора. Второй обкладкой служит бумага или ткань, пропитанная густым раствором электролита. Малая толщина слоя окиси

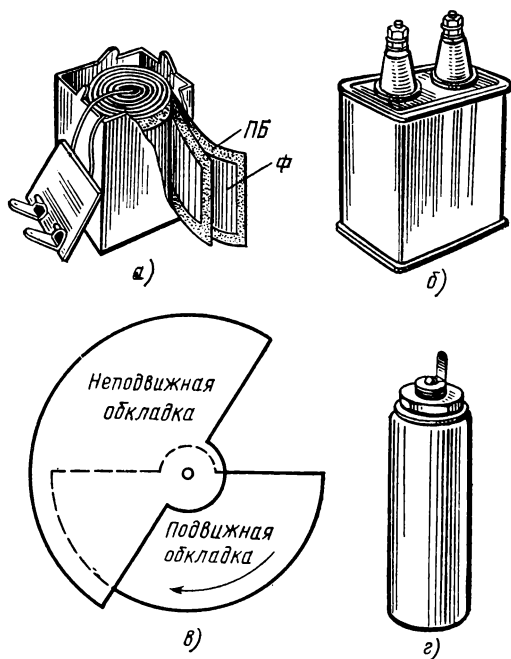


Рис. 4.16. Конденсаторы:

*а* и *б* — бумажные; *в* — переменной емкости; *г* — электролитический

дает возможность получить большую емкость при небольших размерах конденсатора. Внешний вид конденсатора типа КЭ-2 емкостью до 100 мкФ, с номинальным напряжением 500 В, диаметром до 40 мм и высотой до 100 мм показан на рис. 4.16, г.

#### 4.9. СОЕДИНЕНИЯ КОНДЕНСАТОРОВ

При отсутствии конденсатора нужной емкости или на заданное номинальное напряжение его можно заменить несколькими конденсаторами с другими параметрами.

Конденсаторы могут соединяться последовательно и параллельно.

При последовательном соединении на обкладках всех конденсаторов будут одинаковые по абсолютному значению

электрические заряды, например, в случае трех конденсаторов (рис. 4.17)

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q.$$

Это объясняется тем, что от источника питания заряды поступают только на внешние обкладки всего соединения, а на внутренних обкладках они получаются только за счет разделения зарядов, ранее нейтрализовавших друг друга.

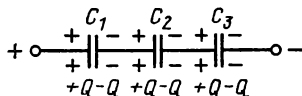
Напряжения на отдельных конденсаторах при их последовательном соединении зависят от емкостей конденсаторов. По (4.22)

$$U_1 = Q/C_1; \quad U_2 = Q/C_2; \quad U_3 = Q/C_3,$$

а общее напряжение

$$U = U_1 + U_2 + U_3.$$

Рис. 4.17. Последовательное соединение конденсаторов



Общая или эквивалентная емкость трех последовательно соединенных конденсаторов

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_1 + U_2 + U_3},$$

откуда

$$\frac{1}{C} = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}. \quad (4.23)$$

Таким образом, *при последовательном соединении конденсаторов величина, обратная общей или эквивалентной емкости, равна сумме обратных величин емкостей отдельных конденсаторов.*

Из (4.23) эквивалентная емкость трех последовательно соединенных конденсаторов

$$C = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1}.$$

В случае двух последовательно соединенных конденсаторов ( $C_1$  и  $C_2$ )

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (4.24)$$

Практически чаще всего применяется параллельное соединение конденсаторов, при котором напряжения на всех конденсаторах одинаковы, например, для случая трех конденсаторов (рис. 4.18)

$$U_1 = U_2 = U_3 = U.$$

Заряды на обкладках отдельных конденсаторов в общем случае имеют разные значения; по (4.22)

$$Q_1 = C_1 U; \quad Q_2 = C_2 U \text{ и } Q_3 = C_3 U.$$

Общий заряд параллельно соединенных конденсаторов равен сумме зарядов отдельных конденсаторов, т. е.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

откуда общая или эквивалентная емкость

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{U} = C_1 + C_2 + C_3. \quad (4.25)$$

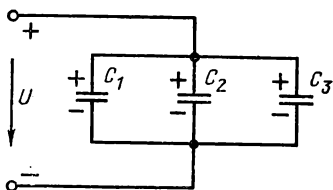


Рис. 4.18. Параллельное соединение конденсаторов

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов общая или эквивалентная емкость равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

При другом числе последовательно или параллельно соединенных конденсаторов, пользуясь формулами, аналогичными (4.23) и (4.25), нетрудно определить эквивалентные емкости.

В случае  $n$  одинаковых последовательно соединенных конденсаторов  $C_n$  общая емкость

$$\frac{1}{C} = n \frac{1}{C_n} \text{ или } C = C/n. \quad (4.26)$$

При  $n$  одинаковых параллельно соединенных конденсаторах  $C_n$  общая емкость

$$C = nC_n. \quad (4.27)$$

**Пример 4.2.** Определить эквивалентную емкость трех конденса-

ров при а) последовательном и б) параллельном их соединении, если  $C_1=2$  мкФ,  $C_2=4$  мкФ,  $C_3=6$  мкФ.

Решение. а) Эквивалентная емкость последовательного соединения находим по (4.23):

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{22}{24}$$

и  $C \approx 1,1$  мкФ,

т. е. емкость уменьшается по сравнению с емкостями отдельных конденсаторов.

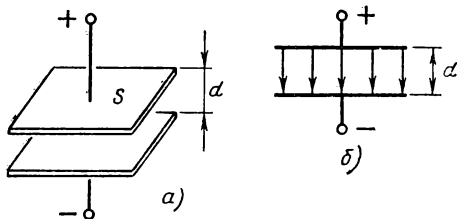
б) Эквивалентная емкость параллельного соединения конденсаторов

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = 2 + 4 + 6 = 12 \text{ мкФ.}$$

#### 4.10. ПЛОСКИЙ КОНДЕНСАТОР

Простой плоский конденсатор состоит из двух параллельно расположенных металлических пластин (рис. 4.19, а), разделенных диэлектриком.

Рис. 4.19. Плоский конденсатор



При относительно небольшом расстоянии  $d$  между пластинами по сравнению с их линейными размерами, пренебрегая искажением поля у краев, можно считать электрическое поле между пластинами однородным (рис. 4.19, б). Напряженность однородного поля конденсатора согласно (4.10) и (1.4)

$$E = Q/(\epsilon_a S) = U/d, \quad (4.28)$$

где  $S$  — площадь пластины.

Из (4.28) емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_a \frac{S}{d} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d}, \quad (4.29)$$



или в фарадах

$$C = 8,85 \epsilon_r \frac{S}{d} 10^{-12}, \quad (4.29a)$$

если  $S$  — площадь пластины,  $m^2$ ;  $d$  — расстояние между пластинами,  $m$ .

Таким образом, емкость плоского конденсатора пропорциональна площади пластин, проницаемости диэлектрика и обратно пропорциональна расстоянию между пластинами.

**Пример 4.3.** Определить емкость плоского конденсатора с изоляцией из парафинированной бумаги ( $\epsilon_r=4,3$ ) толщиной  $0,1$  мм, если площадь обкладки  $S=50$   $cm^2$ .

**Решение.** По (4.29a) находим

$$C = 8,85 \cdot 10^{-12} \epsilon_r S/d = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4,3 \cdot 50 \cdot 10^{-4} / 10^{-4} = 1900 \text{ пФ}.$$

#### 4.11. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ И ЕМКОСТЬ ДВУХСЛОЙНОГО КОНДЕНСАТОРА

В плоском конденсаторе с одним диэлектриком (рис. 4.19) напряженность поля постоянная. Если между пластинами плоского конденсатора находятся два слоя различных диэлектриков и поверхность их раздела параллельна пластинам (рис. 4.20), то напряженность поля в двух диэлектриках будет не одинаковой. Но в каждом из диэлектриков электрические линии перпендикулярны поверхностям пластин, т. е. эквипотенциальные поверхности параллельны пла-

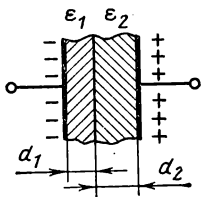


Рис. 4.20. Плоский конденсатор с двухслойным диэлектриком

стинам. Граница раздела диэлектриков тоже параллельна пластинам, т. е. эквипотенциальная поверхность. Следовательно, для расчета поля и вычисления емкости можно предположить, что вдоль поверхности раздела помещен металлический лист ничтожной толщины. Внесение листа никаких изменений в электрическом поле не вызывает, так как поверхность раздела остается эквипотенциальной (лю-

бое проводящее тело в электростатическом поле эквипотенциально). Такой плоский конденсатор можно рассматривать состоящим из двух последовательно соединенных плоских конденсаторов, емкости которых

$$C_1 = \epsilon_0 \epsilon_1 S/d; \quad C_2 = \epsilon_0 \epsilon_2 S/d, \quad (4.30)$$

а общая емкость плоского конденсатора по (4.24)

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

При последовательном соединении конденсаторов заряды на всех обкладках численно равны. Следовательно,

$$Q = C_1 U_1 = C_2 U_2 = CU,$$

откуда напряжения на конденсаторах

$$U_1 = UC/C_1 \text{ и } U_2 = UC/C_2.$$

Заменив емкости их выражениями из (4.30) и (4.24), получим

$$U_1 = U \frac{\epsilon_2 d_1}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}; \quad U_2 = U \frac{\epsilon_1 d_2}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}$$

и напряженности поля в первом и втором слоях диэлектрика

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \frac{U_1}{d_1} = U \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}; \\ \mathcal{E}_2 &= \frac{U_2}{d_2} = U \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Следовательно, напряженности поля в диэлектриках обратно пропорциональны диэлектрическим проницаемостям:

$$\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2 = \epsilon_2/\epsilon_1, \quad (4.32)$$

а электрические смещения одинаковы:

$$D_1 = \epsilon_0 \epsilon_1 \mathcal{E}_1; \quad D_2 = \epsilon_0 \epsilon_2 \mathcal{E}_2 \text{ и } D_1 = D_2. \quad (4.33)$$

На границе раздела диэлектриков напряженность поля изменяется скачком.

Из (4.32) следует, что если в диэлектрике конденсатора есть слой, проницаемость которого меньше проницаемости диэлектрика (например, слой или пузырьки воздуха), то в этом случае могут возникнуть значительные напряженности поля, приводящие к электрическому разряду. Выделяющиеся при разрядах химически активные вещества могут стать причиной разрушения изоляции конденсатора.

Поэтому сушка изоляции обмоток машин, проводов, кабелей производится в баках при малых давлениях с целью удаления из изоляции воздуха.

#### 4.12. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ КОНДЕНСАТОР

В цилиндрическом конденсаторе радиально направленное электрическое поле возникает между двумя цилиндрическими электродами, имеющими общую ось (рис. 4.21). При этом предполагается, что длина конденсатора значительно превосходит радиусы внутреннего и внешнего электродов, так что искажением поля у краев можно пренебречь. Из условий симметрии следует, что эквипотенциальные поверхности цилиндрические с той же общей осью, а электрические линии в диэлектрике направлены по радиусам (рис. 4.21, а).

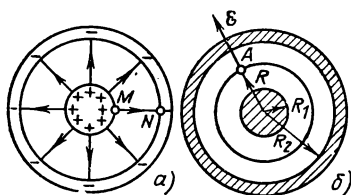


Рис. 4.21. Цилиндрический конденсатор

Определим напряженность поля в точке  $A$ , расположенной на эквипотенциальной поверхности радиуса  $R$  (рис. 4.21, б).

Если внутренний электрод заряжен положительно, а внешний отрицательно, то направление вектора напряженности поля между электродами в точке  $A$  совпадает с направлением радиуса, проходящего через точку  $A$  (рис. 4.21, б).

Так как векторы напряженности поля касательны к электрическим линиям и перпендикулярны к эквипотенциальным цилиндрическим поверхностям, т. е.  $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}$ , то поток вектора напряженности поля через цилиндрическую поверхность радиуса  $R$  длиной  $l$  по (4.6) или (4.7)

$$N = \mathcal{E}S = \mathcal{E}2\pi Rl,$$

а поток через любое поперечное сечение конденсатора равен нулю.

Согласно теореме Гаусса (4.9)

$$N = Q/\epsilon_r \epsilon_0,$$

откуда напряженность поля

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_r \epsilon_0 Rl}. \quad (4.34)$$

Из (4.34) следует, что напряженность поля обратно пропорциональна радиусу  $R$  эквипотенциальной поверхности. Поэтому наибольшая напряженность поля будет на поверхности внутреннего цилиндра ( $R=R_1$ ) и наименьшая — на поверхности внешнего ( $R=R_2$ ).

Для вычисления напряжения между электродами выберем точки  $M$  и  $N$  на одной и той же электрической линии (рис. 4.21, а). При этом  $dl=dR$ ;  $\mathcal{E}=\mathcal{E}_l$  и напряжение по (4.116)

$$\begin{aligned} U &= \int_{R_1}^R \mathcal{E} dR = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_r \epsilon_0 Rl} dR = \frac{Q}{2\pi\epsilon_r \epsilon_0 l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R} = \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_r \epsilon_0 l} (\ln R_2 - \ln R_1) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_r \epsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1}. \end{aligned}$$

Емкость цилиндрического конденсатора в фарадах

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_r \epsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)} = 8,85 \frac{2\pi\epsilon_r l}{\ln(R_2/R_1)} \cdot 10^{-12}, \quad (4.35)$$

где  $l$  — длина конденсатора, м.

Можно показать, что при заданном напряжении между электродами  $U$  и заданном радиусе внешнего электрода  $R_2$  напряженность поля на поверхности внутреннего цилиндра будет минимальной, если  $R_1=R_2/e$ , где  $e=2,72$  — основание натуральных логарифмов.

#### 4.13. ЕМКОСТЬ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

При расчете режима электрической линии (см. гл. 17) часто необходимо знать ее емкость.

Определим емкость двухпроводной воздушной линии ( $\epsilon_r=1$ ) с расстоянием между центрами проводов  $D$ , которое много больше радиуса проводов  $r_0$  (рис. 4.22), т. е. при  $D \gg r_0$ . Для этого сначала вычислим напряженность поля в точке  $A$ , лежащей в плоскости, проходящей через оси проводов и находящейся на расстоянии  $r > r_0$  от оси первого провода.

При  $D \gg r_0$  второй провод не влияет на распределение зарядов по поверхности первого провода. Поэтому заряд распределен по поверхности первого провода равномерно и напряженность электрического поля первого провода на цилиндрической поверхности радиуса  $r$  можно найти по теореме Гаусса, так же как для цилиндрического конденсатора (4.34):

$$\mathcal{E}_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l}.$$

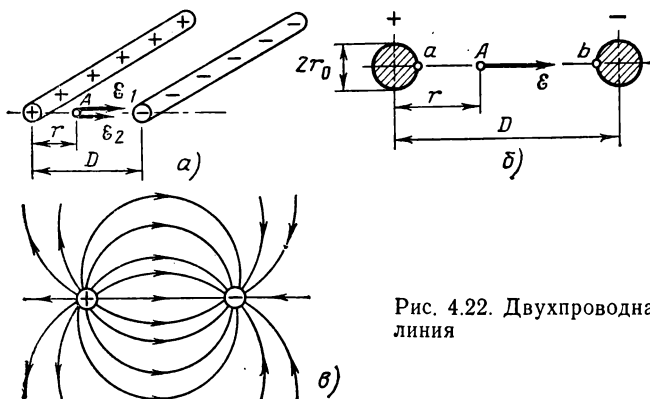


Рис. 4.22. Двухпроводная линия

Напряженность поля второго провода в той же точке  $A$ , расположенной на расстоянии  $D-r$  от оси этого провода определяется аналогично:

$$\mathcal{E}_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 (D-r) l}.$$

Векторы напряженности поля  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  в точке  $A$  направлены одинаково (рис. 4.22, а); поэтому результирующая напряженность в этой точке

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{D-r} \right). \quad (4.36)$$

Напряжение между проводами вычислим, выбрав точку  $a$  на поверхности первого провода и точку  $b$  на поверхности второго, находящиеся на одной электрической линии (рис. 4.22 б), которая проходит через точку  $A$ . При этом

$$U = U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \int_{r_0}^{D-r_0} \mathcal{E} dr,$$

или, подставив выражение (4.36),

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left( \int_{r_0}^{D-r_0} \frac{1}{r} dr + \int_{r_0}^{D-r_0} \frac{1}{D-r} dr \right) = \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} [\ln(D-r_0) - \ln r_0 - \ln r_0 + \ln(D-r_0)] = \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} 2 \ln \frac{D-r_0}{r_0} \approx \frac{Q}{\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{D}{r_0}, \end{aligned}$$

так как  $D \gg r_0$  и разность  $D-r_0$  мало отличается от  $D$ .

Из последнего выражения найдем отношение заряда  $Q$  к напряжению  $U$ , т. е. емкость двухпроводной линии:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln(D/r_0)}. \quad (4.37)$$

Подставив значение  $\epsilon_0$ , получим емкость в фарадах:

$$C = 8,85 \frac{\pi l}{\ln(D/r_0)} \cdot 10^{-12}, \quad (4.37a)$$

где  $l$  — длина линии, м.

Напряженность поля на поверхности провода (при  $r = r_0$ ), например в точке  $a$  или  $b$ , имеет максимальное значение:

$$\mathcal{E}_{\max} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{D-r_0} \right) \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r_0 l} = \frac{U}{2r_0 \ln(D/r_0)}.$$

На рис. 4.22, *в* показана картина электрических линий поля между проводами.

#### 4.14. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОНДЕНСАТОРЫ

Выше были рассмотрены конденсаторы, проницаемость диэлектрика которых не зависит от напряжения или заряда (линейная среда). Для таких конденсаторов зависимость между зарядом и напряжением на обкладках, называемая кулон-вольтной характеристикой  $Q(U)$ , представляет собой прямую линию (рис. 4.23, *а*), проходящую через начало координат. На том же рисунке емкость изображена ординатой прямой  $C(U)$ , параллельной оси абсцисс, т. е. емкость не зависит от напряжения.

Применение в конденсаторах диэлектриков с проницаемостью, зависящей от напряженности поля, делает зависимость между зарядом конденсатора и напряжением нели-

нейной (рис. 4.23, б). Следовательно, емкость такого конденсатора зависит от напряжения. Такие конденсаторы называются нелинейными или варикондами, обозначение их на схемах показано на рис. 4.24.

Для нелинейных конденсаторов применяются два понятия емкости: статическая и дифференциальная.

Статическая емкость, соответствующая, например, точке  $a$  кулон-вольтной характеристики (рис. 4.23, б), определяется отношением заряда  $Q_a$  к напряжению  $U_a$ :

$$C_{\text{ст}} = \frac{Q_a}{U_a} = \frac{m_Q}{m_U} \frac{a_z}{Oz} = m_c \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол наклона прямой, соединяющей точку  $a$  с началом координат кулон-вольтной характеристики;  $m_Q$  [Кл/см]

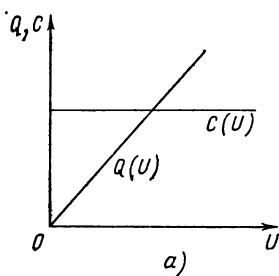


Рис. 4.23

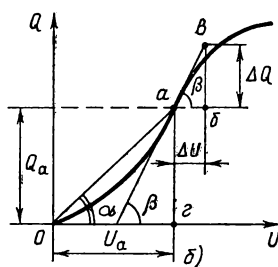


Рис. 4.24

Рис. 4.23. Линейная (а) и нелинейная (б) кулон-вольтные характеристики

Рис. 4.24. Обозначение на схемах вариконда

и  $m_U$  [В/см] — масштабы заряда (по оси ординат) и напряжения (по оси абсцисс).

Дифференциальная емкость определяется отношением малого приращения заряда  $\Delta Q$  к соответствующему приращению напряжения  $\Delta U$ , т. е.

$$C_{\text{диф}} = \frac{\Delta Q}{\Delta U} = \frac{m_Q}{m_U} \frac{b\delta}{a\beta} = m_c \operatorname{tg} \beta,$$

где  $\beta$  — угол наклона к оси абсцисс касательной, проведенной через точку  $a$  (рис. 4.23, б).

В качестве диэлектриков в варикондах применяются материалы, получившие название сегнетоэлектриков, диэлектрическая проницаемость которых зависит от напря-

женности поля и может достигать очень больших значений — нескольких тысяч.

Впервые зависимость проницаемости от напряженности поля была обнаружена у сегнетовой соли, откуда и произошло название этой группы диэлектриков, которые были открыты и изучены советскими физиками (1944—1950 гг.).

Сегнетоэлектрики обладают самопроизвольной (спонтанной) поляризацией. До воздействия на них электрического поля они имеют небольшие поляризованные области — домены, векторы поляризации которых расположены хаотически и поэтому взаимно компенсируются. Под действием внешнего поля домены стремятся ориентироваться в направлении поля, так что происходит поляризация, зависящая от напряженности электрического поля.

Для сегнетоэлектрика, ранее не находившегося в электрическом поле, зависимость смещения от напряженности поля  $D(\mathcal{E})$  выражается кривой начальной поляризации. После окончания воздействия электрического поля в сегнетоэлектрике сохраняется остаточное смещение, т. е. сегнетоэлектрики обладают гистерезисом (подробнее о гистерезисе см. в гл. 6).

Изменения температуры вызывают изменение диэлектрических свойств сегнетоэлектриков, что является их существенным недостатком.

Вариконды применяются в счетно-решающих устройствах, в автоматике и радиотехнике.

#### 4.15. ЗАРЯДКА И РАЗРЯДКА КОНДЕНСАТОРА. ТОК СМЕЩЕНИЯ

а) Зарядка конденсатора. Замкнув ключ (рис. 4.25, а), присоединим цепь, состоящую из незаряженного конденсатора емкостью  $C$  и резистора с сопротивлением  $r$ , к источ-

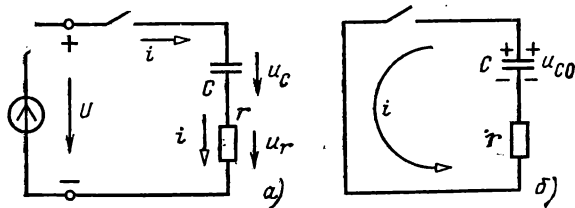


Рис. 4.25. Зарядка (а) и разрядка (б) конденсатора



нику постоянного напряжения  $U$  (внутреннее сопротивление источника равно нулю).

Напряжение источника питания равно сумме напряжений на резисторе и на конденсаторе (второй закон Кирхгофа):

$$U = u_r + u_c. \quad (4.38)$$

Здесь напряжения на резисторе и на конденсаторе обозначены малыми (строчными) буквами, чтобы подчеркнуть их зависимость от времени  $t$  в процессе зарядки конденсатора, т. е.  $u_r = u_r(t)$  и  $u_c = u_c(t)$ .

Так как в момент включения конденсатор еще не заряжен, то напряжение на нем  $u_c = u_{c0} = 0$ . Поэтому в начальный момент времени напряжение на сопротивлении  $r$  равно напряжению источника питания  $U$  и возникает ток

$$i_0 = U/r = I.$$

Прохождение тока  $i = i(t)$  сопровождается постепенным накоплением заряда  $q = q(t)$  на обкладках конденсатора, и на нем появляется напряжение  $u_c = q/C$ , а напряжение на сопротивлении  $r$  уменьшается, так как по (4.38)

$$u_r = ri = U - u_c. \quad (4.39)$$

Из (4.39) определим ток

$$i = (U - u_c)/r,$$

который с увеличением заряда  $q$ , а следовательно, и напряжения  $u_c$  уменьшается; одновременно уменьшается скорость накопления заряда  $q$ , так как ток, по определению, равен скорости изменения заряда [см. также (1.7)]:

$$i = dq/dt. \quad (4.40)$$

Учитывая, что  $q = Cu_c$ , находим другую зависимость между током и напряжением на конденсаторе:

$$i = dCu_c/dt = Cdu_c/dt. \quad (4.41)$$

С течением времени конденсатор продолжает заряжаться, но заряд  $q$  и напряжение на нем  $u_c$  растут все медленнее, а ток в цепи постепенно уменьшается пропорционально разности напряжений  $U - u_c$  (4.39).

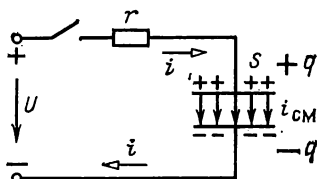
Через достаточно большой интервал времени (теоретически бесконечно большой) напряжение на конденсаторе достигает значения, равного напряжению источника питания  $U$ , ток становится равным нулю и процесс зарядки конденсатора заканчивается.

б) **Разрядка конденсатора.** Рассмотрим теперь процесс разрядки конденсатора  $C$ , который был заряжен от источника до напряжения  $u_{C0}=U$ , через резистор с сопротивлением  $r$  (рис. 4.25, б).

В начальный момент в цепи возникает ток  $i_0=u_{C0}/r=U/r=I$ , конденсатор начнет разряжаться и напряжение на нем  $u_C$  уменьшится. По мере уменьшения напряжения  $u_C$  уменьшается и ток в цепи  $i=u_C/r$ .

в) **Ток смещения в конденсаторе.** При зарядке (и разрядке) конденсатора происходит изменение напряженнос-

Рис. 4.26. Ток смещения в конденсаторе



ти электрического поля  $\mathcal{E}$  и электрического смещения  $D$  в диэлектрике.

Например, для плоского конденсатора (рис. 4.26) с площадью пластин  $S$  для любого момента времени можно аналогично (4.13а) записать

$$D = \epsilon_a \mathcal{E} = q/S,$$

где  $D=D(t)$ ,  $\mathcal{E}=\mathcal{E}(t)$  и  $q=q(t)$ . Следовательно, заряд

$$q = DS, \quad (4.42)$$

а его приращение при зарядке (или разрядке)

$$dq = SdD = dN_D,$$

где  $N_D$  — поток вектора смещения между обкладками конденсатора.

Изменение потока смещения между обкладками конденсатора можно рассматривать как электрический ток в диэлектрике, который называется током смещения:

$$i_{cm} = dN_D/dt = SdD/dt = dq/dt. \quad (4.43)$$

Ток смещения равен току в проводах, соединяющих конденсатор с источником питания (4.40):  $i=dq/dt$ , как и должно быть в неразветвленной цепи (рис. 4.26).

Отношение

$$i_{cm}/S = dD/dt$$

представляет собой плотность тока смещения. Ток смещения в диэлектрике плоского конденсатора можно определить через плотность тока смещения, умножив ее на площадь поперечного сечения поля, или, что то же, площадь пластин конденсатора  $S$ .

Ток смещения позволяет рассматривать электрическую цепь с конденсатором как замкнутую цепь тока, по одному участку которой (провода и резистор  $r$ ) проходит ток проводимости, а по другому (диэлектрик конденсатора) равный ему ток смещения (рис. 4.26).

#### 4.16. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Для определения энергии, запасаемой в электрическом поле конденсатора, рассмотрим его зарядку от источника постоянного напряжения (рис. 4.25, а).

Перепишем уравнение (4.38) в виде

$$U = u_r + u_c = ri + u_c.$$

Умножив обе части этого уравнения на  $idt$ , получим в левой части выражение энергии, отданной источником питания в цепь за время  $dt$ :

$$U idt = ri^2 dt + u_c idt$$

или после подстановки тока  $i$  по (4.41)

$$CU du_c = ri^2 dt + Cu_c du_c.$$

Первый член правой части этого уравнения ( $ri^2 dt$ ) выражает энергию, переходящую за время  $dt$  в тепло, так как по (1.45) мощность преобразования в тепло равна  $ri^2$ , а второй

$$Cu_c du_c = dW$$

— энергию, запасаемую в электрическом поле при увеличении напряжения на конденсаторе на  $du_c$ .

При зарядке конденсатора до напряжения  $U$  источник питания расходует энергию

$$W_n = \int_0^U UC du_c = UC \int_0^U du_c = U^2 C = UQ. \quad (4.44)$$

Только половина этой энергии запасается в электрическом поле конденсатора, так как

$$W = \int_0^U C u_C du_C = CU^2/2 = UQ/2. \quad (4.45)$$

Следовательно, вторая половина энергии источника преобразуется в тепло в сопротивлении  $r$ :

$$W_T = W_{\text{и}} - W = UQ - UQ/2 = UQ/2. \quad (4.46)$$

В однородном поле заряженного плоского конденсатора энергия электрического поля  $W = CU^2/2$  равномерно распределена в объеме поля  $V = Sd$ .

Таким образом, энергия в единице объема или плотность энергии электрического поля

$$W_0 = \frac{CU^2}{2V} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S U^2}{2Sd^2} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \mathcal{E}^2}{2} = \frac{D\mathcal{E}}{2}. \quad (4.47)$$

Формула (4.47) справедлива и для неоднородного поля.

Зная плотность энергии, определим силу взаимодействия  $F$  между обкладками плоского конденсатора. Для этого предположим, что заряженный конденсатор отсоединили от источника питания, и допустим, что под действием силы взаимодействия  $F$  пластины (площадью  $S$ ) сблизились на расстояние  $db$ .

Так как конденсатор отсоединен от источника питания, то работа, выполненная при этом сближении,  $Fdb$  равна изменению энергии поля  $W_0 dV$  (работа произведена за счет уменьшения энергии поля в объеме  $dV$ ):

$$Fdb = W_0 dV$$

и, следовательно, сила

$$F = W_0 dV/db.$$

Изменение объема  $dV = Sdb$ , поэтому

$$F = W_0 S = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \mathcal{E}^2 S}{2} = 8,85 \frac{\epsilon_r \mathcal{E}^2 S}{2} \cdot 10^{-12}, \quad (4.48)$$

где  $F$  — сила взаимодействия, Н;  $\mathcal{E}$  — напряженность поля, В/м;  $S$  — площадь пластины, м<sup>2</sup>.

**Пример 4.4.** Определить силу взаимодействия между пластинами плоского конденсатора. Поверхность каждой пластины  $S = 240$  см<sup>2</sup>, расстояние между пластинами  $d = 0,1$  см, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_r = 1$ , напряжение на выводах конденсатора  $U = 1500$  В.

**Решение.** Напряженность поля в диэлектрике (4.28)

$$\mathcal{E} = U/d = 1500/10^{-3} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ В/м}$$

и по формуле (4.48) сила взаимодействия

$$F = 8,85 \cdot 10^{-12} (1,5 \cdot 10^6)^2 \cdot 240 \cdot 10^{-4} / 2 = 0,238 \text{ Н.}$$

## Глава пятая

## МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### 5.1. ИНДУКЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

**а) Закон Ампера и вектор индукции.** Опытами установлено, что магнитное поле может быть обнаружено не только по действию на магнитную стрелку, но и по взаимному

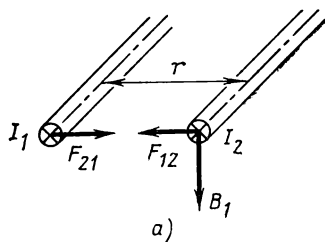


Рис. 5.1. Взаимодействие двух длинных прямых проводов с токами

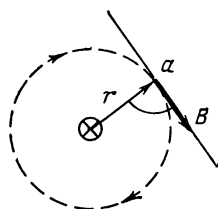
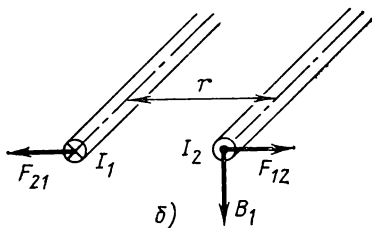


Рис. 5.2. Вектор индукции прямолинейного провода с током

силовому действию движущихся электрических зарядов, например проводников с токами. Наиболее просто сила определяется для двух параллельных проводов с постоянными токами  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 5.1), если расстояние между проводами  $r$  много больше радиуса  $r_0$  каждого из проводов. Провода с токами одинакового направления притягиваются (рис. 5.1, а), а с токами противоположного направления отталкиваются (рис. 5.1, б). По закону Ампера силы,

действующие на каждый из проводов длиной  $l$ , численно одинаковы:

$$F_{12} = F_{21} = \mu_a \frac{I_1 I_2}{2\pi r} l$$

и называются электромагнитными силами. При определении сил предполагается, что длина  $l$  каждого из проводов много больше расстояния  $r$  между ними.

Коэффициент пропорциональности  $\mu_a$ , называемый абсолютной магнитной проницаемостью, учитывает влияние среды, в которой находятся провода. Для всех сред, кроме ферромагнитных материалов (гл. 6), можно считать, что магнитная проницаемость не зависит от значений и направлений токов (линейная среда).

Величина

$$B_1 = \mu_a \frac{I_1}{2\pi r} \quad (5.1a)$$

характеризует интенсивность магнитного поля длинного прямолинейного провода с током  $I_1$  на расстоянии  $r$  от его оси и называется индукцией магнитного поля или магнитной индукцией.

Таким образом, силу, действующую на второй провод длиной  $l$  с током  $I_2$ , можно представить в виде произведения

$$F_{12} = B_1 (I_2 l). \quad (5.2a)$$

Индукция магнитного поля длинного прямолинейного провода с током  $I_2$  на расстоянии  $r$  от его оси

$$B_2 = \mu_a \frac{I_2}{2\pi r} \quad (5.1b)$$

и сила, действующая на первый провод длиной  $l$ ,

$$F_{21} = B_2 (I_1 l). \quad (5.2b)$$

Поскольку токи постоянные, то и магнитное поле не зависит от времени и называется стационарным (постоянным).

Как и напряженность электрического поля, индукция магнитного поля — векторная величина. Вектор напряженности электрического поля совпадает по направлению с вектором силы, действующей на точечный положительный заряд (§ 4.1). Направление вектора магнитной индукции не совпадает с направлением силы, действующей на про-

вод с током. Так, например, направление вектора  $\mathbf{B}_1$  (рис. 5.1) не совпадает с направлением вектора силы  $\mathbf{F}_{12}$ .

Чтобы найти направление вектора индукции  $\mathbf{B}$  в какой-либо точке  $a$  поля длинного прямолинейного провода с током  $I$  на расстоянии  $r$  от его оси, нужно провести через эту точку окружность с центром на оси провода (рис. 5.2). Вектор  $\mathbf{B}$  направлен по касательной к окружности в сторону, определяемую по правилу правоходового винта или буравчика: *если поступательное движение винта или буравчика совпадает с направлением тока, то направление вращения головки или рукоятки буравчика указывает, как направлен вектор индукции*. Значение вектора индукции

$$B = \mu_a \frac{I}{2\pi r} . \quad (5.3)$$

Вектор индукции провода с током имеет в различных точках поля неодинаковые значения и направления. Такое магнитное поле называется неоднородным.

Единица измерения магнитной индукции в Международной системе единиц СИ называется тесла (Тл). Связь единицы измерения индукции с другими известными единицами определим из (5.2). Учитывая, что сила измеряется в ньютонах (Н), т.е. в джоулях на метр (Дж/м), ток — в амперах (А) и длина — в метрах (м), получим

$$[B] = \left[ \frac{F}{Il} \right] = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \text{Тл}.$$

Если магнитное поле в линейной среде создается несколькими проводами с токами, то для определения индукции магнитного поля в какой-либо точке  $a$  можно применить принцип наложения. Например, в случае двух параллельных проводов с токами  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 5.3) в точке  $a$ , находящейся на расстояниях соответственно  $R_1$  и  $R_2$  от осей проводов, индукции по (5.3) будут равны

$$B_1 = \mu_a \frac{I_1}{2\pi R_1} ; \quad B_2 = \mu_a \frac{I_2}{2\pi R_2} , \quad (5.4)$$

причем при  $R_1 > R_2$  индукция  $B_1 < B_2$ . Вектор индукции суммарного магнитного поля определяется как геометрическая сумма векторов (рис. 5.3):

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2, \quad (5.5)$$

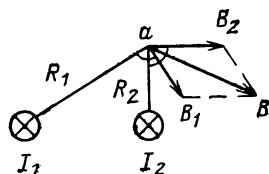
где значения  $B_1$  и  $B_2$  нужно найти по (5.4), а направления — по правилу правоходового винта.

**б) Магнитная проницаемость.** Из (5.3) найдем единицу измерения абсолютной магнитной проницаемости среды в системе СИ:

$$[\mu_a] = \left[ \frac{B \cdot 2\pi r}{I} \right] = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{А}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{А}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м} \cdot \text{А}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{м}}.$$

Единица  $\text{Ом} \cdot \text{с}$  называется **генри (Гн)** — единица индуктивности (см. § 7.5), единица абсолютной магнитной проницаемости называется **генри на метр (Гн/м)**.

Рис. 5.3. Построение суммарного вектора магнитной индукции



Различные среды и материалы имеют разные значения абсолютной магнитной проницаемости. Абсолютная магнитная проницаемость вакуума называется **магнитной постоянной**. При построении Международной системы единиц СИ для магнитной постоянной было выбрано значение

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \approx 125 \cdot 10^{-8} \text{ Гн/м}. \quad (5.6)$$

Абсолютные магнитные проницаемости различных сред и материалов сравнивают с магнитной постоянной. Отношение абсолютной магнитной проницаемости среды или материала к магнитной постоянной  $\mu_0$  — безразмерная величина, которая называется **относительной магнитной проницаемостью** (часто сокращенно просто **магнитной проницаемостью**).

$$\mu_r = \mu_a / \mu_0 \text{ и } \mu_a = \mu_0 \mu_r \approx 125 \cdot 10^{-8} \mu_r \text{ Гн/м}. \quad (5.7)$$

Для диамагнитных материалов и сред (медь, серебро, ртуть, вода и др.)  $\mu_r < 1$ , например для меди  $\mu_r = 0,999995$ , а для парамагнитных (натрий, калий, алюминий, воздух и др.)  $\mu_r > 1$ , например для воздуха  $\mu_r = 1,000003$ . При электротехнических расчетах и конструировании приборов, машин и аппаратов относительная магнитная проницаемость диамагнитных и парамагнитных материалов принимается равной единице. У ферромагнитных материалов (гл. 6), иг-



рающих исключительно важную роль в электротехнике, относительная магнитная проницаемость может достигать десятков тысяч и зависит от интенсивности магнитного поля (значения индукции). Поэтому ферромагнитные материалы относятся к нелинейным средам.

**Пример 5.1.** Токи в двух параллельных проводах радиуса  $r=2$  мм одинаковые  $I_1=I_2=2$  А. Расстояние между проводами  $r=10$  см. Найти значение и направление вектора индукции в воздухе в точке  $a$  на расстоянии  $r/2$  от каждого провода при а) одинаковых и б) противоположных направлениях токов.

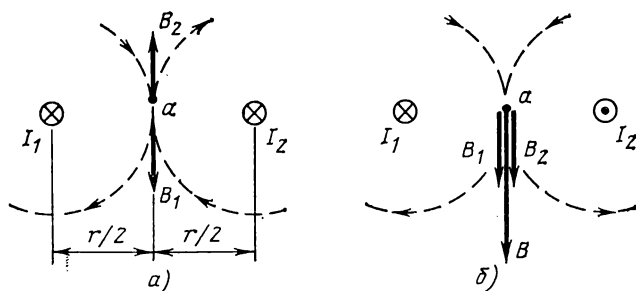


Рис. 5.4. К примеру 5.1

**Решения.** а) На рис. 5.4, а показаны направления векторов индукции  $B_1$  и  $B_2$ . Эти направления определены по правилу правоходового винта (буравчика). Так как  $I_1=I_2$ , то в точке  $a$  индукция равна нулю.

б) На рис. 5.4, б также показаны направления векторов индукции, определенные по правилу правоходового винта. Индукция

$$B = B_1 + B_2 = 2B_1,$$

где по (5.1а)

$$B_1 = \mu_a \frac{I_1}{2\pi r} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{2}{2\pi \cdot 0,1} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Тл},$$

и, следовательно,  $B=8 \cdot 10^{-6}$  Тл.

**в) Магнитные линии.** Графически магнитное поле изображают магнитными линиями, которые проводят так, чтобы в каждой точке магнитной линии вектор индукции был направлен по касательной. Например, на рис. 5.2 скружность радиуса  $r$  — это магнитная линия, проходящая через точку  $a$ . Ее направление соответствует направлению вектора индукции.

Из условий симметрии следует, что у провода с током  $I$  все магнитные линии — окружности с центром на оси провода (рис. 5.5), т. е. все точки поля, расположенные на одном и том же расстоянии от оси провода с током, находятся в одинаковых физических условиях. Картина поля будет такой же в любой другой плоскости, перпендикулярной проводу и тем самым параллельной плоскости рис. 5.5 (плоскопараллельное поле).

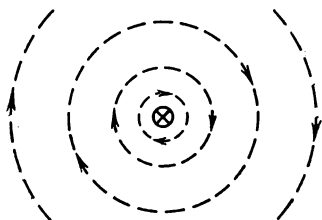


Рис. 5.5. Магнитные линии прямолинейного провода с током

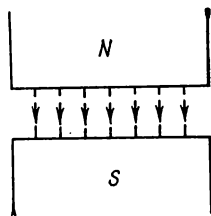


Рис. 5.6. Магнитные линии постоянного магнита в воздушном зазоре

Линии, которые изображают магнитное поле, проводят так, чтобы их плотность показывала интенсивность поля, т. е. характеризовала значение вектора индукции в различных областях поля. У провода с током численное значение индукции обратно пропорционально расстоянию  $r$  между точкой  $a$ , в которой определяется индукция (рис. 5.2), и осью провода, что следует из (5.3). Поэтому на рис. 5.5 расстояние между соседними магнитными линиями все увеличивается по мере удаления от центра провода. Все магнитные линии не имеют начал и концов, т. е. замкнутые, что относится к любым магнитным полям.

Магнитное поле может быть и практически однородным, как, например, магнитное поле внутри длинной цилиндрической катушки с постоянным током в проводах (витках), магнитное поле Земли в данной местности и магнитное поле между плоскими разноименными полюсами постоянного магнитного квадратного сечения (рис. 5.6), у которого расстояние между полюсами много меньше ширины полюса. Магнитные линии постоянного магнита показаны на рис. 5.6 только в зазоре между полюсами, они замыкаются внутри магнита.

В однородном магнитном поле численные значения и

направления векторов индукции одинаковые во всех точках поля. Такое магнитное поле изображают параллельными магнитными линиями, как на рис. 5.6, и через каждую поперечную площадку одинаковых размеров проводят равное число магнитных линий.

На рис. 5.7 показаны магнитные линии неоднородного поля двух параллельных проводов с равными токами при одинаковых (рис. 5.7, а) и противоположных (рис. 5.7, б) направлениях токов. На рис. 5.8 изображены магнитные линии витка с током  $I$  и цилиндрической катушки с током  $I$  в средней плоскости, пересекающей виток или катушку.

Правило правоходового винта или буравчика для проводов такой формы удобнее применять в измененном виде: *если совместить направление вращения головки винта или рукоятки буравчика с направлением тока в витке или витках катушки, то поступательное движение винта или буравчика укажет направление магнитных линий внутри витка или катушки*. На рис. 5.8, б видно, что у достаточно длинной цилиндрической катушки магнитное поле в ее средней части получается практически однородным. Картина магнитных линий одинакова в любой плоскости, проходящей через ось витка или катушки, т. е. такая же, как в горизонтальной плоскости рис. 5.8 (цилиндрическая симметрия).

На рис. 5.9 показана катушка с тороидальным сердечником (кольцевая катушка) при равномерном распределении витков вдоль сердечника. Из условий симметрии следует, что магнитные линии в сердечнике имеют форму окружностей, центры которых лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости рис. 5.9 и проходящей через центр  $O$  тороида. Во всех точках одной и той же магнитной линии векторы индукции численно равны, но длина магнитных линий не одинаковая и поле более интенсивное у внутренней стороны тороида.

**г) Правило левой руки.** Предположим, что прямолинейный провод с током  $I$  находится в магнитном поле, индукция которого не изменяется вдоль провода и известна. Действующая на провод с током сила рассчитывается по формуле, аналогичной (5.2):

$$F = B (Il), \quad (5.8)$$

причем предполагается, что направление тока перпендикулярно направлению вектора индукции (рис. 5.10). Направление действия силы можно найти по правилу левой

руки: если расположить ладонь левой руки так, чтобы вектор магнитной индукции входил в нее и четыре вытянутых пальца были направлены по току, то отогнутый под прямым углом большой палец покажет направление силы. Из этого правила и следует, что провода с токами одного направления притягиваются (рис. 5.1, а), а с токами про-

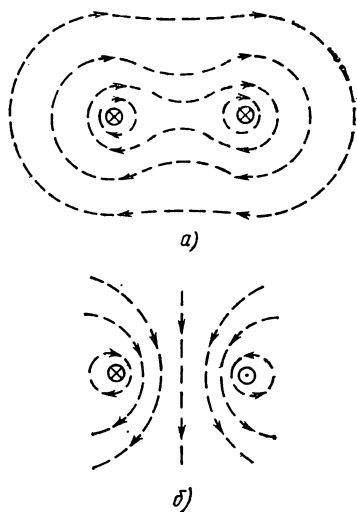


Рис. 5.7. Магнитные линии двух параллельных проводов с равными токами одинакового (а) и противоположного (б) направлений

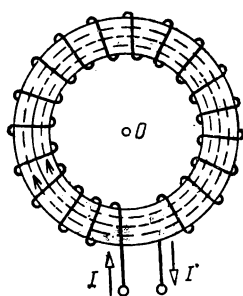


Рис. 5.9. Катушка с торондальным магнитопроводом

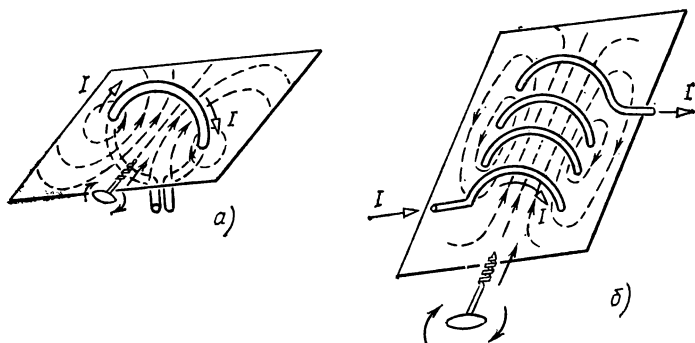


Рис. 5.8. Магнитные линии витка с током (а) и катушки с током (б)

тивоположного направления — отталкиваются (рис. 5.1, б).

Если угол  $\alpha$  между направлением тока и вектором индукции не равен  $90^\circ$ , то сила  $F$  пропорциональна  $\sin \alpha$ , т.е. в этом случае

$$F = B(Il) \sin \alpha, \quad (5.9)$$

а ее направление следует по-прежнему определять по правилу левой руки.

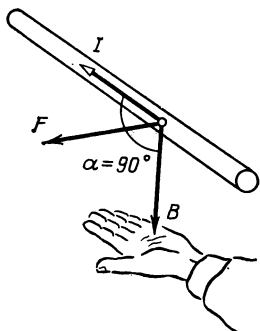


Рис. 5.10. Правило левой руки

В общем случае вектор силы, действующей на провод произвольной формы с током, расположенный в неоднородном магнитном поле, определяется как геометрическая сумма элементарных сил (сумма элементарных векторов), действующих на элементы провода бесконечно малой длины  $dl$ . Элемент  $dl$  можно считать прямолинейным. Поэтому элементарная сила

$$dF = B(I dl) \sin \alpha,$$

где  $B$  — индукция поля в месте расположения элемента  $dl$ , а  $\alpha$  — угол между направлением тока в элементе  $dl$  и вектором индукции.

## 5.2. ЭЛЕКТРОН В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Электромагнитную силу, действующую на провод с током, расположенный перпендикулярно направлению магнитных линий, можно рассматривать как сумму сил, действующих на свободные электроны проводника, направленное движение которых и представляет собой ток.

Число свободных электронов, заключенных в объеме проводника длиной  $l$  и сечением  $S$ , при концентрации их  $n$  составляет  $nSl$ . Поэтому электромагнитная сила, действующая на свободный электрон с зарядом  $q_0$ , движущийся в магнитном поле со скоростью  $v$  (рис. 5.11),

$$F_0 = \frac{F}{nSl} = \frac{Bvl}{nSl}.$$

Подставив в полученную формулу выражение тока  $I =$

$=JS$ , где  $J=(nq_0)v$  (заряд на скорость), т. е.  $I=nq_0vS$ , получим

$$F_0 = \frac{B(nq_0)vSl}{nSl} = Bq_0v. \quad (5.10)$$

Таким образом, сила, действующая на электрон, прямо пропорциональна магнитной индукции, заряду электрона и скорости, с которой электрон движется перпендикулярно направлению поля. Направление этой силы определяют по правилу левой руки, причем четыре вытянутых пальца руки должны совпадать с направлением тока, т. е. должны быть направлены в сторону, противоположную направлению движения электрона (рис. 5.11).

Из выражения (5.10) следует, что при  $v=0$  сила  $F_0=0$ , т. е. сила, действующая в магнитном поле на неподвижный заряд, равна нулю. Так как направление силы  $F_0$  перпендикулярно направлению скорости, то работа, совершаемая ею, равна нулю. Энергия электрона и его скорость остаются неизменными.

Направление движения электрона под действием силы отклоняется от первоначального. Если на электрон действует только магнитное поле, то он будет перемещаться по окружности радиуса  $r$ . Сила  $F_0$  является центростремительной, которая записывается так:  $F_0 = mv^2/r$ , где  $m$  — масса электрона. Следовательно, по (5.10)

$$mv^2/r = Bq_0v,$$

откуда радиус окружности

$$r = mv/(Bq_0).$$

Отношение массы электрона к его заряду  $m/q_0$  постоянно. Таким образом, радиус окружности прямо пропорционален постоянной скорости движения электрона и обратно пропорционален магнитной индукции поля  $B$ .

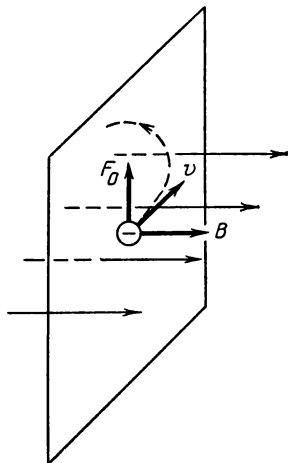


Рис. 5.11. Сила, действующая на электрон, который движется в магнитном поле

Воздействие магнитного поля на поток электронов находит широкое применение в технике, например, для фокусировки электронного луча в электронно-лучевых трубках.

### 5.3. МАГНИТНЫЙ ПОТОК

Произведение индукции  $B$  и такой плоской площадки  $S$ , во всех точках которой векторы индукции численно одинаковы и перпендикулярны к ней, составляет поток вектора индукции магнитного поля или, короче, магнитный поток  $\Phi$  через площадку  $S$ :

$$\Phi = BS. \quad (5.11)$$

Наглядно магнитный поток можно представить как совокупность магнитных линий, пересекающих площадку  $S$ .

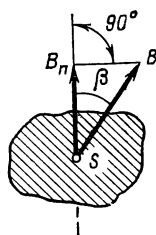


Рис. 5.12. Нормальная составляющая вектора магнитной индукции

Из (5.11) найдем единицу измерения магнитного потока:

$$[\Phi] = [BS] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^2 = \text{В} \cdot \text{с}.$$

Единица измерения магнитного потока  $\text{В} \cdot \text{с}$  называется вебер (Вб).

Если вектор магнитной индукции не перпендикулярен к площадке, то необходимо определить перпендикулярную к площадке нормальную составляющую  $B_n$  вектора магнитной индукции (рис. 5.12). Магнитный поток

$$\Phi = B_n S = (B \cos \beta) S. \quad (5.12)$$

В общем случае при вычислении магнитного потока через произвольную поверхность в неоднородном поле поверхность следует разделить на бесконечно малые плос-

кие элементы площадью  $dS$ . В пределах каждой из элементарных площадок магнитную индукцию можно считать одинаковой. Поэтому поток через отдельную элементарную площадку

$$d\Phi = B_n dS.$$

Магнитный поток через произвольную поверхность находится суммированием (интегрированием) элементарных потоков:

$$\Phi = \int d\Phi = \int B_n dS. \quad (5.13)$$

Магнитный поток через замкнутую поверхность равен нулю, т. е.

$$\oint B_n dS = 0, \quad (5.14)$$

так как магнитные линии замкнутые и каждая линия, входящая в замкнутую поверхность, должна из нее выйти.

Магнитный поток необходимо знать или предварительно определить при анализе работы и расчете режима самых разных электротехнических приборов, устройств и установок (гл. 6—9, 14—16).

#### 5.4. ВЕКТОРЫ НАМАГНИЧЕННОСТИ И НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Материалы, обладающие большой магнитной проницаемостью ( $\mu_r \gg 1$ ), называются ферромагнитными или ферромагнетиками. К ферромагнетикам относятся: железо, сталь, никель, кобальт, их сплавы, а также ферриты — соединения окиси железа с окислами других металлов (цинка, никеля и т. д.), пермаллой и др.

Ферромагнетики в электротехнике играют очень важную роль, так как дают возможность получать сильные магнитные поля (большие магнитные потоки) и конструировать электромагнитные устройства, обладающие заданными характеристиками. Ферромагнитные сердечники, которые называются магнитопроводами, применяются почти во всех электрических машинах, трансформаторах, электромагнитах, реле и многих других электромагнитных аппаратах и приборах.

Магнитные свойства тел зависят от магнитных свойств элементарных носителей магнетизма — движущихся внутри атомов и молекул электронов, а также от совместного



действия отдельных их групп. Электроны, двигаясь по замкнутым орбитам или элементарным контурам, образуют элементарные (молекулярные) токи или магнитные диполи.

Магнитный диполь можно характеризовать вектором — магнитным моментом диполя  $\mathbf{p}_m$ , значение которого равно произведению элементарного тока и элементарной площадки  $S$  (рис. 5.13, а), ограниченной контуром элементарного тока:

$$p_m = iS.$$

Вектор  $\mathbf{p}_m$  направлен перпендикулярно к площадке  $S$  по правилу буравчика. Единица измерения магнитного момента

$$[p_m] = [iS] = \text{А} \cdot \text{м}^2.$$

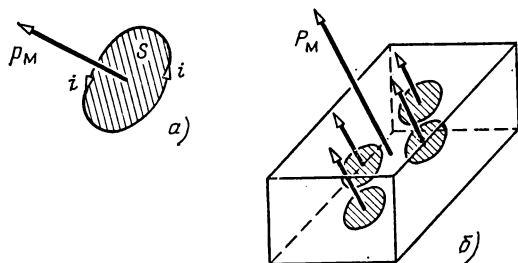


Рис. 5.13. Магнитный момент диполя (а) и тела (б)

Векторная величина, равная геометрической сумме магнитных моментов всех элементарных (молекулярных) токов (рис. 5.13, б) в рассматриваемом теле (объеме вещества), представляет собой магнитный момент тела:

$$\mathbf{P}_m = \Sigma \mathbf{p}_m.$$

Векторная величина, определяемая отношением магнитного момента к его объему  $V$ , называется средней намагниченностью тела, а чтобы найти намагниченность  $M$  в данном месте поля, надо выбрать достаточно малый объем  $\Delta V$ :

$$M = \mathbf{P}_m / \Delta V. \quad (5.15)$$

Намагниченность в системе СИ измеряется, как и напряженность поля, в А/м:

$$[M] = \left[ \frac{P_m}{V} \right] = \frac{\text{А} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^3} = \text{А/м}.$$

Магнитные моменты, обусловленные движением электронов по орбитам, называют орбитальными моментами. Однако и сами электроны обладают магнитным моментом, называемым спином или спиновым моментом, который соответствует как бы вращению электронов вокруг собственной оси. Установлено, что главную роль в намагничивании ферромагнетиков играют спиновые моменты. В ферромагнетиках образуются такие кристаллические структуры, в пределах отдельных областей которых, называемых магнитными доменами, спиновые моменты ориентируются параллельно. Таким образом, эти области оказываются самопроизвольно (спонтанно) намагниченными. Домены имеют размеры около  $10^{-2}$ — $10^{-6}$  см<sup>3</sup>. Если ферромагнетик не находится во внешнем магнитном поле, то магнитные моменты отдельных доменов направлены самым различным образом, так что суммарный магнитный момент тела оказывается равным нулю, т. е. ферромагнетик не намагничен. Внесение ферромагнетика во внешнее магнитное поле с индукцией  $B_0$  вызывает: 1) поворот магнитных моментов доменов в направлении внешнего поля — процесс ориентации; 2) рост размеров тех доменов, направления магнитных моментов которых близки к направлению поля, и уменьшение размеров доменов с противоположно направленными магнитными моментами — процесс смещения границ доменов. В результате ферромагнетик намагничивается.

При отсутствии намагниченности существовало бы только внешнее магнитное поле в вакууме с индукцией  $B_0$ . При намагничивании вектор индукции внешнего поля суммируется с вектором, определяющим намагничивание материала  $\mu_0 M$  (вектор намагниченности умножен на магнитную постоянную, так как у индукции и намагниченности в системе СИ различные единицы измерения). Результирующая магнитная индукция

$$B = B_0 + \mu_0 M. \quad (5.16)$$

Разность векторов

$$B/\mu_0 - M = H \quad (5.17)$$

называется вектором напряженности магнитного поля и по (5.17) вектор индукции

$$B = \mu_0 (H + M). \quad (5.18)$$

В линейных средах с одинаковыми свойствами во всех направлениях (изотропных), в том числе в ферромагнит-

ных материалах при малой интенсивности поля (см. гл. 6), намагниченность пропорциональна индукции и напряженности поля:

$$M = \kappa H,$$

где коэффициент пропорциональности  $\kappa$  — магнитная восприимчивость, характеризующая способность материалов намагничиваться. Для таких сред и материалов

$$B = \mu_0 (H + \kappa H) = \mu_0 (1 + \kappa) H,$$

а

$$1 + \kappa = \mu_r \quad (5.19)$$

и есть относительная магнитная проницаемость.

Таким образом, в изотропной среде вектор индукции пропорционален вектору напряженности магнитного поля, т. е.

$$B = \mu_r \mu_0 H = \mu_a H, \quad (5.20)$$

их направления совпадают и при отсутствии гистерезиса (гл. 6) магнитные линии можно считать и линиями вектора  $H$ .

Как видно из (5.17), единица измерения напряженности магнитного поля та же самая, что и у намагниченности, т. е.

$$[H] = A/m.$$

## 5.5. МАГНИТОДВИЖУЩАЯ СИЛА И МАГНИТНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

**а) Магнитодвижущая сила.** Несмотря на то что электрический ток в проводе и его магнитное поле представляют собой неотделимые друг от друга стороны единого электромагнитного процесса, принято говорить, что электрический ток обладает свойством возбуждать магнитное поле. Это свойство тока называют магнитодвижущей силой (МДС) и обозначают ее буквой  $F$ .

Формально МДС  $F$  вызывает или возбуждает магнитное поле подобно тому, как ЭДС вызывает электрический ток в электрической цепи.

В Международной системе единиц МДС принимается численно равной току в проводе или витке, вызывающему магнитное поле, так что МДС  $F = I$ . Если ток проходит

го катушке с числом витков  $\omega$ , то МДС равна произведению тока и числа витков, т. е.

$$F = I\omega.$$

Естественно, что МДС, так же как и ток, измеряется в амперах, т. е.

$$[F] = [I] = \text{А}.$$

Для определения направления МДС катушки или витка с током удобно пользоваться правилом *правой руки*: если охватить катушку (виток) правой рукой так, чтобы четыре пальца ее расположились по направлению тока в витках катушки, то отогнутый большой палец руки укажет направление МДС. На рис. 5.14 показаны несколько катушек с током и направления их МДС.

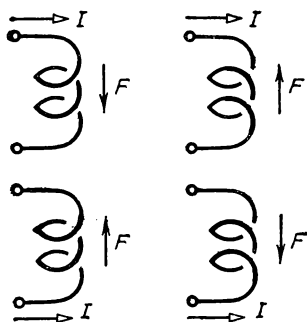


Рис. 5.14. Определение направления МДС катушки с током

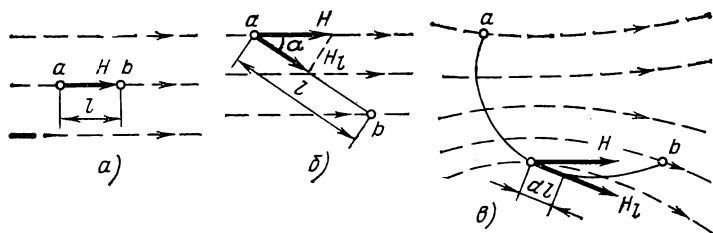


Рис. 5.15. Магнитное напряжение между двумя точками

**б) Магнитное напряжение.** По аналогии с электрическим напряжением при расчете магнитных полей пользуются понятием магнитного напряжения  $U_m$ .

Магнитное напряжение между двумя точками  $a$  и  $b$  однородного магнитного поля, расположенными на одной

магнитной линии (рис. 5.15, а), выражается произведением напряженности поля и расстояния между этими точками:

$$U_m = Hl. \quad (5.21a)$$

В более общем случае, если в однородном поле две точки  $a$  и  $b$  находятся на расстоянии  $l$  не на одной магнитной линии (рис. 5.15, б), сначала вычисляется напряженность  $H$ , затем продольная составляющая вектора напряженности вдоль отрезка  $ab$ , т. е.  $H_l = H \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{H}_l$ . Магнитное напряжение

$$U_m = H_l l. \quad (5.21б)$$

В неоднородном магнитном поле магнитное напряжение между двумя точками  $a$  и  $b$  равно сумме элементарных напряжений  $H_l dl$  на элементарных участках  $dl$  вдоль выбранного пути между этими точками (рис. 5.15, в):

$$U_m = \int_a^b H_l dl \quad (5.21в)$$

[сравните с (4.116)].

Магнитное напряжение  $U_m$  может зависеть от выбранного пути между начальной и конечной точками.

Магнитное напряжение в системе СИ измеряется в амперах:

$$[U_m] = [H_l l] = \frac{A}{м} \cdot м = A.$$

Магнитное напряжение вдоль произвольного замкнутого пути (контура) представляет собой МДС вдоль этого контура. Таким образом, МДС можно определить как сумму элементарных магнитных напряжений  $H_l dl$  вдоль замкнутого контура:

$$F = \oint H_l dl, \quad (5.22)$$

где знак  $\oint$  обозначает суммирование (интегрирование) по замкнутому контуру элементарных напряжений  $H_l dl$ .

## 5.6. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА

Полным током называют алгебраическую сумму токов, пронизывающих поверхность, ограниченную замкнутым контуром.

Приняв произвольно выбранное направление обхода

какого-либо контура в магнитном поле за положительное, будем считать токи, пронизывающие этот контур, положительными, если их направление совпадает с направлением поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается в положительном направлении обхода контура. Например, на рис. 5.16 ток  $I_1$  — положительный, а ток  $I_2$  —

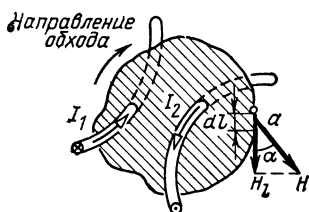


Рис. 5.16. Токи, пронизывающие поверхность, ограниченную контуром

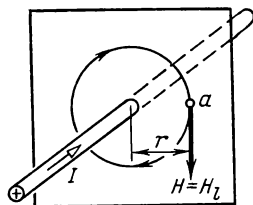


Рис. 5.17. Напряженность магнитного поля провода с током

отрицательный. Полный ток, пронизывающий контур,  $\Sigma I = I_1 - I_2$ .

Магнитная индукция и напряженность поля в отдельных точках, расположенных на контуре, могут иметь или различные или одинаковые значения. Допустим, что в точке  $a$  вектор индукции и пропорциональный ему вектор напряженности поля образует с элементом длины контура  $dl$  угол  $\alpha$ . При этом  $H_t = H \cos \alpha$  будет представлять собой касательную к контуру составляющую вектора напряженности магнитного поля. Магнитное напряжение  $H_t dl$  на элементарном участке контура  $dl$  положительно, если направление вектора  $\mathbf{H}_t$  совпадает с выбранным направлением обхода контура, в противном случае оно будет отрицательным.

По закону полного тока МДС  $F$  вдоль контура равна полному току, который проходит сквозь поверхность, ограниченную этим контуром, т. е.

$$F = \Sigma I \text{ или } \oint H_t dl = \Sigma I. \quad (5.23)$$

Если контур совпадает с магнитной линией, то направление вектора напряженности поля совпадает с касательной к контуру и, следовательно,  $H_t = H$ .

Если, кроме того, индукция  $B$  и напряженность поля  $H$  во всех точках контура одинаковы, как вследствие симмет-

рии при обходе вдоль контура рис. 5.17, то в формуле (5.23) напряженность можно вынести за знак суммирования и написать:

$$H \oint dl = \Sigma I,$$

где знак  $\oint dl$  обозначает сумму элементарных длин замкнутого контура, т. е. длину этого контура  $l$ ; следовательно, в этом случае

$$Hl = \Sigma I. \quad (5.24)$$

Выражение  $\oint H dl$  иногда называют циркуляцией вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру. В соответствии с этим изменяют и формулировку закона полного тока.

### 5.7. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРОВОДА С ТОКОМ

Если магнитное поле симметрично, то вычисление напряженности поля, а значит, и индукции не представляет большого труда. Например, напряженность поля в точке  $a$  на расстоянии  $r$  от оси прямолинейного провода с током (рис. 5.17) в соответствии с законом полного тока в простейшей форме (5.24) выражается, как

$$H = \Sigma I / l = I / (2\pi r), \quad (5.25)$$

так как полный ток равен току в проводе  $I$ , а контур совпадает с магнитной линией, которая проходит через точку  $a$  (рис. 5.17), и  $l = 2\pi r$ .

Магнитная индукция

$$B = \mu_a H = \mu_a \frac{I}{2\pi r} = \mu_r \mu_0 \frac{I}{2\pi r} = 125 \mu_r \frac{I}{2\pi r} 10^{-8}, \quad (5.25a)$$

где  $B$  — магнитная индукция, Тл;  $I$  — ток, А;  $r$  — расстояние, м.

Если проводник находится в неферромагнитной среде, то, полагая  $\mu_r = 1$ , получаем

$$B = 125 \frac{I}{2\pi r} 10^{-8}. \quad (5.25b)$$

Приведенная формула правильна при любом значении  $r$ , большем радиуса провода и бесконечно большой длине провода; однако она применима и при конечной длине провода, если расстояние  $r$  значительно меньше длины провода и точка, в которой определяется индукция, не находится вблизи конца провода.

По закону полного тока нетрудно найти напряженность поля и внутри длинного цилиндрического провода радиуса  $a$  (рис. 5.18,  $a$ ).

Во всех точках поперечного сечения провода плотность тока

$$J = I/S = I/(\pi a^2).$$

Из условий симметрии следует, что внутри провода, как и вне провода, все магнитные линии — это concentricкие окружности с центром на оси провода.

Окружность радиуса  $r < a$  (рис. 5.18,  $a$ ) с центром на оси провода представляет собой замкнутый контур, совпа-

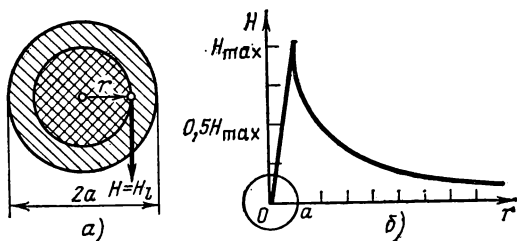


Рис. 5.18. Напряженность поля внутри провода с током ( $a$ ) и распределение напряженности поля ( $b$ )

дающий с магнитной линией. Обозначив площадь сечения, ограниченного замкнутым контуром,  $S_r = \pi r^2$ , а ток, пронизывающий это сечение,  $I_r = JS_r$ , по закону полного тока (5.24) можем написать выражение напряженности магнитного поля

$$H = \Sigma I/l = I_r/l = JS_r/(2\pi r),$$

которая одинакова во всех точках контура и направлена по касательной к окружности (рис. 5.18,  $a$ ), т. е.  $H = H_t$ .

Подставив в последнюю формулу выражения плотности тока и площади замкнутого контура, получим

$$H = \frac{I\pi r^2}{\pi a^2 2\pi r} = \frac{I}{2\pi a^2} r. \quad (5.26)$$

Таким образом, напряженность поля в произвольной точке внутри провода пропорциональна расстоянию  $r$  этой точки от оси провода. На оси провода  $H=0$ , так как  $r=0$ . На поверхности провода ( $r=a$ ) напряженность поля име-



ет наибольшее значение:

$$H_{\max} = \frac{I}{2\pi a^2} a = \frac{I}{2\pi a}$$

и далее при  $r > a$  уменьшается согласно (5.25).

График распределения напряженности магнитного поля внутри и вне провода дан на рис. 5.18, б.

Магнитная индукция внутри провода равна произведению напряженности магнитного поля и абсолютной магнитной проницаемости материала провода, т. е.

$$B = \mu_r \mu_0 H = 125\mu_r \frac{I}{2\pi a^2} r \cdot 10^{-8},$$

где  $B$  — магнитная индукция, Тл;  $I$  — ток, А; расстояния  $r$  и  $a$  — м.

**Пример 5.2.** Найти распределение напряженности поля трубчатого провода (рис. 5.19) с внутренним радиусом  $r_2$  и внешним  $r_3$ , если по проводу проходит ток  $I$ .

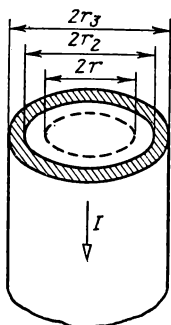


Рис. 5.19. Трубчатый провод

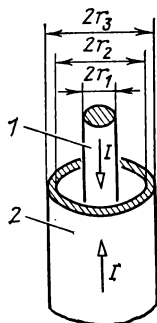


Рис. 5.20. Коаксиальный кабель

**Решение.** Площадь поперечного сечения трубчатого провода  $S = \pi(r_3^2 - r_2^2)$  и плотность тока в проводе

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}.$$

Проведем окружность радиусом  $r < r_2$ , центр которой расположен на оси трубы. Так как внутри этой окружности (контура) ток отсутствует, то по закону полного тока (5.24) напряженность поля  $H=0$ , что указывает на отсутствие магнитного поля внутри трубы.

Проведем окружность радиусом  $r$ , охватывающую большую или меньшую часть сечения провода, так, чтобы  $r_2 < r < r_3$ .

Найдем ток внутри этой окружности (контура):

$$I' = JS = J\pi(r^2 - r_2^2);$$

подставив плотность тока  $J$ , получим

$$I' = \frac{I\pi(r^2 - r_2^2)}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}.$$

Напряженность поля в любой точке этой окружности по закону полного тока (5.24)

$$H = \frac{\Sigma I}{l} = \frac{I'}{2\pi r} = \frac{I(r^2 - r_2^2)}{2\pi r(r_3^2 - r_2^2)}.$$

Проведя окружность радиусом  $r > r_3$ , т. е. за пределами провода, найдем, что

$$H = \Sigma I / l = I / (2\pi r),$$

т. е. получим знакомую формулу (5.25).

**Пример 5.3.** Найти распределение напряженности магнитного поля коаксиального кабеля (рис. 5.20) с током  $I$ .

**Решение.** Коаксиальный кабель (рис. 5.20) состоит из двух изолированных проводов, имеющих общую ось. Внутренний провод 1 — цилиндрический, наружный 2 — трубчатый. Токи в проводах равны, но направлены противоположно друг другу. Радиус цилиндрического провода обозначим  $r_1$ , внутренний радиус трубчатого провода  $r_2$ , а внешний  $r_3$ .

Применим закон полного тока (5.24) для определения напряженности поля в точках, расположенных на различных расстояниях  $r$  от оси провода.

1) При  $r < r_1$  напряженность поля определяется по формуле (5.26):

$$H = \frac{I}{2\pi r_1^2} r.$$

2) При  $r_1 < r < r_2$ , т. е. между цилиндрическим проводом и трубчатым, поле создается только током цилиндрического провода; напряженность поля определяется выражением (5.25):

$$H = I / (2\pi r).$$

3) При  $r_2 < r < r_3$ , т. е. в стенке трубчатого провода, напряженность поля определяется током, идущим по цилиндрическому проводу, и той частью тока противоположного направления, который идет по части сечения трубчатого провода между окружностями радиусами  $r$  и  $r_2$ . В соответствии с этим напряженность поля равна разности напряженностей

поля круглого и трубчатого проводов:

$$H = \frac{I}{2\pi r} - \frac{I(r^2 - r_2^2)}{2\pi r(r_3^2 - r_2^2)} = \frac{I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right).$$

4) При  $r > r_3$  полный ток, пронизывающий контур, равен нулю, поэтому  $H=0$ . Таким образом, за пределами коаксиального кабеля магнитное поле, обусловленное током кабеля, отсутствует.

## 5.8. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ КАТУШКИ

Определим напряженность магнитного поля катушки (рис. 5.21) с кольцевым магнитопроводом, на который с одинаковой плотностью наложена обмотка из  $\omega$  витков.

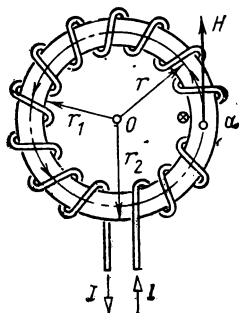


Рис. 5.21. Кольцевая катушка

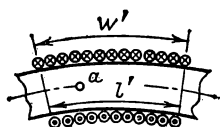


Рис. 5.22. Участок магнитопровода кольцевой катушки

Проведем замкнутый контур, совпадающий с магнитной линией, в виде окружности радиуса  $r$  и длиной  $l=2\pi r$ . Поверхность, ограниченную контуром, пронизывают все  $\omega$  проводов с током  $I$  одного направления, следовательно, полный ток, сцепленный с контуром,  $\Sigma I = I\omega$ .

Вследствие симметрии напряженность поля  $H$  будет во всех точках окружности радиуса  $r$  одинакова и направлена по касательной к окружности. Таким образом, по закону полного тока (5.24) можно написать, что

$$Hl = I\omega. \quad (5.27)$$

При радиусе контура ( $r < r_1$ ) или  $r > r_2$  полный ток, который пронизывает поверхность, ограниченную контуром, равен нулю; следовательно, равна нулю и напряженность поля за пределами магнитопровода.

Магнитная индукция, выраженная в теслах, внутри маг-

магнитопровода в любой точке окружности радиуса  $r$  равна

$$B = \mu \mu_0 H = \mu_r \mu_0 \frac{I\omega}{l} = 125\mu_r \frac{I\omega}{l} 10^{-8}, \quad (5.28)$$

где  $I$  — ток, А;  $l$  — длина контура, м;  $\mu_r$  — относительная магнитная проницаемость материала магнитопровода.

Напряженность поля и магнитная индукция в различных точках поперечного сечения магнитопровода имеют разные значения; максимальные — на внутренней поверхности кольцевого магнитопровода (на расстоянии  $r_1$  от центра 0) и минимальные — на наружной поверхности магнитопровода (на расстоянии  $r_2$  от точки 0).

На средней магнитной линии, совпадающей с окружностью радиуса  $r_{\text{ср}} = (r_1 + r_2)/2$ , магнитная индукция, выраженная в теслах,

$$B = 125\mu_r \frac{I\omega}{2\pi r_{\text{ср}}} 10^{-8}.$$

Напряженность магнитного поля кольцевой катушки (рис. 5.21) численно равна МДС, отнесенной к единице длины катушки; следовательно, напряженность магнитного поля в произвольной точке можно выразить и отношением МДС на части дуги ( $I\omega'$ ) к длине  $l'$  (рис. 5.22), т. е.

$$H = I\omega/l = I\omega'/l'.$$

Цилиндрическую катушку (рис. 5.23) можно рассматривать как кольцевую с достаточно большим радиусом, у ко-

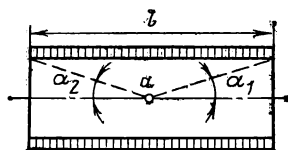


Рис. 5.23. Цилиндрическая катушка

торой обмотка расположена только на части магнитопровода длиной  $l$ . Напряженность магнитного поля на осевой линии катушки в ее центральной части можно определить по приближенной формуле

$$H = I\omega/l. \quad (5.29)$$

Ошибка при определении  $H$  будет тем меньше, чем больше отношение длины катушки к ее диаметру.

Более точные расчеты показывают, что напряженность

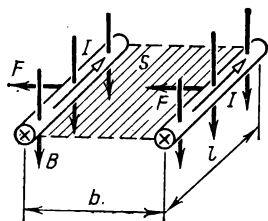
поля на оси катушки (например, в точке  $a$  на рис. 5.23)

$$H = \frac{I\omega}{2l} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2).$$

## 5.9. РАБОТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИЛ

а) **Провод с током.** На прямолинейный провод с током, расположенный в магнитном поле, действует сила  $F = IBl \sin \alpha$  (рис. 5.9). В случае провода, расположенного перпендикулярно к направлению поля, т.е. при  $\alpha = 90^\circ$  и  $\sin \alpha = 1$ , зависимость упрощается и сила  $F = IBl$  (5.8).

Если в однородном магнитном поле под действием силы  $F$  провод переместится на расстояние  $b$  (рис. 5.24) по



← Рис. 5.24. Работа электромагнитных сил

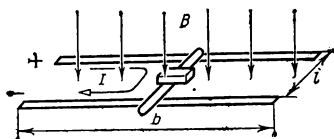


Рис. 5.25. К примеру 5.4

направлению силы, то произведенная при этом силами поля работа

$$A = Fb = IBlb. \quad (5.30)$$

Площадь поверхности, описанной проводом при его перемещении перпендикулярно направлению поля,  $S = lb$ , а произведение  $BS = \Phi$  представляет собой поток, пронизывающий эту поверхность; следовательно, работа

$$A = IBS = I\Phi. \quad (5.31)$$

Таким образом, *при перемещении провода с постоянным током в однородном магнитном поле совершается механическая работа, равная произведению тока и пересеченного проводом магнитного потока.*

**Пример 5.4.** В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 1,25$  Тл в плоскости, перпендикулярной направлению магнитных линий, укреплены два рельса (рис. 5.25) длиной  $b = 4$  м каждый, отстоящие друг от друга на расстояние  $l = 0,5$  м. По рельсам перемещается провод с укрепленным на нем грузом массой  $m = 1$  кг. Определить ток в цепи, если скорость груза в конце пути  $v = 50$  м/с.

Решение. Кинетическая энергия груза в конце пути

$$W = mv^2/2 = 1 \cdot 50^2/2 = 1250 \text{ Дж.}$$

Эту энергию груз приобретает за счет работы перемещения в магнитном поле провода с током. Следовательно,

$$mv^2/2 = I\Phi,$$

откуда ток

$$I = \frac{mv^2}{2\Phi} = \frac{W}{Blb} = \frac{1250}{1,25 \cdot 0,5 \cdot 4} = 500 \text{ А.}$$

**б) Контур с током.** Так как протекание тока возможно только в замкнутом контуре, то, очевидно, любой провод с током является частью такого контура. Выражение (5.31) можно применить к замкнутому контуру, утверждая, что при перемещении контура с током (или части его) под действием сил поля совершается работа, если происходит изменение магнитного потока, пронизывающего контур.

Чтобы пояснить это утверждение, рассмотрим замкнутый контур с током  $I$  (рис. 5.26, на котором источник питания не изображен) и действующие на него электромаг-

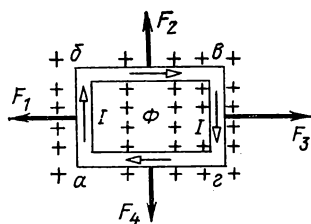


Рис. 5.26

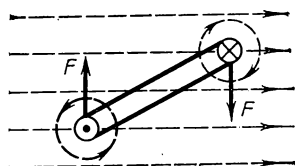


Рис. 5.27

Рис. 5.26. Контур с током в магнитном поле

Рис. 5.27. Вращающий момент, действующий на контур с током в магнитном поле

Рис. 5.28. Электромагнитные силы, стремящиеся растянуть виток

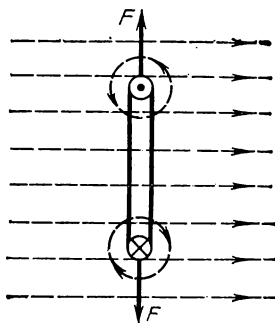


Рис. 5.28

нитные силы, направления которых найдены по правилу левой руки. Магнитные линии поля направлены от наблюдателя за плоскость рисунка (изображены крестиками), причем плотность их возрастает при перемещении слева направо, так что  $F_2 = F_4$ , а  $F_3 > F_1$ , и результирующая сила  $F = F_3 - F_1$ , действующая на контур, совпадает по направлению с  $F_3$ .

Будем считать направление магнитных линий и магнитного потока, связанное с направлением тока в контуре правилом буравчика, положительным (например, поток  $\Phi$  на рис. 5.26 положителен). Если контур под действием силы  $F$  переместится направо, то магнитный поток, пронизывающий контур, увеличится на  $\Delta\Phi > 0$ , от значения  $\Phi_1$  в начале движения до значения

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Delta\Phi$$

в конце движения.

Обозначим  $\Phi'$  поток, пересеченный стороной  $ab$  при ее движении в направлении силы  $F$ . Очевидно, начальный поток, пронизывающий контур  $\Phi_1$ , уменьшится на ту же величину  $\Phi'$ . При этом совершенная работа  $A_{a\delta} = -I\Phi'$  отрицательная, так как перемещение происходит против силы. Магнитный поток  $\Phi''$ , пересеченный стороной  $bc$  при ее движении, равен увеличению потока  $\Phi''$ , пронизывающего контур. При этом совершенная работа  $A_{bc} = I\Phi''$ . Так как угол между направлением силы  $F_2$  и направлением движения рамки равен  $90^\circ$ , то работа, совершаемая при перемещении стороны  $bc$ , равна нулю. То же относится и к стороне  $ac$ .

Таким образом, суммарная работа, совершенная при перемещении контура,

$$A = A_{a\delta} + A_{bc} = -I\Phi' + I\Phi'' = I\Delta\Phi.$$

Если работа производится силами поля, то контур переместится направо ( $F_3 > F_1$ ) и приращение потока  $\Delta\Phi$  положительно ( $\Phi_2 > \Phi_1$ ). При движении контура с током под действием сил поля магнитный поток, пронизывающий контур, всегда получает положительное приращение.

Рассмотренные явления приводят к важному выводу: всякий контур с током, находящийся в магнитном поле, под действием электромагнитных сил стремится занять положение, при котором поток, пронизывающий контур, будет положительным и максимальным. Например, на виток с током (рис. 5.27), находящийся в однородном поле, действует

вращающий момент, так что виток стремится занять положение, при котором плоскость витка будет перпендикулярна направлению внешнего поля и собственное магнитное поле внутри витка будет совпадать по направлению с внешним. По достижении устойчивого положения электромагнитные силы стремятся только растянуть его с тем, чтобы сцепленный с витком магнитный поток мог еще увеличиться (рис. 5.28).

Если виток с током расположен в неоднородном поле, то кроме вращательного момента действует и сила, направленная к участкам поля с большей магнитной индукцией.

При отрицательном приращении магнитного потока сквозь контур ( $\Delta\Phi < 0$ ) совершаемая работа отрицательна, т. е. происходит под действием сил, направленных противоположно электромагнитным силам. Наконец, при нулевом приращении магнитного потока, пронизывающего контур ( $\Delta\Phi = 0$ ), никакой работы не производится.

#### 5.10. МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЙ МЕХАНИЗМ

Измерительный механизм является основной частью приборов для измерения тока, напряжения, магнитного потока и других электрических и неэлектрических величин.

Подвижная часть магнитоэлектрического измерительного механизма (рис. 5.29) состоит из прямоугольной катушки — рамки *В*. Обмотка ее выполнена из тонкой медной изолированной проволоки; на рамке укреплены две полуоси с кернами, установленные в опорах. На одной из полуосей укреплены стрелка и концы спиральных пружин, через которые ток подводится к рамке.

Боковые стороны рамки находятся в узком воздушном зазоре между неподвижным стальным цилиндром *Б* и полюсными башмаками *Н'С'*. Магнитные линии постоянного магнита *NS* замыкаются через полюсные башмаки, воздушные зазоры *А* и цилиндр *Б*, так что магнитное поле в воздушном зазоре практически радиальное.

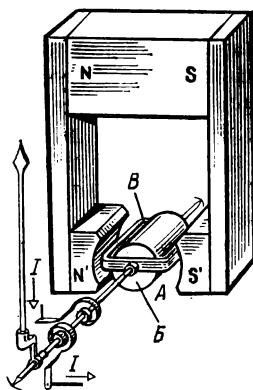


Рис. 5.29. Магнитоэлектрический измерительный механизм



На боковые стороны рамки, расположенной в магнитном поле, при прохождении тока действуют электромагнитные силы, так что возникает вращающий момент, пропорциональный току. Под действием этого момента рамка  $B$  поворачивается на угол  $\alpha$ , при котором вращающий момент уравнивается противодействующим моментом пружин. Противодействующий момент пропорционален углу закручивания пружин; следовательно, большему току, т. е. большему вращающему моменту, соответствует и больший угол поворота подвижной части. По углу поворота и определяют измеряемую величину, значения которой предварительно наносятся на шкале прибора, расположенной под концом указательной стрелки.

Для измерений постоянных токов и напряжений часто применяют амперметры и вольтметры с магнитоэлектрическим механизмом и равномерной шкалой.

## **Глава шестая**

### **МАГНИТНАЯ ЦЕПЬ**

#### **6.1. НАМАГНИЧИВАНИЕ ФЕРРОМАГНЕТИКОВ**

При увеличении внешнего магнитного поля все спонтанно намагниченные участки ферромагнитного материала будут ориентироваться в направлении внешнего поля и, когда прекратится рост доменов и их ориентация, наступит состояние предельной намагниченности ферромагнетика, называемое **магнитным насыщением**.

Ферромагнитные материалы в большей или меньшей степени обладают магнитной анизотропией, т. е. свойством намагничиваться с различной степенью трудности в различных направлениях. Например, наиболее легкое намагничивание монокристалла железа происходит по ребру кристаллической решетки куба и наиболее трудное — по диагонали куба. Хаотическому расположению кристаллов в ферромагнитном материале соответствует меньшая анизотропия по сравнению с упорядоченным расположением кристаллов, чему способствует, например, прокатка стали в одном направлении. Материалы с явно выраженной анизотропией называются **текстурованными**.

При намагничивании ферромагнетиков происходит и небольшое изменение их линейных размеров, т. е. увеличение

или уменьшение длины с одновременным уменьшением или увеличением поперечного сечения. Это явление, называемое магнитострикцией и зависящее от строения кристаллической решетки ферромагнетика и напряженности внешнего магнитного поля, наиболее ярко выражено у никеля.

Магнитные свойства ферромагнитных материалов сохраняются до тех пор, пока их температура не достигнет значения, называемого точкой Кюри. Точка Кюри для различных материалов различна: для железа (Fe)  $+770^{\circ}\text{C}$ , для никеля (Ni)  $+365^{\circ}\text{C}$ ; для кобальта (Co)  $+1130^{\circ}\text{C}$ .

Как было сказано выше, под действием внешнего магнитного поля, например, созданного током в катушке, наложенной на стальной магнитопровод, происходит процесс ориентации доменов в магнитопроводе и смещение их границ. Это приводит к намагничиванию стального магнитопровода, причем намагниченность увеличивается с усилением внешнего магнитного поля. Магнитное поле, обусловленное намагниченностью, складывается с внешним полем и усиливает его (5.16).

Намагниченность  $M$  ферромагнитного материала растет только до предельного значения, называемого намагниченностью насыщения  $M_s$ . Зависимость намагниченности  $M$  от напряженности поля  $M(H)$  показана на рис. 6.1 штриховой линией. На том же рисунке показана линейная зависимость  $B_0(H) = \mu_0 H$ . Складывая ординаты кривой  $\mu_0 M(H)$  и прямой  $B_0(H)$ , получаем согласно (5.16) ординаты новой кривой  $B(H)$  — кривой первоначального намагничивания (рис. 6.1). Кривую  $B(H)$  можно разделить на четыре участка: 1) почти линейный участок  $Oa$ , соответствующий малым напряженностям поля, показывает, что магнитная индукция

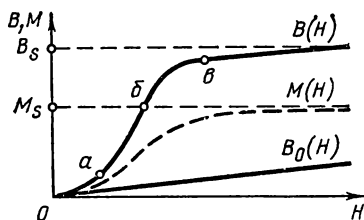


Рис. 6.1. Кривая начального намагничивания

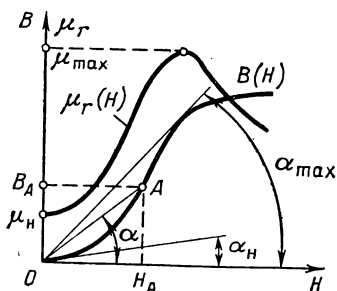


Рис. 6.2. Кривые намагничивания и магнитной проницаемости

увеличивается относительно медленно и почти пропорционально напряженности поля; 2) почти линейный участок  $ab$ , на котором магнитная индукция  $B$  растет также почти пропорционально напряженности поля, но значительно быстрее, чем на начальном участке; 3) участок  $bc$  — колено кривой намагничивания, который характеризует замедление роста индукции  $B$ ; 4) участок магнитного насыщения — участок, расположенный выше точки  $c$ ; здесь зависимость снова линейная, но рост индукции  $B$  очень сильно замедлен по сравнению со вторым. Магнитная индукция, которая соответствует намагниченности насыщения, называется индукцией насыщения  $B_s$ .

Таким образом, зависимость магнитной индукции от напряженности поля у ферромагнитного материала достаточно сложная и не может быть выражена простой расчетной формулой. Поэтому при расчете магнитных цепей, содержащих ферромагнетики, применяют снятые экспериментально кривые намагничивания  $B(H)$  магнитных материалов. Кривая намагничивания впервые была получена экспериментально в 1872 г. профессором Московского университета А. Г. Столетовым.

Абсолютная магнитная проницаемость  $\mu_a = \mu_r \mu_0$  ферромагнетика определяется для произвольной точки  $A$  кривой намагничивания (рис. 6.2) через тангенс угла наклона секущей  $OA$  к оси абсцисс, т. е.

$$\mu_a \mu_0 = m_\mu \operatorname{tg} \alpha = \frac{m_B}{m_H} \frac{B_A}{H_A}, \quad (6.1)$$

где  $m_B$ ,  $m_H$ ,  $m_\mu$  — масштабы соответствующих величин.

Кривая изменения магнитной проницаемости  $\mu_r$  для ферромагнитного материала дана на том же рис. 6.2. Как видно из графика, магнитная проницаемость с ростом напряженности поля изменяется в весьма широких границах, что затрудняет ее применение для расчетов. На кривой  $\mu_r(H)$  отмечают два характерных значения магнитной проницаемости: 1) начальное (рис. 6.2)

$$\mu_n = m_\mu \operatorname{tg} \alpha_n, \quad (6.2)$$

2) максимальное

$$\mu_{\max} = m_\mu \operatorname{tg} \alpha_{\max}. \quad (6.3)$$

Начальная магнитная проницаемость характеризует возможность использования ферромагнетика в слабых магнитных полях. Максимальная магнитная проницаемость опре-

деляет верхнюю границу использования материала. Так, например, для листовой электротехнической стали  $\mu_n = 250 \div 1000$ , а  $\mu_{max} = 5000 \div 30\,000$ .

## 6.2. ЦИКЛИЧЕСКОЕ ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЕ

Рассмотрим процесс перемангничивания ферромагнетиков.

Допустим, что кольцевой магнитопровод из ферромагнитного материала (рис. 5.21) не намагничен и тока в витках катушки нет, т.е.  $B=0$  и  $H=0$  (начало координат на рис. 6.3). При постепенном увеличении намагничивающего тока, т.е. МДС, а следовательно, и напряженности поля от нуля до некоторого наибольшего значения  $H_a = I_a \omega / l$  магнитная индукция увеличивается по кривой начального на-

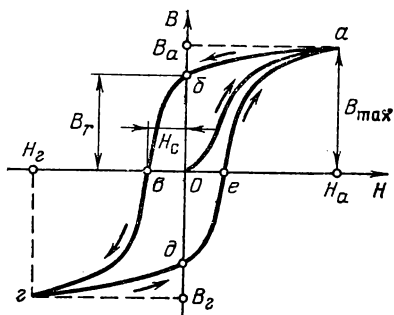


Рис. 6.3. Установившийся гистерезисный цикл

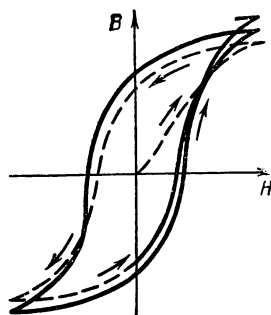


Рис. 6.4. Неустановившийся гистерезисный цикл

магничивания ( $Oa$ ) и достигает соответствующего максимального значения  $B_a$ . Если затем ток и напряженность поля уменьшаются, то и магнитная индукция уменьшается, но при соответствующих значениях напряженности магнитная индукция несколько больше, чем при увеличении напряженности. Кривая изменения магнитной индукции (участок  $ab$  на рис. 6.3) располагается выше кривой начального намагничивания. При нулевых значениях тока и напряженности поля магнитная индукция имеет некоторое значение  $B_r$ , называемое остаточной индукцией (отрезок  $Ob$  на рис. 6.3).

Таким образом, магнитная индукция в ферромагнитном материале зависит не только от напряженности поля, но

и от предшествующего состояния ферромагнетика. Это явление называется гистерезисом. Оно обусловлено как бы внутренним трением, возникающим при изменении ориентации магнитных моментов доменов.

При изменении направления намагничивающего тока, а следовательно, и направления напряженности поля и постепенном увеличении тока обратного направления напряженность поля достигает значения  $H_c$ , называемого коэрцитивной силой (отрезок  $Oa$ ), при котором магнитная индукция  $B=0$ . При дальнейшем увеличении тока и напряженности поля магнитопровод намагничивается в противоположном направлении и при напряженности поля  $H_e = -H_a$  магнитная индукция достигнет значения  $B_e = -B_a$ . Затем при уменьшении тока и напряженности поля до нуля магнитная индукция  $B_0$  становится равной  $-B_0$ . Наконец, при следующем изменении направления тока и напряженности поля и увеличения ее до прежнего значения  $H_a$  магнитная индукция увеличится также до прежнего значения  $B_a$ . Рассмотренный цикл перемагничивания ферромагнетика по кривой  $abvгдеа$  называется гистерезисным циклом (петлей гистерезиса).

Такая симметричная замкнутая петля гистерезиса (рис. 6.3) получается в действительности только после нескольких перемагничиваний с увеличением тока до значения  $I_a$ . При первых циклах перемагничивания петля несимметричная и незамкнутая, как показано на рис. 6.4. Наибольшая замкнутая петля, которая может быть получена для данного ферромагнитного материала, называется предельной (рис. 6.5). При напряженности поля  $H > H_{max}$  получается уже безгистерезисный участок кривой  $B(H)$ .

Если для данного ферромагнитного материала, выбирая

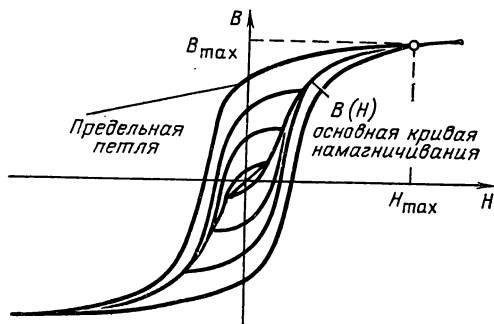


Рис. 6.5. Предельная петля и основная кривая намагничивания

различные наибольшие значения тока  $I_a$ , получить несколько симметричных петель гистерезиса (рис. 6.5) и соединить вершины петель, то получим кривую, называемую основной кривой намагничивания, близкую к кривой начального намагничивания.

Циклическое перемагничивание можно применить для размагничивания магнитопровода, т. е. для уменьшения остаточной индукции до нулевого значения. С этой целью магнитопровод подвергают воздействию изменяющегося по направлению и постепенно уменьшающегося магнитного поля.

Периодическое перемагничивание связано с затратой энергии, которая, превращаясь в тепло, вызывает нагрев магнитопровода. Площадь петли гистерезиса пропорциональна энергии, затраченной при одном цикле перемагничивания. Энергия, затраченная на процесс перемагничивания, называется потерями от гистерезиса. Мощность потерь на циклическое перемагничивание, выражаемая обычно в ваттах на килограмм, зависит от материала, максимальной магнитной индукции и числа циклов перемагничивания в секунду или, что то же, частоты перемагничивания.

### 6.3. ФЕРРОМАГНИТНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Ферромагнитные материалы делятся на две группы: магнитно-мягкие и магнитно-твердые.

а) **Магнитно-мягкие материалы** применяются в качестве магнитопроводов (сердечников) в устройствах и приборах, где магнитный поток постоянный (полюсные башмаки и сердечники измерительного механизма по рис. 5.29) или переменный (например, магнитопровод трансформатора). Они обладают низким значением коэрцитивной силы  $H_c$  (ниже 400 А/м), высокой магнитной проницаемостью и малыми потерями от гистерезиса. К этой группе материалов относятся: техническое железо и низкоуглеродистые стали, листовые электротехнические стали, железоникелевые сплавы с высокой проницаемостью (пермаллои) и оксидные ферромагнетики — ферриты и оксиферы.

Техническое железо с содержанием углерода до 0,04 %, углеродистые стали и чугун широко применяются для магнитопроводов, работающих в условиях постоянных магнитных полей. Техническое железо обладает высокой индукцией насыщения (до 2,2 Тл), высокой магнитной проницаемостью и низкой коэрцитивной силой.

Электротехнические стали — это сплавы же-

леза с кремнием (1—4 %). Путем изменения содержания кремния и применением различных технологических приемов получают стали с широким диапазоном магнитных свойств. Кремний улучшает свойства технического железа: увеличиваются начальная и максимальная магнитные проницаемости, уменьшается коэрцитивная сила, уменьшаются потери энергии от гистерезиса, увеличивается удельное электрическое сопротивление, что важно для уменьшения так называемых вихревых токов, возникающих при циклически изменяющемся магнитном поле и нагревающих магнитопровод.

Стали с низким содержанием кремния имеют низкую магнитную проницаемость, большую индукцию насыщения и большие удельные потери, они применяются в установках и приборах цепей постоянного тока или переменного тока низкой частоты. Стали с высоким содержанием кремния применяются в тех случаях, когда нужно иметь высокую магнитную проницаемость в слабых и средних полях и малые потери от гистерезиса и вихревых токов, вследствие чего они могут применяться для магнитопроводов, работающих при повышенной частоте тока.

Основные кривые намагничивания некоторых ферромагнитных материалов даны на рис. 6.6.

Пермаллои — это сплавы различного процентного содержания железа и никеля, а некоторые из них, кроме то-

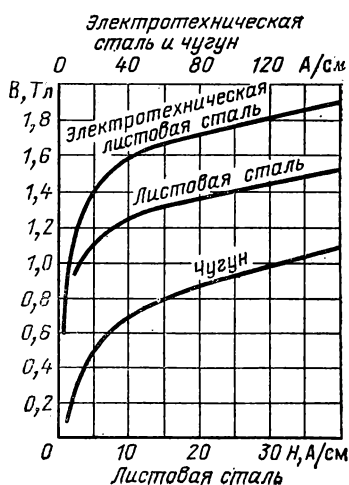


Рис. 6.6. Кривые намагничивания некоторых ферромагнитных материалов

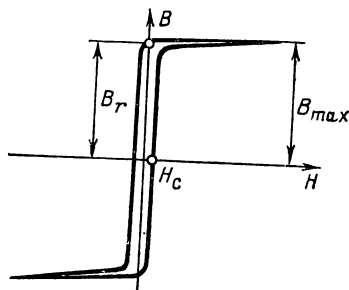


Рис. 6.7. Прямоугольная петля гистерезиса

го, молибдена, хрома, кремния, алюминия. Пермаллои имеют высокую магнитную проницаемость, в 10—15 раз большую, чем у листовой электротехнической стали. В этих сплавах индукция насыщения достигается при малых напряженностях поля (от десятых долей до нескольких сотен ампер на метр). Одни из них имеют низкую индукцию насыщения  $B_s$  (около 0,6—0,8 Тл), другие — относительно высокую (1,3—1,6 Тл). К первой группе относятся высоконикелевые пермаллои, например содержащий 79 % никеля и 3,8 % молибдена, у которого  $\mu_n = 22\,000$ ;  $\mu_{max} = 120\,000$ ;  $B_s = 0,75$  Тл. Ко второй группе относятся низконикелевые пермаллои, например содержащие 45 % никеля, у которого  $\mu_n = 2500$ ;  $\mu_{max} = 23\,000$ ;  $B_s = 1,5$  Тл.

У пермаллоев с прямоугольной петлей гистерезиса (рис. 6.7) степень прямоугольности петли характеризуется отношением остаточной индукции  $B_r$  к максимальной индукции  $B_{max}$ , под которой понимают индукцию при напряженности поля, в 5—10 раз превышающую коэрцитивную силу. Это отношение достигает 0,85—0,99. Коэрцитивная сила таких пермаллоев лежит в пределах от 1 до 30 А/м.

Магнитные свойства пермаллоев в сильной степени зависят от технологии их изготовления.

Ферритами называют ферромагнитные материалы, получаемые из смеси окислов железа, цинка и других элементов. При изготовлении магнитопроводов смесь размалывают, прессуют и отжигают при температуре около 1200 °С; таким образом получают магнитопроводы нужной формы. Ферриты обладают очень большим удельным сопротивлением, вследствие чего потери из-за вихревых токов чрезвычайно малы и их можно применять при высокой частоте.

Ферриты обладают значительной начальной магнитной проницаемостью, незначительной индукцией насыщения (0,18—0,32 Тл) и малой коэрцитивной силой (8—80 А/м).

Магнитодиэлектрики — это материалы, получаемые из смеси мелкозернистого ферромагнитного порошка с диэлектриком (поливинилхлорид, полиэтилен). Смесь формуют, прессуют и запекают; в результате мельчайшие частицы ферромагнетика оказываются разделенными электроизолирующей пленкой из немагнитного материала.

Ферриты и магнитодиэлектрики широко применяются в качестве сердечников в аппаратуре проводной и радиосвязи, в магнитных усилителях, вычислительных машинах и в других областях техники.

б) **Магнитно-твердые материалы** предназначены для из-



готовления постоянных магнитов самого различного назначения. Эти материалы характеризуются большой коэрцитивной силой и большой остаточной индукцией.

К магнитно-твердым материалам относятся: углеродистые, вольфрамовые, хромистые и кобальтовые стали; их коэрцитивная сила 5000—8000 А/м, остаточная индукция 0,8—1 Тл. Они обладают ковкостью, поддаются прокатке, механической обработке и выпускаются промышленностью в виде полос или листов.

К магнитно-твердым материалам, обладающим лучшими магнитными свойствами, относятся сплавы: альни, альни-си, альнико и др. Они характеризуются коэрцитивной силой  $H_c = 20\,000 \div 60\,000$  А/м и остаточной индукцией  $B_r = 0,4 \div 0,7$  Тл.

#### 6.4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД

Так как линии магнитной индукции непрерывны, то магнитный поток при переходе из одной среды в другую не изменяется. Однако значения магнитной индукции в двух средах с разными значениями магнитной проницаемости неодинаковы.

Допустим, что через небольшой плоский участок поверхности раздела площадью  $S$  двух изотропных сред с известными магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  проходит магнитный поток  $\Phi$  (рис. 6.8);  $\mathbf{B}_1$  — вектор магнитной индукции

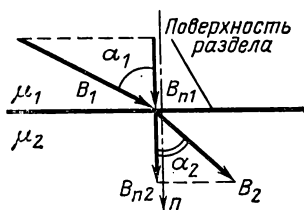


Рис. 6.8. Изменение индукции магнитного поля на границе раздела двух сред

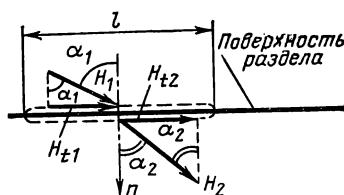


Рис. 6.9. Изменение напряженности магнитного поля на границе раздела двух сред

у границы раздела в первой среде,  $\mathbf{B}_2$  — во второй. Вследствие непрерывности магнитного потока произведение нормальной составляющей вектора магнитной индукции в первой среде  $B_{n1}$  (проекция на нормаль  $n$  к поверхности раздела) и площади  $S$  (5.12) должно быть равно такому же

произведению для второй среды, т. е.

$$B_{n1} S = B_{n2} S,$$

откуда, сократив общий множитель  $S$ , получим

$$B_{n1} = B_1 \cos \alpha_1 = B_{n2} = B_2 \cos \alpha_2, \quad (6.4)$$

или

$$\mu_1 H_1 \cos \alpha_1 = \mu_2 H_2 \cos \alpha_2. \quad (6.5)$$

Как известно (§ 5.4), вектор напряженности магнитного поля в изотропной среде совпадает по направлению с вектором магнитной индукции. Поэтому  $\mathbf{H}_1$  — вектор напряженности магнитного поля в первой среде — параллелен  $\mathbf{B}_1$ ; аналогично  $\mathbf{H}_2$  параллелен  $\mathbf{B}_2$  (рис. 6.9).

Составляющая  $H_t$  вектора напряженности поля  $\mathbf{H}$ , касательная к плоскому участку поверхности раздела (тангенциальная составляющая), имеет по обе стороны одинаковые значения;  $H_{t1} = H_{t2}$ . Действительно, проведем на поверхности раздела замкнутый контур длиной  $2l$ , так чтобы одна его сторона лежала в первой среде, а другая — во второй (на рис. 6.9 показан штриховой линией). Пусть поперечные размеры контура столь малы, что их можно не учитывать. Обойдем контур, например, по направлению движения часовой стрелки. По закону полного тока (5.23) можем записать  $H_{t1}l - H_{t2}l = \Sigma I$  (вторая составляющая записана со знаком минус, так как во второй среде вектор  $H_{t2}$  направлен навстречу обхода контура). Площадь, охваченную контуром, вследствие малых поперечных размеров можно считать равной нулю; поэтому и ток, пронизывающий контур, равен нулю ( $\Sigma I = 0$ ) и

$$H_{t1} = H_{t2}, \quad (6.6)$$

или

$$H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2. \quad (6.7)$$

Выражения (6.4) и (6.6) называют граничными условиями для магнитного поля.

Разделив почленно уравнение (6.7) на (6.5), получим

$$\frac{H_1 \sin \alpha_1}{\mu_1 H_1 \cos \alpha_1} = \frac{H_2 \sin \alpha_2}{\mu_2 H_2 \cos \alpha_2},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha_1 / \operatorname{tg} \alpha_2 = \mu_1 / \mu_2, \quad (6.8)$$

т. е. отношения тангенсов углов, образованных векторами магнитной индукции в двух средах и нормалью  $n$  к поверх-

ности их раздела (рис. 6.8), равно отношению магнитных проницаемостей этих сред. Так как вектор магнитной индукции направлен в каждой точке магнитной линии по касательной к ней, то уравнение (6.8) можно рассматривать как закон преломления магнитных линий на границе раздела сред.

Из уравнения (6.8) следует, что  $\operatorname{tg} \alpha_2 = \mu_2 \operatorname{tg} \alpha_1 / \mu_1$ . Если  $\mu_1 \gg \mu_2$ , то  $\operatorname{tg} \alpha_2 \approx 0$  и  $\alpha_2 \approx 0$ . Таким образом, *линии магнитной индукции из ферромагнитного материала ( $\mu_1$ ) переходят в неферромагнитную среду ( $\mu_2$ ) почти под прямым углом к поверхности раздела.*

**Пример 6.1.** При заданной напряженности поля магнитная проницаемость стали  $\mu_1 = 1100$ . Вектор магнитной индукции в стали составляет с нормалью к поверхности раздела двух сред угол  $\alpha_1 = 87^\circ$  (рис. 6.10).

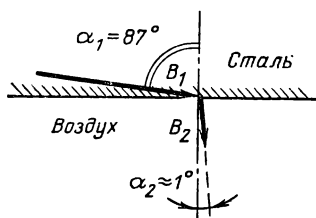


Рис. 6.10. К примеру 6.1

Определить угол  $\alpha_2$ , образуемый вектором магнитной индукции в воздухе с нормалью к поверхности раздела.

**Решение**

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{1100} \operatorname{tg} 87^\circ = 0,0175.$$

Этому значению тангенса соответствует угол  $\alpha_2 \approx 1^\circ$ , т. е. в воздухе вектор магнитной индукции практически перпендикулярен поверхности раздела.

## 6.5. МАГНИТНАЯ ЦЕПЬ

Магнитной цепью называется устройство, отдельные участки которого выполнены из ферромагнитных материалов, по которым замыкается магнитный поток. Примерами простейших цепей могут служить магнитопроводы кольцевой катушки (рис. 5.21) и электромагнита, изображенного на рис. 6.11, а. Электрические машины и трансформаторы, электромагнитные аппараты и приборы имеют обычно магнитные цепи более сложной формы. Если маг-

нитная цепь выполнена из одного и того же материала и имеет по всей длине одинаковое сечение, то цепь называется однородной. Если же отдельные участки цепи изготовлены из различных ферромагнитных материалов и имеют различные длины и сечения, то цепь — неоднородная. Магнитные цепи, так же как и электрические, бывают разветвленные (рис. 6.11, б) и неразветвленные (рис. 6.11, а).

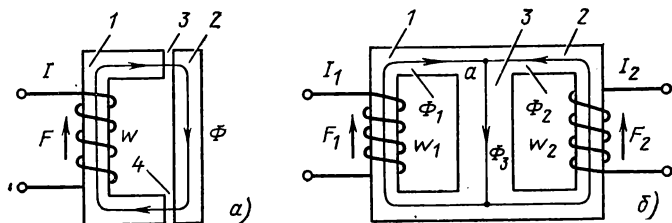


Рис. 6.11. Магнитные цепи:  
а — неразветвленная; б — разветвленная

В последнем случае магнитный поток  $\Phi$  во всех сечениях имеет одно и то же значение.

Разветвленные цепи могут быть симметричными и несимметричными. Цепь, представленная на рис. 6.11, б, считается симметричной, если правая и левая части ее имеют одинаковые размеры, выполнены из одного и того же материала и если МДС  $I_1 w_1$  и  $I_2 w_2$  одинаковы. При невыполнении хотя бы одного из указанных условий цепь будет несимметричной.

Разобьем неразветвленную магнитную цепь, например, по рис. 6.11, а на ряд однородных участков, каждый из которых выполнен из определенного материала и имеет одинаковое поперечное сечение  $S$  вдоль всей своей длины. Длину каждого участка  $l$  будем считать равной длине средней магнитной линии в пределах этого участка. Из сказанного выше следует, что магнитные потоки всех участков неразветвленной цепи равны, т. е.  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \dots = \Phi_n$ , и поле на каждом участке можно считать однородным, т. е.  $\Phi = BS$ ; поэтому  $B_1 S_1 = B_2 S_2 = B_3 S_3 = \dots = B_n S_n$ , где  $n$  — число участков цепи. Магнитное напряжение (5.21а) на любом из участков магнитной цепи

$$U_m = Hl = \frac{B}{\mu_r \mu_0} l = \frac{\Phi}{S} \frac{l}{\mu_r \mu_0}.$$

При заданном направлении тока в обмотке направление потока и МДС  $I\omega$  определяется по правилу буравчика.

По аналогии с электрической цепью величину

$$R_m = \frac{l}{S\mu_r \mu_0} \quad (6.9)$$

называют магнитным сопротивлением участка магнитной цепи.

В системе СИ единица измерения магнитного сопротивления  $1/\text{Гн}$ , так как

$$[R_m] = \left[ \frac{l}{S\mu_r \mu_0} \right] = \frac{\text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{Гн/м}} = \frac{1}{\text{Гн}}.$$

Таким образом, магнитное напряжение

$$U_m = R_m \Phi. \quad (6.10)$$

Выражение (6.10) по аналогии с электрической цепью часто называют законом Ома для магнитной цепи. Однако вследствие нелинейности цепи, вызванной непостоянством магнитной проницаемости  $\mu_r$  ферромагнетиков, оно практически не применяется для расчета магнитных цепей.

При расчетах разветвленных магнитных цепей пользуются двумя законами Кирхгофа, аналогичными законам Кирхгофа для электрической цепи.

Первый закон Кирхгофа непосредственно вытекает из непрерывности магнитных линий, т.е. и магнитного потока; алгебраическая сумма магнитных потоков в точке разветвления равна нулю:

$$\Sigma \Phi = 0. \quad (6.11)$$

Например, для узла  $a$  на рис. 6.11, б  $-\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0$ .

Второй закон Кирхгофа для магнитной цепи основывается на законе полного тока: алгебраическая сумма магнитных напряжений на отдельных участках цепи равна алгебраической сумме МДС:

$$\Sigma U_m = \Sigma F = \Sigma I\omega. \quad (6.12)$$

Например, для левого контура на рис. 6.11, б  $U_{m1} + U_{m3} = F_1 = I_1 \omega_1$ .

Как следует из закона Ома, для получения наибольшего магнитного потока при наименьшей МДС у магнитной цепи должно быть возможно меньшее магнитное сопротивление. Большая магнитная проницаемость ферромагнитных материалов обеспечивает получение малых магнитных сопро-

тивлений магнитопроводов из этих материалов. Поэтому магнитные цепи электрических машин выполняют преимущественно из ферромагнетиков, а участки цепей из неферромагнитных материалов, т.е. неизбежные или необходимые воздушные зазоры, делают, как правило, возможно малыми.

Схема устройства магнитной цепи двухполюсной машины с явно выраженными полюсами показана на рис. 6.12.

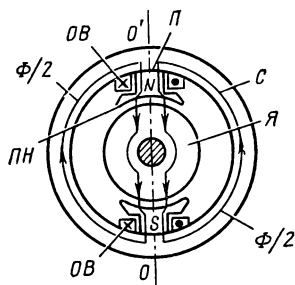


Рис. 6.12. Магнитная цепь электрической машины с явно выраженными полюсами

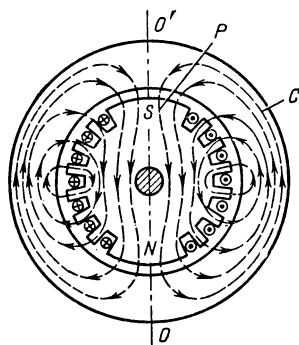


Рис. 6.13. Магнитная цепь электрической машины с неявно выраженными полюсами

Плоскость  $OO'$ , проведенная через середины полюсов  $N$  и  $S$  и ось машины, делит магнитную цепь на две симметричные части. В каждой из них магнитный поток  $\Phi/2$  замыкается через полюсы  $P$ , полюсные наконечники  $ПН$ , воздушные зазоры, якорь  $Я$  и станину машины  $С$ . Магнитодвижущая сила создается током в обмотке возбуждения  $ОВ$ , расположенной на полюсах  $N$  и  $S$ . Из северного полюса  $N$  магнитные линии выходят и в южный полюс  $S$  входят.

Схема устройства магнитной цепи двухполюсной машины с неявно выраженными полюсами показана на рис. 6.13. Здесь обмотка возбуждения заложена в пазы ротора  $P$  — вращающейся части машины, укрепленной на валу. Как и в предыдущем случае, плоскость  $OO'$ , проведенная через середины полюсов  $N$  и  $S$ , делит магнитную цепь машины на две симметричные части, в каждой из которых магнитный поток  $\Phi/2$ . Магнитный поток замыкается через ротор машины, воздушные зазоры и станину машины  $С$ , представляющую собой неподвижный наружный стальной цилиндр — статор машины.

## 6.6. РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

**а) Неразветвленная цепь.** Наиболее часто расчет неразветвленной магнитной цепи (рис. 6.11, а) состоит в определении МДС, необходимой для получения заданного магнитного потока в цепи, размеры отдельных участков которой и материалы их известны.

Расчет производится в следующем порядке: 1) проводят среднюю магнитную линию (показана на рис. 6.11, а); 2) разбивают магнитную цепь на однородные участки с неизменными сечениями и определяют сечения участков  $S$  и длины их  $l$  по средней магнитной линии; 3) по требуемому значению магнитного потока  $\Phi$  и известным сечениям  $S$  отдельных участков находят магнитную индукцию на каждом из участков по (5.11):

$$B = \Phi/S;$$

4) по кривым намагничивания для каждого ферромагнитного участка определяют напряженность магнитного поля  $H$ . Напряженность поля в воздушном зазоре или неферромагнитном участке

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{B_0}{125 \cdot 10^{-8}} = 0,8 \cdot 10^6 B_0, \quad (6.13)$$

где  $H_0$  — выражено в амперах на метр, а  $B_0$  — в теслах;

5) по второму закону Кирхгофа сумма магнитных напряжений на отдельных участках равна искомой МДС, т. е.

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 l_0 + \dots = Iw.$$

Определив МДС  $Iw$  и задавшись числом витков катушки, определяют ток в ней:

$$I = Iw/w.$$

Рассмотренный расчет сделан в предположении, что магнитный поток на всех участках магнитной цепи одинаков. В действительности незначительная часть магнитного потока, называемая потоком рассеяния, замыкается вокруг катушки с током, частично проходя по воздуху и частично по той части магнитопровода, которая непосредственно прилегает к виткам катушки.

**Пример 6.2.** Определить МДС катушки, расположенной на магнитопроводе, который выполнен из листовой электротехнической стали (рис. 6.14), с тем чтобы получить на первом участке магнитную индукцию  $B_1 = 1,6$  Тл. Размеры магнитопровода в миллиметрах указаны на рисунке. Стыки имеют воздушный зазор по 0,1 мм.

Решение. Проведем среднюю магнитную линию и по данным на рис. 6.14 размерам определим длину средней линии для каждого участка ( $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  и  $l_4$ ) магнитной цепи (табл. 6.1). Пренебрегая рассея-

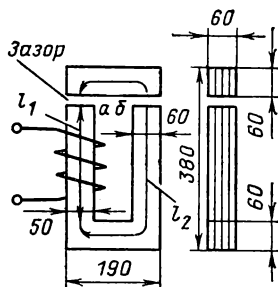


Рис. 6.14. Магнитная цепь к примеру 6.2

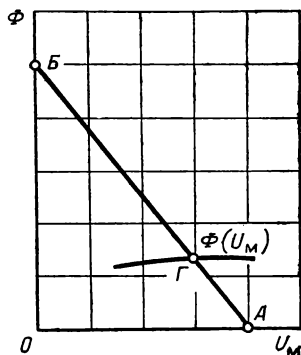


Рис. 6.15. К расчету неразветвленной магнитной цепи

Таблица 6.1

№ участка	Материал	$l$ , см	$S$ , см <sup>2</sup>	$B$ , Тл	$H$ , А/см	$U_M = Hl$ , А
1	Электротехническая сталь	26	30	1,6	40	1040
2	То же	65	36	1,33	17	1105
3	Воздушный зазор	0,01	30	1,6	12 800	128
4	»	0,01	36	1,33	10 640	106

нием, получим на всех участках одинаковый магнитный поток, т. е.  $B_1 S_1 = B_2 S_2 = B_3 S_3 = B_4 S_4$ , откуда

$$B_2 = B_1 S_1 / S_2 = 1,6 \cdot 30 / 36 = 1,33 \text{ Тл.}$$

Напряженности поля в участках 1 и 2 определим по кривой намагничивания (рис. 6.6), а в воздушных зазорах по формуле  $H = B / \mu_0$ .

Искомая МДС

$$F = Iw = \sum Hl = 2380 \text{ А.}$$

Задавшись числом витков, например 238, получим необходимый ток в обмотке:

$$I = F / w = 2380 / 238 = 10 \text{ А.}$$



Обратная задача заключается в расчете при заданной МДС магнитного потока и магнитной индукции неразветвленной цепи, размеры и материалы которой известны.

При решении этой задачи заданную неразветвленную цепь (рис. 6.11, *a*) рассматривают состоящей из двух частей: ферромагнитного сердечника с нелинейной зависимостью между  $\Phi$  и  $U_m$  и суммарного воздушного зазора с линейной зависимостью между  $\Phi$  и  $U_{0m}$ .

Пользуясь кривыми намагничивания (рис. 6.6), построим для нелинейной части цепи магнитную характеристику  $\Phi(U_m)$ . Для этого определим по заданным размерам магнитной цепи длину средней магнитной линии в сердечнике  $l$  и поперечное сечение сердечника  $S$ . Далее выберем несколько (4—5) значений  $H$  из кривой намагничивания (рис. 6.6) и умножим эти значения на длину  $l$ , находя таким образом величины  $U_m = Hl$ ; соответствующие значения индукции  $B$ , взятые из той же кривой намагничивания, умножим на сечение магнитопровода  $S$ , т. е. найдем значения потока  $\Phi = BS$ . По полученным данным построим магнитную характеристику  $\Phi(U_m)$ , как показано на рис. 6.15.

По второму закону Кирхгофа

$$U_m + U_{0m} = I\omega = F,$$

где  $U_{0m} = R_{0m}\Phi = \frac{l_0}{\mu_0 S} \Phi$  — магнитное напряжение на линейном участке магнитной цепи (воздушных зазорах).

Из написанного уравнения получим

$$U_m = F - R_{0m}\Phi. \quad (6.14)$$

Зависимость  $U_m$  от  $\Phi$  (6.14) — это линейное уравнение, которое графически изображается прямой линией. Построим ее по двум точкам. Полагая  $\Phi = 0$ , найдем  $U_m = F = I\omega$ . Отложив по оси абсцисс заданное значение  $I\omega$ , получим одну точку  $A$  прямой (рис. 6.15). Полагая  $U_m = 0$ , находим магнитный поток  $\Phi = F/R_{0m}$ . Отложив по оси ординат найденное значение  $\Phi_0$ , получим вторую точку  $B$  прямой. Прямая, проведенная через найденные точки, представляющая уравнение (6.14), пересекает магнитную характеристику в точке  $F$  (рис. 6.15), ордината которой и определяет искомый магнитный поток  $\Phi$ , так как точка  $F$  удовлетворяет и магнитной характеристике  $\Phi(U_m)$ , и уравнению (6.14).

Индукция, соответствующая найденному значению магнитного потока,  $B = \Phi/S$ .

Таким образом, решение обратной задачи аналогично расчету неразветвленной электрической цепи методом пересечений (рис. 3.23 и 3.24).

Если магнитопровод неразветвленной цепи состоит из нескольких участков с различными сечениями или выполненными из различных материалов, то магнитное напряжение  $U_m$  надо искать как сумму магнитных напряжений на отдельных участках.

**б) Разветвленная симметричная цепь.** На рис. 6.16 показана разветвленная симметричная магнитная цепь.

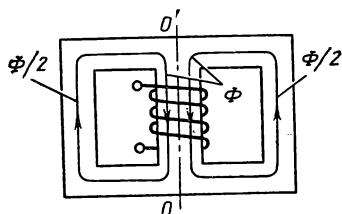


Рис. 6.16. Разветвленная симметричная магнитная цепь

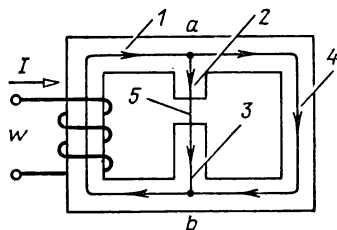


Рис. 6.17. Разветвленная несимметричная магнитная цепь

Магнитный поток  $\Phi$ , проходящий через средний стержень, делится на две равные части  $\Phi/2$ , которые замыкаются через крайние стержни магнитопровода.

Для расчета такой цепи делят ее плоскостью  $OO'$ , проходящей через середину среднего стержня, на две части с одинаковыми магнитными сопротивлениями, а следовательно, и с одинаковыми магнитными токами  $\Phi/2$ . Магнитодвижущая сила определяется так же, как было показано выше для неразветвленной цепи.

**в) Разветвленная несимметричная цепь.** Для расчета разветвленной несимметричной магнитной цепи могут применяться как графические, так и аналитические методы. Как и для неразветвленной цепи, решение прямой задачи (определение МДС при заданном потоке) проще решения обратной задачи.

На рис. 6.17 показана разветвленная несимметричная цепь, состоящая из пяти участков, из которых первые четыре из ферромагнитного материала, а пятый — воздуш-

ный зазор. Известны средние длины участков и их поперечные сечения. Задан магнитный поток в воздушном зазоре  $\Phi_5$ , требуется определить необходимую МДС (прямая задача).

Порядок расчета следующий. В последовательно соединенных участках поток один и тот же, т. е.  $\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_5$ . Определим индукции  $B_2 = \Phi_2/S_2$ ,  $B_3 = \Phi_3/S_3$ ,  $B_5 = \Phi_5/S_5$  и по кривым намагничивания напряженности  $H_2$ ,  $H_3$ , а для воздушного зазора находим  $H_5 = B_5/\mu_0$ . Магнитное напряжение между узловыми точками  $a$  и  $b$  равно сумме напряжений на участках 2, 5, 3, т. е.  $U_m = H_2 l_2 + H_5 l_5 + H_3 l_3$ . Для участка 4 между узлами  $a$  и  $b$  магнитное напряжение такое же и равно  $U_m = H_4 l_4$ , откуда определим  $H_4$ , затем по кривой намагничивания  $B_4$  и поток  $\Phi_4 = B_4 S_4$ . По первому закону Кирхгофа  $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_4$  и  $B_1 = \Phi_1/S_1$ , по кривой намагничивания находим  $H_1$ . По второму закону Кирхгофа искомая МДС  $F = Iw = H_1 l_1 + U_m$ .

Обратную задачу можно решить, например, методом последовательных приближений, задавая  $\Phi_5$  и определяя  $F$ , пока найденное значение  $F$  не будет достаточно близко к заданному.

## 6.7. ПОСТОЯННЫЕ МАГНИТЫ

Постоянные магниты широко применяются в ряде областей электротехники, в частности в устройствах автоматики, телемеханики, связи, измерительной техники и т. д.

Постоянные магниты изготовляют из магнитно-твердых ферромагнитных материалов, обладающих высокой остаточной индукцией и большой коэрцитивной силой. Свойства постоянного магнита характеризуются участком петли гистерезиса при  $B > 0$  и  $H < 0$ , который называют кривой размагничивания гистерезисного цикла (рис. 6.18).

Качество материала для изготовления магнитов в известной степени определяется произведением остаточной индукции  $B_r$  и коэрцитивной силы  $H_c$ . Чем больше это произведение, тем лучше материал для магнитов.

Кривая размагничивания (рис. 6.18) получается при размагничивании предварительно намагниченного до состояния насыщения замкнутого магнитопровода из ферромагнитного материала, но обычно магнитная цепь посто-

янного магнита не замкнута. Она состоит из собственно магнита  $NS$ , присоединенной к его концам арматуры из магнитно-мягкой стали и воздушных зазоров (рис. 6.19).

Воздушный зазор в магнитной цепи постоянного магнита вызывает уменьшение остаточной индукции по сравне-

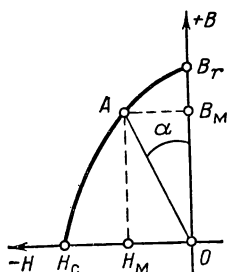


Рис. 6.18. Кривая размагничивания гистерезисного цикла

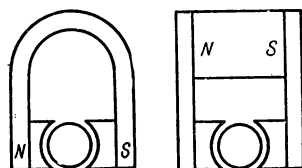


Рис. 6.19. Армированные постоянные магниты

нию с той, которая получилась бы при замкнутой магнитной цепи. Если, например, подковообразный сердечник, замкнутый якорем из магнитно-мягкой стали (рис. 6.20, а),

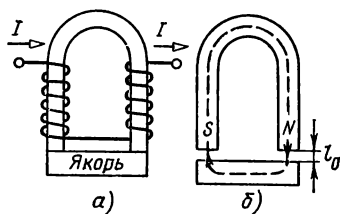
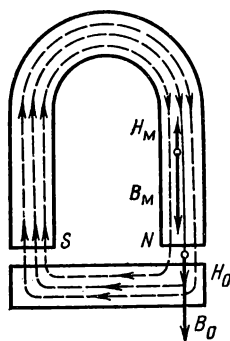


Рис. 6.20. Подковообразные электромагнит (а) и постоянный магнит (б)

Рис. 6.21. Индукция и напряженность поля постоянного магнита



намагнитить, то после отключения тока  $I$  будет получена остаточная индукция  $B_r$ , а при удалении якоря на расстояние  $l_0$  (рис. 6.20, б) индукция уменьшится до некоторого значения  $B_m$  (рис. 6.18).

Уменьшение индукции можно объяснить следующим образом. Проведя среднюю магнитную линию через магнит, воздушный зазор и якорь (рис. 6.20, б) и обозначив

напряженности поля на участках цепи соответственно  $H_m$ ,  $H_0$  и  $H_{\text{я}}$ , запишем по второму закону Кирхгофа уравнение для замкнутого контура (намагничивающая обмотка снята и МДС равна нулю):

$$H_m l_m + 2H_0 l_0 + H_{\text{я}} l_{\text{я}} = 0. \quad (6.15)$$

Пренебрегая практически малой величиной магнитного напряжения якоря  $H_{\text{я}} l_{\text{я}}$  по сравнению с  $2H_0 l_0$  (вследствие большой магнитной проницаемости материала якоря), уравнение (6.15) переписываем в виде

$$H_m l_m + 2H_0 l_0 = 0,$$

откуда

$$H_m = -H_0 2l_0/l_m. \quad (6.16)$$

Вектор магнитной индукции в зазоре  $B_0 = \mu_0 H_0$  всегда совпадает по направлению с вектором напряженности поля (рис. 6.21). Так как магнитные линии непрерывны, то направления векторов магнитной индукции в сердечнике  $B_m$  и в зазоре  $B_0$  у границ их раздела одинаковы (рис. 6.21). Но направления векторов напряженности поля в сердечнике  $H_m$  и зазоре  $H_0$  противоположны, что непосредственно следует из выражения (6.16). Поэтому введение воздушного зазора в магнитную цепь эквивалентно размагничивающему действию некоторого воображаемого тока, направленного обратно току  $I$  в обмотке при намагничивании без воздушного зазора (рис. 6.20, а).

Таким образом, воздушный зазор оказывает размагничивающее действие.

Тангенс угла  $\alpha$  (рис. 6.18), образованного осью ординат и прямой, соединяющей начало координат с точкой петли  $A$ , координаты которой  $H_m$  и  $B_m$ , определяет коэффициент размагничивания:

$$N = \frac{|H_m|}{B_m} = \operatorname{tg} \alpha \frac{m_H}{m_B},$$

где  $m_H$  и  $m_B$  — масштабы.

Зная коэффициент размагничивания  $N$ , по кривой размагничивания материала магнита можно найти магнитную индукцию  $B_m$  в магните, т. е. точку  $A$ .

Для определения коэффициента  $N$ , считая магнитный поток и индукции в зазоре  $B_0$  и в сердечнике  $B_m$  одинаковыми (зазор мал), перепишем уравнение (6.16) в виде

$$|H_m| = H_0 \frac{2l_0}{l_m} = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{2l_0}{l_m} = \frac{B_m 2l_0}{\mu_0 l_m},$$

откуда

$$N = \frac{|H_M|}{B_M} = \frac{1}{\mu_0} \frac{2l_0}{l_M}.$$

Следовательно, коэффициент размагничивания  $N$  пропорционален длине воздушного зазора и обратно пропорционален длине магнита.

Материалы, применяемые для изготовления постоянных магнитов, были рассмотрены в § 6.3.

## Глава седьмая

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

#### 7.1. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

**а) Электродвижущая сила, наводимая в проводе.** В проводе, который при движении в магнитном поле пересекает магнитные линии, возбуждается электродвижущая сила, получившая название ЭДС электромагнитной индукции, а само явление названо электромагнитной индукцией. Это явление было открыто М. Фарадеем в 1831 г.

На рис. 7.1 показан провод, движущийся с постоянной скоростью  $v$  в однородном поле перпендикулярно вектору магнитной индукции  $B$  и оси провода. При движении провода свободные электроны провода перемещаются с той же скоростью  $v$ . Следовательно, на каждую заряженную частицу действует электромагнитная сила (5.10). Электромагнитную силу называют еще силой Лоренца. Направление электромагнитной силы определяется по правилу левой руки. Электромагнитные силы вызывают перемещение электронов на один конец провода, создавая на нем отрицательный заряд. На другом конце провода недостаток электронов соответствует положительному заряду. Таким образом, на концах провода возникают заряды противоположных знаков. Разделение зарядов прекратится, когда электромагнитные силы уравновесятся силами электрического поля, созданного разделенными зарядами в проводе, т.е. кулоновскими силами. Электромагнитная сила, действующая на каждый электрон (5.10),

$$F_0 = Bq_0 v,$$

где  $q_0$  — заряд электрона.

Отношение силы к заряду выражает напряженность электрического поля индукции (1.27)

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = F_0/q_0 = Bv. \quad (7.1)$$

Заряды противоположных знаков, скопившиеся на концах провода, создают в нем однородное электрическое поле, действующее с силой

$$F = \mathcal{E}q_0.$$

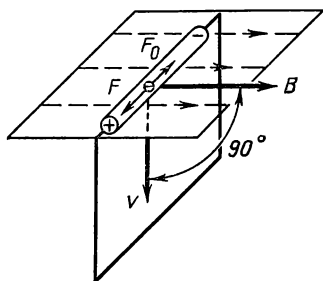


Рис. 7.1. Перемещение электронов в проводнике под действием электромагнитных сил

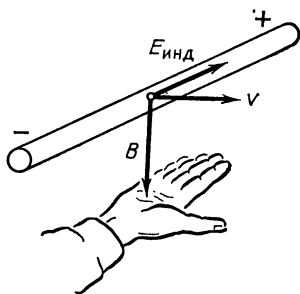


Рис. 7.2. Правило правой руки

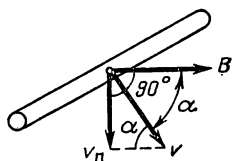


Рис. 7.3. К определению нормальной составляющей скорости

Равновесие сил, действующих на электроны, означает равенство сил  $F_0$  и  $F$ , а следовательно, и равенство

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{инд}} = Bv.$$

Разделение зарядов, происходящее под действием электромагнитных сил, можно рассматривать как результат действия ЭДС электромагнитной индукции. Если концы провода не замкнуты, то напряжение между ними равно ЭДС. При длине провода  $l$  ЭДС электромагнитной индукции

$$E_{\text{инд}} = \mathcal{E}_{\text{инд}} l = \mathcal{E} l = Bvl. \quad (7.2)$$

Наведенная в прямолинейном проводе, перемещаю-

щаемся перпендикулярно линиям магнитной индукции, ЭДС электромагнитной индукции пропорциональна магнитной индукции поля, длине провода и скорости его движения. Это первая формулировка закона электромагнитной индукции.

Направление наведенной ЭДС определяется правилом правой руки. *Ладонь правой руки располагают так, чтобы магнитные линии входили в нее, отогнутый под прямым углом большой палец совмещают с направлением движения проводника, вытянутые четыре пальца указывают направление индуктированной ЭДС* (рис. 7.2).

Если вектор скорости  $v$  движения проводника в магнитном поле составляет с вектором магнитной индукции  $\mathbf{B}$  произвольный угол  $\alpha$  (рис. 7.3), то значение наведенной ЭДС определяется только нормальной к вектору  $\mathbf{B}$  составляющей вектора скорости  $v_n = v \sin \alpha$ . При совпадении направлений векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  электромагнитная сила, действующая на переносимые при таком движении заряды, равна нулю.

Таким образом, при определении напряженности электрического поля в проводе следует брать только проекцию вектора скорости на направление, перпендикулярное вектору  $\mathbf{B}$  (рис. 7.3), т. е.

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = Bv \sin \alpha, \quad (7.1a)$$

и ЭДС, наведенная в проводе,

$$E_{\text{инд}} = Blv \sin \alpha. \quad (7.2a)$$

Замкнув концы провода с наводимой в нем ЭДС внешним участком цепи, получим в ней непрерывное перемещение электронов, т. е. электрический ток, который зависит от ЭДС  $E_{\text{инд}}$  и суммарного сопротивления цепи:

$$I = E_{\text{инд}} / (\Sigma r).$$

Так как направление тока в проводе совпадает с направлением наведенной ЭДС, то его можно определить, пользуясь правилом правой руки.

**б) Электродвижущая сила, наводимая в контуре.** Если прямолинейный провод при движении в однородном поле в направлении, перпендикулярном вектору магнитной индукции, за время  $dt$  проходит путь  $db$ , то скорость движения его

$$v = db/dt,$$

а наводимая в проводе в произвольный момент времени  $t$



ЭДС или, как принято говорить, мгновенное значение ЭДС

$$e(t) = e = Blv = Bl \cdot db/dt.$$

Если скорость  $v$  не остается постоянной, то ЭДС также будет непостоянной и ее обозначают строчной буквой  $e$ .

Произведение  $l \cdot db = dS$  выражает площадку, описанную проводом длиной  $l$  при его движении перпендикулярно магнитным линиям; следовательно, величина  $BdS = d\Phi$  представляет собой магнитный поток, пересекаемый проводом при его движении. Таким образом, мгновенное значение ЭДС, наведенной в проводе,

$$e = \frac{BdS}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (7.3)$$

При движении провода под углом  $\alpha \neq 90^\circ$  к направлению вектора магнитной индукции поток, пересеченный проводом,  $d\Phi = B_n dS$ , где  $B_n = B \sin \alpha$ , выражает нормальную составляющую вектора  $B$  к площадке  $dS$ . При движении провода произвольной формы в неоднородном поле его можно рассматривать состоящим из большого числа прямолинейных участков, а суммарную ЭДС опять определять по (7.3).

На рис. 7.4 показан замкнутый контур, расположенный в неоднородном поле, магнитные линии которого направлены за плоскость рисунка. При перемещении контура на малое расстояние справа налево за время  $dt$  левая часть его пересечет магнитный поток  $d\Phi_1$ , который войдет в контур; при этом наводимая ЭДС  $e_1 = d\Phi_1/dt$ . Правая часть контура за то же время пересечет магнитный поток  $d\Phi_2$ , который выйдет из контура, и ЭДС, наводимая в этой части контура,  $e_2 = d\Phi_2/dt$ . Результирующее приращение магнитного потока в контуре

$$d\Phi = d\Phi_1 - d\Phi_2.$$

Наведенные ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  направлены навстречу друг другу (рис. 7.4), в чем можно убедиться, пользуясь правилом правой руки. Так как на отдельных участках контура наводятся ЭДС разного направления, то в контуре *выбирают положительное направление ЭДС электромагнитной индукции*. При этом чаще положительное направление ЭДС связывают с направлением магнитного потока правилом правого буравчика. Поэтому направление ЭДС  $e_2$  (по направлению движения часовой стрелки) надо считать положительным, а  $e_1$  — отрицательным.

Таким образом, результирующая ЭДС, наводимая в контуре,

$$e = e_2 - e_1 = \frac{d\Phi_2 - d\Phi_1}{dt} = - \frac{d\Phi_1 - d\Phi_2}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (7.4)$$

Из полученной формулы следует, что ЭДС электромагнитной индукции равна скорости уменьшения (изменения)

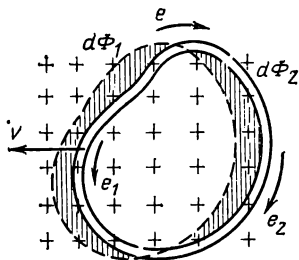


Рис. 7.4. Электродвижущая сила, наводимая в контуре

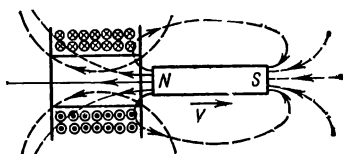


Рис. 7.6. Электродвижущая сила, наводимая в катушке

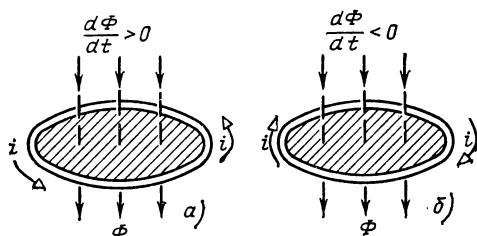


Рис. 7.5. Направление наведенного тока в контуре при возрастании (а) и убывании (б) магнитного потока

магнитного потока, пронизывающего контур. Это вторая формулировка закона электромагнитной индукции. Опыт показывает, что совершенно безразлично, происходит ли это изменение потока при движении контура в магнитном поле или в результате изменения магнитного потока, пронизывающего неподвижный контур.

Направление наведенной ЭДС зависит от того, положительное или отрицательное значение ЭДС получится при вычислении по (7.4). При возрастании потока (направление которого связано с направлением ЭДС правилом буравчика), т. е. при  $d\Phi/dt > 0$ , знак ЭДС отрицателен,

наоборот, при убывании магнитного потока, т. е. при  $d\Phi/dt < 0$ , знак ЭДС положителен.

На рис. 7.5 показан магнитный поток, пронизывающий неподвижный замкнутый контур. Магнитные линии его направлены сверху вниз. Совместим с этим направлением поступательное движение буравчика; направление вращения его рукоятки укажет положительное направление ЭДС, совпадающее с направлением движения стрелки часов. В случае рис. 7.5, а поток нарастает, т. е.  $d\Phi/dt > 0$ , следовательно, по (7.4) ЭДС отрицательная, т. е. в действительности направлена против хода часовой стрелки. То же направление будет иметь и ток  $i$ , вызванный в контуре этой ЭДС. Убывающему магнитному потоку  $d\Phi/dt < 0$  (рис. 7.5, б) соответствует положительная ЭДС, т. е. направленная по движению часовой стрелки.

Для определения действительного направления наведенной ЭДС и тока можно пользоваться общим законом, сформулированным русским академиком Э. Х. Ленцем и называется правилом Ленца: *ток, возникающий в контуре под действием наведенной ЭДС, всегда направлен таким образом, что противодействует изменению магнитного потока, пронизывающего контур.*

Электродвижущую силу в замкнутом контуре можно представить и как сумму произведений  $\mathcal{E}_{\text{инд}} dl$  во всех участках  $dl$  этого контура, что записывают в виде

$$e = \oint \mathcal{E}_{\text{инд}} dl.$$

Следовательно,

$$e = \oint \mathcal{E}_{\text{инд}} dl = - d\Phi/dt. \quad (7.5)$$

Уравнение (7.5) показывает, в частности, что ЭДС, наведенная в контуре, не зависит от материала контура. Уравнение (7.5) распространяют на любые замкнутые контуры, которые можно выделить и в проводящей среде, и в диэлектрике. В любом замкнутом контуре, ограничивающем поверхность, которую пронизывает переменный магнитный поток, возникает ЭДС электромагнитной индукции.

**в) Электродвижущая сила, наводимая в катушке.** На рис. 7.6 показана неподвижная катушка, имеющая  $w$  витков. Вдоль ее оси перемещается постоянный магнит. В результате этого изменяется поток, сцепленный с витками катушки, и в катушке наводится ЭДС индукции. Электродвижущая сила возникает в каждом из соединенных пос-

ледовательно витков; суммарная ЭДС

$$e = e_1 + e_2 + \dots + e_w = -\frac{1}{dt} (d\Phi_1 + d\Phi_2 + \dots + d\Phi_w) = \\ = -\frac{d}{dt} (\Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_w).$$

Алгебраическая сумма потоков, сцепленных с отдельными витками цепи, называется потокосцеплением и обозначается буквой  $\Psi$ . Таким образом,

$$\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_w$$

и суммарная ЭДС

$$e = -d\Psi/dt. \quad (7.6)$$

Если каждый из витков катушки сцеплен с одинаковым магнитным потоком ( $\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_w$ ), что, например, имеет место у катушек с ферромагнитным магнитопроводом, то ЭДС катушки в  $w$  раз больше ЭДС одного витка,

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt}, \quad (7.7)$$

и потокосцепление равно произведению числа витков и сцепленного с витком магнитного потока:

$$\Psi = w\Phi. \quad (7.8)$$

## 7.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ

Замкнем прямолинейный провод длиной  $l$ , расположенный в однородном магнитном поле перпендикулярно вектору магнитной индукции  $B$ , внешним участком цепи с сопротивлением  $r$  (рис. 7.7). При движении провода с постоянной скоростью  $v$  перпендикулярно магнитным линиям в нем

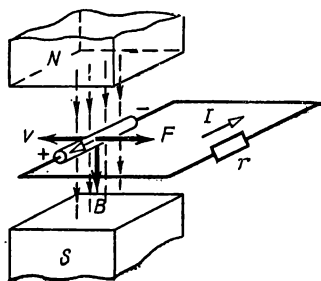


Рис. 7.7. Движение проводника в магнитном поле и возникновение тормозной силы

индуцируется неизменяющая ЭДС  $E_{\text{инд}}$  и в замкнутой цепи возникает постоянный ток  $I$ .

На провод с током в магнитном поле действует электромагнитная сила (5.8)

$$F = BIl.$$

Направление этой силы, найденное по правилу левой руки, противоположно направлению вектора скорости  $v$  (рис. 7.7); следовательно, она является тормозной. Для преодоления этой силы, т. е. для движения провода, необходима внешняя сила, равная тормозной силе и направленная противоположно. Иначе говоря, для движения провода необходим первичный двигатель, развивающий механическую мощность

$$P_{\text{м}} = Fv,$$

или

$$P_{\text{м}} = BIlv = E_{\text{инд}} I = P, \quad (7.9)$$

т. е. развиваемая двигателем мощность равна электрической мощности цепи. Следовательно, при движении в магнитном поле под действием внешних сил замкнутого на внешний участок цепи проводника, пересекающего магнитные линии, происходит преобразование механической энергии в электрическую.

Электрические машины, в которых происходит преобразование механической энергии в электрическую, называются электрическими (электромашинными) генераторами. Схема устройства электрического генератора была показана на рис. 6.12, более подробно подвижная часть приведена на рис. 7.8. К сказанному выше (§ 6.5) сле-

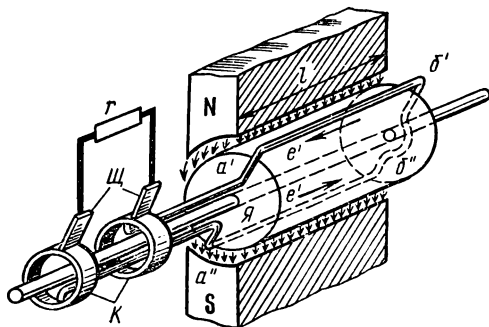


Рис. 7.8. Устройство простейшего генератора переменного тока

дует добавить, что на якоре  $Я$  машины в пазах укреплены провода обмотки (на рис. 7.8 и 7.9 показан один ее виток), в которых при вращении якоря наводится не постоянная, а переменная (изменяющаяся) ЭДС. В технике стремятся получить переменные ЭДС, токи и напряжения, изменяющиеся по простому периодическому — синусоидальному закону (см. § 8.1).

На рис. 7.8 показано, что концы (выводы) витка присоединены к медным изолированным кольцам  $K$ . Щетки  $Щ$ , наложенные на кольца  $K$ , служат для соединения с внешней частью цепи с сопротивлением  $r$ .

Индукция  $B$  магнитного поля, создаваемая токами в обмотках возбуждения  $ОВ$  (рис. 7.9,  $a$ ), нормальна к поверх-

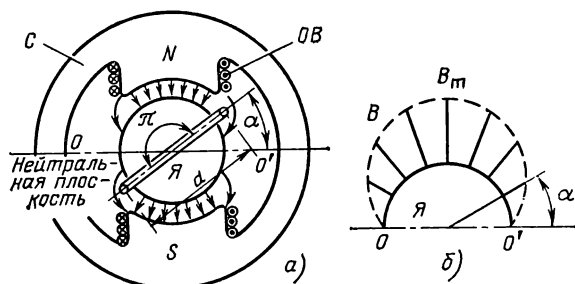


Рис. 7.9. Устройство генератора переменного тока ( $a$ ) и распределение магнитного поля в его воздушном зазоре ( $б$ )

ности якоря  $Я$  (см. § 6.4). Форма полюсов  $N$  и  $S$  выбирается такой, чтобы индукция изменялась вдоль окружности якоря по закону синуса от  $B=0$  на линии пересечения якоря с нейтральной плоскостью  $OO'$  до максимального значения  $B_m$  под серединой полюсов, как показано на диаграмме рис. 7.9, б. На этом рисунке индукция изображена отрезками радиусов между окружностью (поверхность якоря) и кривой  $B$  (штриховая линия). Если  $\alpha$  — угол, образованный нейтральной плоскостью  $OO'$  и плоскостью, проходящей через ось якоря и произвольную точку его поверхности, то индукция в произвольной точке

$$B = B_m \sin \alpha.$$

При равномерном вращении якоря в таком магнитном поле в проводниках  $a'b'$  и  $a''b''$  (рис. 7.8), соединенных последовательно, будут индуцироваться одинаковые ЭДС  $e'$

и, следовательно, суммарная ЭДС с учетом (7.2а)

$$e = 2e' = 2B_m lv \sin \alpha = E_m \sin \alpha, \quad (7.10)$$

где  $E_m = 2B_m lv$  — максимальное значение ЭДС в витке.

Наложив на якорь плоскую катушку из  $\omega$  витков, получим в  $\omega$  раз большую ЭДС, т. е.

$$E_m = 2B_m lv\omega. \quad (7.11)$$

За один оборот вращения якоря в магнитном поле, т. е. за время одного периода  $T$  и при изменении угла  $\alpha$  на  $2\pi$ , происходит полный цикл изменения ЭДС.

При равномерном вращении якоря его угловая скорость постоянна:

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f, \quad (7.12)$$

где  $f = 1/T$  — частота ЭДС.

Угол поворота якоря  $\alpha$  при постоянной угловой скорости  $\omega$  пропорционален времени:

$$\alpha = \omega t = \frac{2\pi}{T} t = 2\pi ft.$$

Электродвижущая сила по (7.10), наведенная в обмотке якоря,

$$e = E_m \sin \alpha = E_m \sin \omega t = E_m \sin 2\pi ft. \quad (7.13)$$

Генераторы переменного тока изготавливаются обычно на номинальные напряжения 3—15 кВ. У реальных генераторов ЭДС индуцируется в обмотке, расположенной в пазах на внутренней поверхности статора  $C$ , а ротор является электромагнитом, возбуждающим магнитный поток машины (см. рис. 6.13).

Такая конструкция обеспечивает большую надежность изоляции и более простой отвод тока во внешний участок цепи.

### 7.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ДВИГАТЕЛИ

На рис. 7.10 показан прямолинейный провод длиной  $l$ , расположенный в однородном магнитном поле перпендикулярно вектору магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и присоединенный к источнику питания с постоянной ЭДС  $E$  и внутренним сопротивлением  $r_{вт}$ ; по проводу проходит ток  $I$ .

Электромагнитная сила, действующая на провод с током (5.8),

$$F = BIl,$$

ее направление определяется по правилу левой руки.

Под действием силы  $F$  провод движется со скоростью  $v$ , поэтому в нем будет индуцироваться ЭДС, направленная навстречу току, в чем можно убедиться, применяя правило левой руки. Значение встречной ЭДС по (7.2)

$$E_{\text{инд}} = Blv.$$

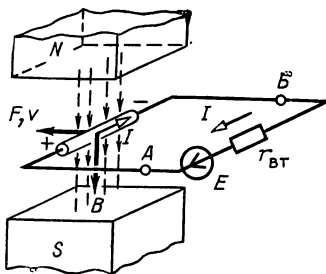


Рис. 7.10 Возникновение встречной ЭДС

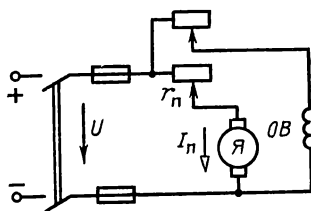


Рис. 7.11. Схема включения электродвигателя

Учитывая сопротивление прямолинейного провода  $r$  и применяя для замкнутого контура второй закон Кирхгофа, получаем

$$E - E_{\text{инд}} = r_{\text{вт}} I + r I.$$

Так как напряжение на выводах АВ источника

$$U_{AB} = E - r_{\text{вт}} I,$$

то из написанных уравнений получим

$$U_{AB} = r I + E_{\text{инд}}. \quad (7.14)$$

Умножив полученное уравнение на ток, определим электрическую мощность

$$U_{AB} I = r I^2 + E_{\text{инд}} I,$$

или

$$U_{AB} I = r I^2 + Blv I = r I^2 + Fv. \quad (7.15)$$

Произведение  $Fv$  представляет собой механическую мощность, а  $r I^2$  — мощность тепловых потерь в проводе. Следовательно, при движении провода с током в магнитном поле под действием сил этого поля происходит преобразование электрической энергии в механическую и тепловую.

Электрические машины, в которых происходит преобразование электрической энергии в механическую, называются



ся электродвигателями. Таким образом, рассмотренный случай движения проводника с током в магнитном поле под действием сил этого поля представляет собой пример элементарного электродвигателя.

В § 2.9 было отмечено, что каждый генератор постоянного тока переходит в режим работы электродвигателя, если его ЭДС окажется меньше напряжения на выводах. Этот принцип обратимости электрических машин был открыт в 1833 г. русским академиком Э. Х. Ленцем. Таким образом, каждый электрический генератор может работать как электродвигатель и наоборот.

На рис. 7.11 дана одна из возможных схем включения электродвигателя в сеть питания. Этот электродвигатель имеет две параллельные ветви. В одну ветвь включены якорь  $Я$  и пусковой реостат  $r_n$ , в другую — обмотка возбуждения  $ОВ$  и реостат для регулирования тока в  $ОВ$  и тем самым магнитного потока.

В момент пуска электродвигателя, когда якорь еще неподвижен, при отсутствии пускового реостата ток в якоре был бы

$$I_n = U/r_{я}.$$

Так как сопротивление якоря  $r_{я}$  мало, то пусковой ток  $I_n$  велик — в десятки раз больше номинального (допустимого). Включив последовательно с якорем пусковой реостат, ограничивают пусковой ток до допустимых значений:

$$I_n = U/(r_{я} + r_n). \quad (7.16)$$

При вращении якоря в нем индуцируется встречная ЭДС, которая увеличивается по мере нарастания частоты вращения. Эта ЭДС компенсирует часть напряжения  $U$  и уменьшает пусковой ток, так что

$$I_n = (U - E_{инд})/(r_{я} + r_n).$$

По мере увеличения частоты вращения сопротивление  $r_n$  реостата постепенно уменьшают до нуля.

**Пример 7.1.** Электродвигатель включен в сеть с напряжением  $U = 220$  В. При нормальной частоте вращения якоря двигателя встречная ЭДС  $E_{инд} = 210$  В. Сопротивление обмотки якоря  $r_{я} = 0,5$  Ом. Определить номинальный ток двигателя, сопротивление пускового реостата, при котором пусковой ток не превышает удвоенного номинального тока, пусковой ток двигателя при включении его без реостата.

**Решение.** Номинальный ток

$$I = \frac{U - E_{инд}}{r_{я}} = \frac{220 - 210}{0,5} = 20 \text{ А.}$$

Соппротивление пускового реостата по (7.16)

$$r_{\Pi} = \frac{U}{I_{\Pi}} - r_{\text{я}} = \frac{U}{2I_{\text{H}}} - r_{\text{я}} = \frac{220}{2 \cdot 20} - 0,5 = 5 \text{ Ом.}$$

Пусковой ток при включении двигателя без пускового реостата

$$I_{\Pi} = U/r_{\text{я}} = 220/0,5 = 440 \text{ А.}$$

#### 7.4. ВИХРЕВЫЕ ТОКИ

Как было показано выше (§ 7.1), в замкнутом контуре, который пронизывается изменяющимся магнитным потоком, возникает ЭДС электромагнитной индукции. Если контур выполнен из проводника, то под действием ЭДС в нем протекает ток. Токи возникают и в телах из проводящих материалов (сталь, медь, алюминий и др.), расположенных в изменяющемся магнитном поле. Эти токи замыкаются в контурах, плоскости которых перпендикулярны направлению изменяющегося магнитного потока, и называются вихревыми токами. Например, при прохождении переменного тока  $I$  по катушке со сплошным стальным магнитопроводом (рис. 7.12, а) в нем будут наводиться вих-

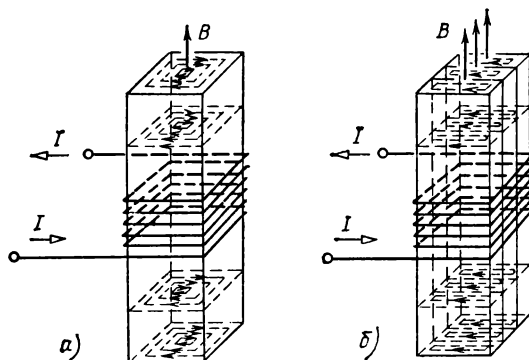


Рис. 7.12. Вихревые токи в стальном магнитопроводе

ревые токи (показаны штриховой линией). Они создают свое магнитное поле, оказывающее размагничивающее действие на магнитное поле катушки. Кроме того, вихревые токи, нагревая магнитопровод (сталь), вызывают непроизводительный расход энергии и снижают КПД электромагнитных механизмов. Эти потери энергии называются потерями от вихревых токов.

Для уменьшения вихревых токов применяются: 1) магнитопроводы из электротехнической стали с примесью кремния, обладающие увеличенным удельным электрическим сопротивлением; 2) магнитопроводы, выполненные из отдельных, изолированных друг от друга листов стали (рис. 7.12, б) толщиной 0,35—0,5 мм, вследствие чего увеличивается сопротивление магнитопровода для вихревых токов и уменьшаются вихревые токи.

Вихревые токи возникают и в якоре электрической машины при вращении его в магнитном поле. Уменьшение их достигается теми же способами. На рис. 7.13, а, б пунктир-

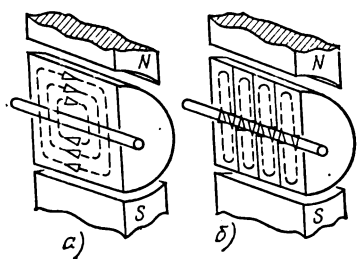


Рис. 7.13. Вихревые токи в якоре электрической машины

ными линиями показаны вихревые токи в якоре из сплошной и из листовой стали.

В трансформаторах, электрических машинах и других аппаратах и механизмах вихревые токи отрицательно влияют на работу и их необходимо подавлять. В других устройствах, наоборот, они могут быть использованы для приведения в действие механизмов и приборов или для получения необходимого режима работы.

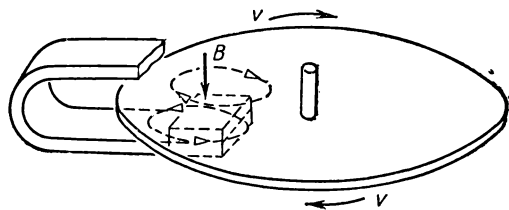


Рис. 7.14. Вихревые токи в диске при движении его в поле постоянного магнита

На рис. 7.14 показан диск счетчика электроэнергии. При вращении диска в магнитном поле постоянного магнита в нем возникают вихревые токи. Электромагнитная сила взаимодействия этих токов с магнитным полем создает тор-

мозной момент, необходимый для нормальной работы прибора.

Вихревые токи широко применяются для индукционной плавки металлов и для индукционного нагрева при поверхностной закалке стальных деталей, в частности шестерен и коленчатых валов.

## 7.5. ИНДУКТИВНОСТЬ. КАТУШКА ИНДУКТИВНОСТИ

Вокруг замкнутого контура с током всегда существует магнитный поток, пронизывающий контур. Этот магнитный поток называют магнитным потоком самоиндукции. При постоянной магнитной проницаемости среды магнитный поток самоиндукции пропорционален току. Алгебраическая сумма потоков самоиндукции всех витков катушки называется потокосцеплением самоиндукции.

Коэффициент пропорциональности между потокосцеплением самоиндукции и током  $I$  катушки или контура называется индуктивностью (катушки или контура):

$$L = \Psi/I. \quad (7.17)$$

Индуктивность характеризует связь потокосцепления самоиндукции с током данной цепи. Ее необходимо знать, чтобы при заданном токе в цепи найти магнитный поток или потокосцепление самоиндукции.

Единица измерения индуктивности

$$[L] = [\Psi/I] = \text{В} \cdot \text{с}/\text{А} = \text{Ом} \cdot \text{с}.$$

Как указывалось, единица  $\text{Ом} \cdot \text{с}$  называется генри (Гн). Так как генри — крупная единица, то часто применяются дольные единицы — миллигенри (мГн) и микрогенри (мкГн).

Условное обозначение на схемах катушки с индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $r$  показано на рис. 7.15.

Определим индуктивность кольцевой катушки (см. рис. 5.21) при среднем радиусе магнитопровода катушки  $r_{\text{ср}} = (r_1 + r_2)/2$ , значительно большем радиуса витков катушки. В этом случае среднее значение магнитной индукции в поперечном сечении магнитопровода можно считать равным значению магнитной индукции на осевой линии катушки (§ 5.8). Таким образом, магнитный поток катушки с достаточной точностью можно определить по формуле

$$\Phi = BS = \mu_r \mu_0 \frac{Iw}{l} S = 125\mu_r \frac{Iw}{l} S \cdot 10^{-8},$$

где  $\Phi$  — магнитный поток, Вб;  $I$  — ток, А;  $l$  — длина, м;  $S$  — сечение, м<sup>2</sup>.

Магнитный поток  $\Phi$  пронизывает все витки катушки, поэтому потокосцепление самоиндукции, Вб,

$$\Psi = \Phi w = 125\mu, \frac{l w^2}{l} S \cdot 10^{-8},$$

откуда индуктивность катушки, Гн,

$$L = \frac{\Psi}{I} = 125\mu, \frac{w^2 S}{l} 10^{-8}. \quad (7.18)$$

Цилиндрическую катушку можно рассматривать как кольцевую с достаточно большим радиусом магнитопро-



Рис. 7.15. Обозначение на схемах катушки с индуктивностью и сопротивлением

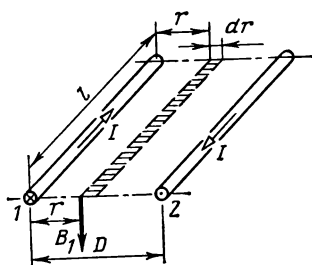


Рис. 7.16. Двухпроводная линия

вода, у которой обмотка расположена только на части магнитопровода длиной  $l$ ; поэтому приближенное значение ее индуктивности можно определять по (7.18), если длина  $l$  много больше радиуса витков.

Рассчитаем еще индуктивность двухпроводной воздушной линии (рис. 7.16), радиус проводов которой  $r_0$  и расстояние между проводами  $D$ .

Согласно (5.3) магнитная индукция поля тока  $I$  первого провода на расстоянии  $r > r_0$  от его оси

$$B_1 = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}.$$

Магнитный поток, проходящий через элементарную площадку  $dS = l dr$  (рис. 7.16), созданный током  $I$  первого провода,

$$d\Phi_1 = B_1 dS = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} l dr.$$

Полный магнитный поток, созданный между проводами током первого провода,

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_{r=r_0}^{r=D-r_0} d\Phi_1 = \mu_0 \frac{Il}{2\pi} \int_{r_0}^{D-r_0} \frac{dr}{r} = \\ &= \mu_0 \frac{Il}{2\pi} \ln \frac{D-r_0}{r_0} \approx \mu_0 \frac{Il}{2\pi} \ln \frac{D}{r_0};\end{aligned}\quad (7.19)$$

так как расстояние между проводами всегда значительно больше радиуса ( $D \gg r_0$ ), то разность  $D-r_0$  мало отличается от  $D$ .

Вследствие того что токи в проводах равны и направлены противоположно друг другу, они создают одинаковые магнитные потоки между проводами. Поэтому результирующий магнитный поток между проводами

$$\Phi = 2\Phi_1 = 2\mu_0 \frac{Il}{2\pi} \ln \frac{D}{r_0} = \frac{\mu_0}{\pi} Il \ln \frac{D}{r_0}.$$

Индуктивность двухпроводной воздушной линии (в генри):

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} l \ln \frac{D}{r_0} = 4 \cdot 10^{-7} l \ln \frac{D}{r_0}, \quad (7.20)$$

где  $l$  — длина линии, м.

## 7.6. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА САМОИНДУКЦИИ

Всякое изменение тока в электрической цепи неизбежно вызывает изменение магнитного потока и потокоцепления самоиндукции цепи, а изменение потокоцепления влечет за собой согласно (7.5) возникновение ЭДС, которая в этом случае называется ЭДС самоиндукции. Явление возникновения ЭДС в контуре, вызванное изменением тока  $i$  в этом же контуре, называют самоиндукцией.

Электродвижущая сила самоиндукции, как и всякая наведенная ЭДС, определяется по (7.6) с учетом (7.17):

$$e_L = -d\Psi/dt = -d(Li)/dt = -Ldi/dt, \quad (7.21)$$

где предполагается, что индуктивность  $L$  не зависит от тока  $i$ , например у катушки без ферромагнитного магнитопровода или у катушки с магнитопроводом, магнитную проницаемость которого можно считать не зависящей от тока.

Следовательно, ЭДС самоиндукции пропорциональна индуктивности и скорости изменения тока в цепи.

Направление ЭДС самоиндукции определяется по правилу Ленца. При увеличении тока, т. е. при  $di/dt > 0$ , ЭДС самоиндукции отрицательна и, следовательно, направлена встречно по отношению к току; наоборот, при уменьшении тока, т. е. при  $di/dt < 0$ , ЭДС самоиндукции положительна и, следовательно, направлена одинаково с током. Таким образом, и в том и в другом случае ЭДС самоиндукции стремится противодействовать изменению режима цепи.

Вследствие явления самоиндукции зависимость между током и напряжением в цепи с изменяющимся током нельзя просто определить по закону Ома  $i = u/r$ .

Если цепь обладает только сопротивлением  $r$  (индуктивность ничтожно мала), то в момент подключения цепи к источнику с постоянным напряжением  $U$  (внутреннее сопротивление источника равно нулю и ЭДС равна напряжению) ток в цепи скачком увеличивается от 0 до значения  $I = U/r$  и далее не изменяется. Для цепи с сопротивлением  $r$  и индуктивностью  $L$  (как у катушки индуктивности) появление тока  $i$  в цепи (рис. 7.17) сопровождается возник-

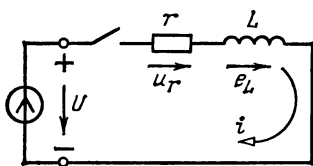


Рис. 7.17. Включение катушки индуктивности к источнику постоянного напряжения

новением ЭДС самоиндукции  $e_L$ , положительное направление которой показано на рисунке, и, следовательно, по второму закону Кирхгофа можно записать

$$U + e_L = u_r. \quad (7.22)$$

Так как  $e_L = -L di/dt$  и  $u_r = ri$ , то

$$U - L di/dt = ri, \quad (7.23a)$$

или

$$U = ri + L di/dt. \quad (7.23b)$$

При наличии индуктивности в цепи (рис. 7.17) ток в момент подключения, с которого начинают отсчет времени, скачком не изменяется, а начинает увеличиваться с нулевого значения, т. е.  $i_0 = 0$ . В противном случае ЭДС индукции в момент  $t = 0$  получилась бы согласно (7.21) бесконечно большой, что нарушает закон Кирхгофа (7.22). В момент

$t=0$ , как следует из (7.22),  $U+e_L=0$ , т. е. ЭДС  $e_L$  должна иметь не бесконечно большое, но все же наибольшее значение, равное напряжению источника питания  $U$ , и уравновешивать последнее, так как ЭДС в действительности направлена навстречу (ток начинает нарастать и  $di/dt > 0$ ). Очевидно, и скорость нарастания тока в момент  $t=0$  будет наибольшей, так как при  $i=i_0=0$  имеем  $di/dt=U/L$ , а при  $i \neq 0$  производная  $di/dt < U/L$ , как следует из (7.23б). Таким образом, скорость нарастания тока, наибольшая в первый момент включения, постепенно уменьшается; вместе с тем уменьшается и ЭДС самоиндукции  $e_L$ . Когда ток достигнет конечного значения  $I=U/r$  (теоретически только через бесконечно большой интервал времени), нарастание тока прекратится и ЭДС самсиндукции индуцироваться не будет.

## 7.7. НЕЛИНЕЙНАЯ КАТУШКА ИНДУКТИВНОСТИ

Выше (7.17) дано определение индуктивности катушки или контура как отношение потокоцепления самоиндукции к току, т. е.

$$L = \Psi/I.$$

Далее из выражения ЭДС самоиндукции (7.21)  $e_L = -d\Psi/dt = -L di/dt$  следует определение индуктивности как отношение элементарного приращения потокоцепления к элементарному приращению тока, т. е.

$$L = d\Psi/di. \quad (7.24)$$

При неизменной магнитной проницаемости материала магнитопровода потокоцепление  $\Psi$  пропорционально току, индуктивность постоянна и не зависит от тока; ее значение одинаково при определении по любой из написанных формул. Это наглядно иллюстрирует график (рис. 7.18) линейной зависимости потокоцепления от тока этой цепи, так как для произвольной точки  $A$

$$L = \Psi_A/I_A = d\Psi/di = \Delta\Psi_A/\Delta I_A = m_L \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $m_L = m_\Psi/m_I$  и  $m_\Psi$ ,  $m_I$  — масштабы потокоцепления и тока. Зависимость  $\Psi(I)$  или  $\Psi(i)$  называется вебер-амперной характеристикой.

Если магнитная проницаемость материала (среды) непостоянна, например, у стального магнитопровода катушки, то вебер-амперная характеристика (рис. 7.19) аналогична кривой намагничивания (рис. 6.2), которая нелинейна.



В этом случае индуктивности, найденные по (7.17) и (7.24), будут различны.

Первая из них называется статической индуктивностью и определяется для произвольной точки  $A$  (рис. 7.19) отношением

$$L_{\text{ст}} = \Psi_A / I_A = m_L \operatorname{tg} \alpha, \quad (7.25)$$

где  $\alpha$  — угол наклона секущей, проведенной через точку  $A$  и начало координат. Она, как уже отмечалось, применяется для определения потокосцепления по заданному постоянному току.

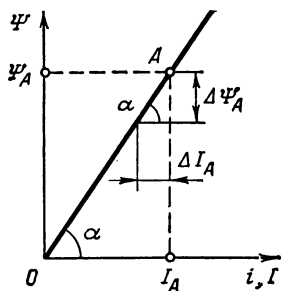


Рис. 7.18. Вебер-амперная характеристика катушки без стального магнитопровода

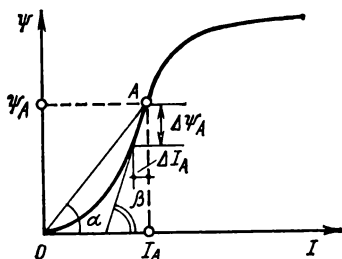


Рис. 7.19. Вебер-амперная характеристика катушки со стальным магнитопроводом

Вторая из них называется дифференциальной индуктивностью и для той же точки  $A$  (рис. 7.19) определяется отношением

$$L_{\text{диф}} = d\Psi/di \approx \Delta\Psi/\Delta I = m_L \operatorname{tg} \beta, \quad (7.26)$$

где  $\beta$  — угол наклона касательной, проведенной через точку  $A$  вебер-амперной характеристики.

Она применяется для определения ЭДС самоиндукции по заданной скорости изменения тока.

## 7.8. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

При включении катушки индуктивности (рис. 7.17) на постоянное напряжение  $U$  ток в цепи увеличивается от нуля до установившегося значения  $I = U/r$ . Увеличение тока в цепи сопровождается нарастанием в окружающей среде магнитного поля, в котором запасается определенное количество энергии, полученной от источника питания. Эта энер-

гия проявляет себя, например, при коротком замыкании катушки, обеспечивая прохождение тока до тех пор, пока не будет полностью преобразована в тепло (в сопротивлении цепи).

Для рассматриваемой цепи (рис. 7.17) согласно (7.23), т. е. по второму закону Кирхгофа,

$$U = ri + L di/dt.$$

Умножив обе части этого уравнения на произведение  $idt$ , получим

$$Ui dt = ri^2 dt + Li di,$$

или

$$Ui dt = ri^2 dt + id\Psi,$$

так как по (7.24) произведение  $Ldi$  равно элементарному приращению  $d\Psi$  потокосцепления.

Левая часть последнего уравнения  $Uidt$  представляет собой энергию, полученную цепью от источника питания за время  $dt$ . Первое слагаемое правой части  $ri^2 dt$  представляет собой энергию, преобразованную за время  $dt$  в тепло в сопротивлении  $r$  (нагревание). Второе слагаемое правой части уравнения  $id\Psi = Lidi$  представляет собой приращение энергии магнитного поля, вызванное увеличением тока на  $di$  и связанного с ним приращения потокосцепления  $d\Psi$ .

Суммируя приращения энергии при увеличении тока от нуля до значения  $I$ , получим энергию, запасенную в магнитном поле цепи:

$$W = \int_0^I Li di = LI^2/2 = \Psi I/2. \quad (7.27)$$

Если магнитное поле возбуждается током  $I$ , проходящим по кольцевой катушке (рис. 5.21), причем магнитная индукция  $B$  имеет одинаковое значение в любой точке магнитопровода катушки, то ее потокосцепление

$$\Psi = \Phi w = BS w.$$

Так как напряженность поля катушки  $H = Iw/l$ , то ток в катушке

$$I = Hl/w.$$

Подставив в (7.27) написанные выражения для потокосцепления и тока, получим выражение энергии магнит-

ного поля кольцевой катушки:

$$W = \frac{\Psi I}{2} = \frac{BS \omega H I}{2\omega} = \frac{BH}{2} Sl.$$

Учитывая, что произведение  $Sl$  равно объему магнитопровода, находим

$$W = \frac{BH}{2} V = \frac{B^2}{2\mu_r \mu_0} V. \quad (7.28a)$$

Магнитная энергия, отнесенная к единице объема, или, что то же, плотность энергии магнитного поля

$$W_0 = \frac{W}{V} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_r \mu_0}. \quad (7.28b)$$

Эта формула применима как для однородного, так и для неоднородного магнитного поля.

**Пример 7.2.** Кольцевая катушка с магнитопроводом из неферромагнитного материала имеет  $\omega=1600$  витков, длина средней магнитной линии  $l=200$  см, сечение магнитопровода  $S=20$  см<sup>2</sup>. Определить энергию магнитного поля катушки, если по ее обмотке проходит ток  $I=50$  А.

**Решение.** Напряженность поля

$$H = I\omega/l = 50 \cdot 1600/200 = 400 \text{ А/см} = 4 \cdot 10^4 \text{ А/м}.$$

Магнитная индукция поля

$$B = \mu_0 H = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^4 \approx 0,05 \text{ Тл}.$$

Объем магнитопровода

$$V = Sl = 20 \cdot 200 = 4000 \text{ см}^3 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Энергия магнитного поля

$$W = \frac{HB}{2} V = \frac{4 \cdot 10^4 \cdot 0,05}{2} 4 \cdot 10^{-3} = 4 \text{ Дж}.$$

## 7.9. ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ

Два контура или катушки называются индуктивно или магнитно связанными, если часть магнитного потока, созданного током первого контура, пронизывает второй контур, а часть магнитного потока, вызванного током второго контура, пронизывает первый контур.

При прохождении тока  $i_1$  по виткам первой катушки возбуждается магнитный поток самоиндукции  $\Phi_{L1} = \Phi_{11}$ , пронизывающий витки этой катушки. Часть потока  $\Phi_{11}$ , пронизывающая вторую катушку (рис. 7.20, а) и называемая потоком взаимной индукции  $\Phi_{M1} = \Phi_{12}$ , образу-

ет с витками второй катушки потокосцепление

$$\Psi_{12} = w_2 \Phi_{12}, \quad (7.29)$$

пропорциональное току  $i_1$  в первой катушке.

Аналогично при прохождении тока  $i_2$  по виткам второй катушки возникает магнитный поток самоиндукции  $\Phi_{L2} = \Phi_{22}$ , пронизывающий витки этой катушки. Часть потока  $\Phi_{22}$ , пронизывающая первую катушку (рис. 7.20, б), или

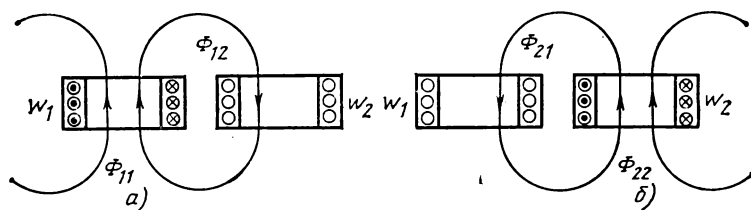


Рис. 7.20. Магнитная связь двух катушек

поток взаимной индукции  $\Phi_{M2} = \Phi_{21}$  образует с витками первой катушки потокосцепление

$$\Psi_{21} = w_1 \Phi_{21}, \quad (7.30)$$

пропорциональное току  $i_2$ .

Отношение потокосцепления второго контура (катушки)  $\Psi_{12}$  к току  $i_1$  первого контура (катушки), возбуждающего это потокосцепление, называется взаимной индуктивностью контуров (катушек):

$$M_{12} = \Psi_{12}/i_1 = w_2 \Phi_{12}/i_1. \quad (7.31)$$

Аналогично

$$M_{21} = \Psi_{21}/i_2 = w_1 \Phi_{21}/i_2. \quad (7.32)$$

Для двух контуров (катушек) в линейной цепи всегда имеет место равенство (*принцип взаимности*)

$$M_{12} = M_{21} = M, \quad (7.33)$$

т. е. при одинаковых токах  $i_1 = i_2$  получаются равные потокосцепления  $\Psi_{12} = \Psi_{21}$ . Поэтому необходимость в индексах отпадает.

Взаимная индуктивность, так же как и индуктивность, измеряется в генри (Гн); она зависит от числа витков контуров (катушек), от их размеров, конфигурации, взаимного расположения и от магнитной проницаемости среды.

Из (7.31) и (7.32) следует, что

$$\Psi_{12} = M i_1 \text{ и } \Psi_{21} = M i_2. \quad (7.34)$$

При изменении тока  $i_1$  изменяются:

1) потокосцепление первого контура

$$\Psi_{11} = w_1 \Phi_{11} = L_1 i_1,$$

в котором индуцируется ЭДС самоиндукции

$$e_{L1} = -d\Psi_{11}/dt = -L_1 di_1/dt; \quad (7.35)$$

2) потокосцепление второго контура  $\Psi_{12}$  (7.34), и в нём индуцируется ЭДС

$$e_{M2} = -d\Psi_{12}/dt = -M di_1/dt, \quad (7.36)$$

которая называется ЭДС взаимной индукции.

При изменении тока  $i_2$  во втором контуре изменяются:

1) потокосцепление второго контура

$$\Psi_{22} = w_2 \Phi_{22} = L_2 i_2,$$

в котором индуцируется ЭДС самоиндукции

$$e_{L2} = -d\Psi_{22}/dt = -L_2 di_2/dt; \quad (7.37)$$

2) потокосцепление первого контура  $\Psi_{21}$  (7.34), и в нём индуцируется ЭДС взаимной индукции

$$e_{M1} = -d\Psi_{21}/dt = -M di_2/dt. \quad (7.38)$$

Если первый контур с индуктивностью  $L_1$  и сопротивлением  $r_1$  подключен к источнику с напряжением  $U_1$ , а второй ( $L_2, r_2$ ) — к источнику  $U_2$ , то согласно второму закону Кирхгофа

$$U_1 + e_{L1} \pm e_{M1} = r_1 i_1,$$

где знак плюс соответствует такому расположению контуров катушек и направлению токов  $i_1$  и  $i_2$ , при котором ЭДС самоиндукции  $e_{L1}$  и взаимной индукции  $e_{M1}$  суммируются — согласное включение, а знак минус — такому расположению контуров и направлению токов, при котором ЭДС вычитаются — встречное включение. Из написанного следует, что напряжение на выводах первого контура

$$U_1 = r_1 i_1 + L_1 di_1/dt \pm M di_2/dt \quad (7.39a)$$

и аналогично напряжение на выводах второго контура

$$U_2 = r_2 i_2 + L_2 di_2/dt \pm M di_1/dt. \quad (7.39b)$$

Энергия, запасенная в магнитном поле двух контуров (катушек) с токами  $i_1$  и  $i_2$ , определяется как сумма двух слагаемых вида (7.27):

$$W = \Psi_1 i_1/2 + \Psi_2 i_2/2.$$

Приняв во внимание, что полное потокосцепление первого контура

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{21} = L_1 i_1 \pm M i_2, \quad (7.40a)$$

а второго контура

$$\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{12} = L_2 i_2 \pm M i_1, \quad (7.40b)$$

получим окончательное выражение энергии, запасаемой в магнитном поле двух контуров:

$$W = (L_1 i_1 \pm M i_2) i_1/2 + (L_2 i_2 \pm M i_1) i_2/2 = L_1 i_1^2/2 + L_2 i_2^2/2 \pm M i_1 i_2. \quad (7.41)$$

В формулах полных потокосцеплений первого и второго контуров (7.40) знак плюс ставится при одинаковом (согласном) направлении магнитных потоков  $\Phi_{11}$  и  $\Phi_{21}$ , пронизывающих первый контур, а также  $\Phi_{22}$  и  $\Phi_{12}$ , пронизывающих второй контур, т. е. в случае их суммирования. Если потоки  $\Phi_{11}$  и  $\Phi_{21}$ , а также  $\Phi_{22}$  и  $\Phi_{12}$  направлены встречно, т. е. в случае их вычитания, в формулах необходимо ставить знак минус.

В (7.41) третье слагаемое может быть положительным или отрицательным в зависимости от направлений потоков  $\Phi_{11}$  и  $\Phi_{21}$ , а также  $\Phi_{22}$  и  $\Phi_{12}$ . Таким образом, общая энергия системы может быть больше или меньше суммы энергии магнитных полей отдельных контуров.

Отношение потока  $\Phi_{12}$ , пронизывающего второй контур, ко всему потоку  $\Phi_{11}$ , созданному током первого контура:

$$\frac{\Phi_{12}}{\Phi_{11}} = \frac{\Psi_{12} w_2}{\Psi_{11} w_1} = \frac{\Psi_{12} w_1}{\Psi_{11} w_2} = \frac{M i_1 w_1}{L_1 i_1 w_2} = \frac{M w_1}{L_1 w_2}.$$

Аналогично отношение

$$\Phi_{21}/\Phi_{22} = M w_2/L_2 w_1.$$

Каждое из написанных отношений показывает, какая часть потока, созданного током одного контура, сцепляется с другим контуром. Среднее геометрическое этих отношений

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{12} \Phi_{21}}{\Phi_{11} \Phi_{22}}} = \sqrt{\frac{M^2 w_1 w_2}{L_1 L_2 w_2 w_1}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (7.42)$$

представляет собой коэффициент индуктивной связи контуров (катушек). Так как  $\Phi_{11} > \Phi_{12}$  и  $\Phi_{22} > \Phi_{21}$ , то  $k < 1$ . В некоторых случаях коэффициент связи приближается к единице, например у трансформаторов с замкнутым стальным магнитопроводом.

Устройство, дающее возможность изменять магнитную связь двух катушек (контуров), называется вариометром. Вариометр обычно представляет собой две катушки (рис. 7.21), одна из которых может поворачиваться.

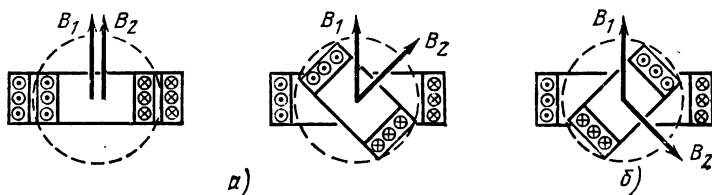


Рис. 7.21. Соединение катушек:  
а — согласное; б — встречное

При последовательном соединении катушек зависимость между изменяющимся током и напряжением на каждой катушке или общим напряжением (питания) будет неодинаковой при различных взаимных расположениях катушек или способах их соединения. Соединение катушек называется согласным, если потоки  $\Phi_{11}$  и  $\Phi_{21}$  и соответственно  $\Phi_{22}$  и  $\Phi_{12}$  суммируются, т. е. угол между векторами магнитной индукции  $B_1$  поля, созданного током в первой катушке, и  $B_2$  поля, созданного током во второй катушке (рис. 7.21, а), не превышает  $90^\circ$ .

При последовательном согласном соединении катушек напряжение питания (на выводах цепи)

$$U = (r_1 + r_2)i + L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + 2M \frac{di}{dt} = (r_1 + r_2)i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} = ri + L \frac{di}{dt},$$

где  $L_1$  и  $r_1$  — индуктивность и сопротивление первой катушки;  $L_2$  и  $r_2$  — индуктивность и сопротивление второй катушки;  $M$  — взаимная индуктивность катушек;  $r = r_1 + r_2$  — общее сопротивление цепи (двух последовательно соединенных катушек) и индуктивность цепи или вариометра

$$L = L_1 + L_2 + 2M. \quad (7.43)$$

Соединение катушек называется встречным, если магнитные потоки катушек  $\Phi_{11}$  и  $\Phi_{21}$ , а также  $\Phi_{22}$  и  $\Phi_{12}$  вычитаются, т.е. угол между векторами магнитной индукции  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  двух катушек (рис. 7.21, б) больше  $90^\circ$ .

При встречном соединении катушек напряжение на выводах цепи

$$U = (r_1 + r_2) i + L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - 2M \frac{di}{dt} = ri + L \frac{di}{dt},$$

где  $r = r_1 + r_2$  и

$$L = L_1 + L_2 - 2M. \quad (7.44)$$

Если выполнить обмотку катушки двумя рядом расположенными изолированными жилами (или двумя изолированными проводниками, расположенными параллельно), то потокоцепления  $\Psi_{11} = \Psi_{22} = \Psi_{12} = \Psi_{21}$ .

Соединив концы (или начала) двух жил (проводов), получим встречное соединение обмоток, при котором  $L_1 = L_2 = M$ . При этом общая (совместная) индуктивность согласно (7.44) будет равна нулю:

$$L = L_1 + L_2 - 2M = 0.$$

Такие безындуктивные катушки, намотанные двойным проводом, называются бифилярными.

В ряде случаев явление взаимной индукции бывает полезным, например для передачи энергии из одной электрической цепи в другую (§ 10.10 и 15.9). Иногда оно крайне нежелательно, например, если параллельно воздушной линии электропередачи расположена линия связи, то в последней может индуцироваться ЭДС взаимной индукции, создающая помехи в работе линии связи.

## 7.10. ЭЛЕКТРОМАГНИТЫ

Расположенный вблизи катушки с током стальной сердечник (рис. 7.22) намагничивается и втягивается в катушку под действием силы, которая растет с увеличением тока. Стальной сердечник, подобно контуру с током, расположенному в магнитном поле (§ 5.9), под действием электромагнитных сил стремится занять положение, при котором проходящий через него магнитный поток будет максимальным. Работа, производимая при перемещении сердечника, и увеличение энергии магнитного поля происходят за счет энергии источника питания катушки.

На рис. 7.23 показана схема устройства измерительного механизма электромагнитной системы. Стальной листок-сердечник 1, эксцентрично укрепленный на оси 2, удержи-



вается пружиной 3 в начальном положении. При прохождении измеряемого тока по виткам неподвижной катушки 4 сердечник намагничивается и втягивается внутрь катушки, преодолевая противодействующий момент пружины 3. Каждому значению тока соответствует определенный угол поворота сердечника и указательной стрелки 5, укрепленной

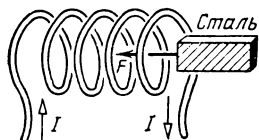


Рис. 7.22. Взаимодействие катушки с током и стального сердечника

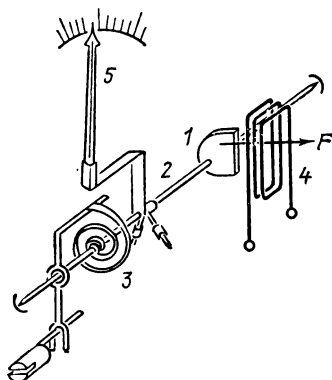
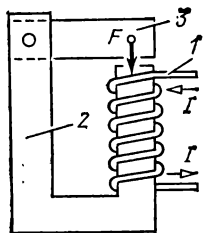


Рис. 7.23. Измерительный механизм электромагнитной системы

Рис. 7.24. Электромагнит

на одной оси с сердечником. Под концом стрелки укреплена шкала отсчета измеряемого тока (или напряжения).

У электромагнитных механизмов (рис. 7.24) обмотка 1 часто накладывается на неподвижный стальной сердечник 2, к которому притягивается стальной якорь 3. Такое и подобные ему устройства называются электромагнитами и находят широкое и разнообразное применение в реле, автоматах, тормозных устройствах, подъемных кранах для погрузки лома черных металлов и т. д.

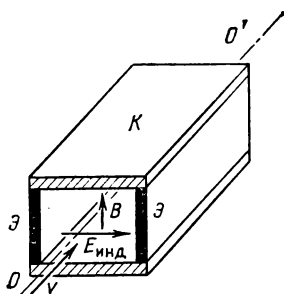
Сила, необходимая для отрыва якоря от сердечника, называется отрывной силой.

## 7.11. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ГЕНЕРАТОР

Принцип работы магнитогидродинамического генератора (МГД-генератора) заключается в следующем.

Подогретый и обогащенный кислородом воздух поступает в камеру сгорания, в которой происходит сгорание газообразного топлива при температуре около  $2500^{\circ}\text{C}$ . Образующаяся при такой высокой температуре газовая плазма обладает высокой проводимостью. Из камеры сгорания

Рис. 7.25. Принципиальное устройство МГД-генератора



плазма поступает со скоростью  $v$  в магнитогидродинамический канал  $K$  (рис. 7.25). Это канал прямоугольного сечения образуется двумя парами стенок. Одна пара стенок  $\mathcal{E}$  — металлическая является электродами МГД-генератора, другая пара стенок выполнена из изоляционного материала. Электромагниты возбуждения создают в указанном канале магнитное поле с индукцией  $B$ , направленное перпендикулярно оси канала  $OO'$ .

При движении плазмы в магнитном поле в направлении оси канала (рис. 7.25) в ней возникает электрическое поле, направленное перпендикулярно направлению движения плазмы и направлению магнитного поля. Таким образом, между электродами  $\mathcal{E}\mathcal{E}$  возникает ЭДС генератора, определяемая индуктированным электрическим полем  $E_{\text{инд}}$ .

При подключении к электродам генератора приемников они получают электрическую энергию от МГД-генератора. При работе генератора под нагрузкой возникают силы, направленные против движения плазмы, так что увеличение нагрузки вызывает уменьшение скорости движения плазмы. Следовательно, подведенная к генератору тепловая энергия сначала превращается в энергию движения плазмы, а затем преобразуется в электрическую.

Коэффициент полезного действия установки с МГД-генераторами может быть доведен до 50—55 %, что значительно выше, чем у обычных тепловых электроустановок.

## Глава восьмая

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

#### 8.1. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

Основная роль в развитии прикладной электротехники принадлежит переменному току. В настоящее время почти вся электрическая энергия вырабатывается в виде энергии переменного тока. Постоянный ток, необходимый в некоторых областях промышленности (электрохимия), транспорта, связи и т. д., получается выпрямлением переменного тока.

Основное преимущество переменного тока заключается в возможности просто и с малыми потерями энергии трансформировать (преобразовывать) напряжение, получая высокое напряжение для передачи электрической энергии на большие расстояния и низкое напряжение для передачи электроэнергии на близкие расстояния и для питания приемников энергии. Кроме того, однофазные и трехфазные генераторы и двигатели имеют более простое устройство, надежней в работе и проще в эксплуатации по сравнению с машинами постоянного тока.

Переменным током обычно называют ток, значения которого и изменение направления повторяются в одной и той же последовательности через равные промежутки времени, называемые периодом  $T$ . Следовательно, если в произвольный момент времени ток равен  $i(t)$ , то через интервал, равный одному или любому целому числу периодов, ток имеет такое же значение и направление, так что условие периодичности можно записать следующим образом:

$$i(t) = i(t + T) = i(t + 2T) = \dots = i(t + kT),$$

где  $k$  — целое число.

На рис. 8.1 показан график тока, изменяющегося периодически по закону синуса. На рисунке по оси абсцисс отложено время, а по оси ординат ток  $i = i(t)$ , период тока  $T = 0,02$  с.

Значение переменного тока, а также напряжения, ЭДС и других изменяющихся величин в любой момент времени  $t$  называется мгновенным значением. Мгновенные значения тока, напряжения, ЭДС, заряда обозначаются

строчными буквами  $i=i(t)$ ;  $u=u(t)$ ;  $e=e(t)$ ;  $q=q(t)$ , наибольшие из мгновенных значений периодически изменя-

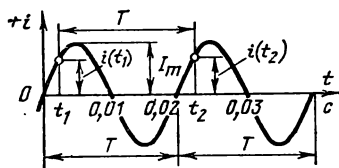


Рис. 8.1. Переменный (синусоидальный) ток

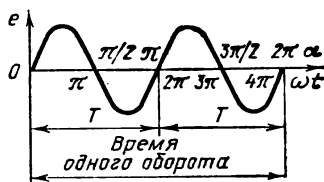


Рис. 8.2. Электродвижущая сила генератора переменного тока с двумя парами полюсов

ющихся величин называются максимальными и при синусоидальном изменении амплитудными значениями (амплитудами). Последние обозначаются прописными буквами с индексом  $m$ , например: амплитуда тока  $I_m$ , амплитуда напряжения  $U_m$ , амплитуда ЭДС  $E_m$ .

Число периодов в секунду, т. е. величина, обратная периоду, называется частотой переменной величины:

$$f = 1/T. \quad (8.1)$$

Единица частоты 1/с называется герц (Гц). При повышенной и высокой частотах пользуются кратными единицами — килогерц (кГц) и мегагерц (МГц):  $1 \text{ кГц} = 10^3 \text{ Гц}$ ;  $1 \text{ МГц} = 10^6 \text{ Гц}$ .

Стандартной частотой для промышленных установок в СССР является частота 50 Гц. Для установок электронагрева применяются частоты от 50 Гц до 50 МГц. В международной проводной связи по воздушным линиям пользуются частотами до 150 кГц, в радиотехнике — частотами  $10^5$ — $10^{10}$  Гц.

В генераторах переменного тока стремятся получить именно синусоидальный ток, так как при этом будут синусоидальными и ЭДС самоиндукции и взаимной индукции, пропорциональные производной тока по времени ( $-L di/dt$ ;  $-M di/dt$ ); синусоидальными будут и напряжения на выводах конденсаторов ( $u_C = \int i dt/C$ ) и резисторов ( $u = ri$ ), электродвигателей и осветительных сетей и т. д. В гл. 8—13 под переменными токами будем понимать их частный случай — синусоидальные токи.

Синусоидальный ток, изображенный на рис. 8.1, можно представить в виде

$$i = I_m \sin (2\pi t/T) = I_m \sin 2\pi f t, \quad (8.2a)$$

так как в момент времени, который выбран за начало отсчета времени ( $t=0$ ), ток  $i=0$ , как и следует из (8.2a) при  $t=0$ .

В течение первой половины периода ток положительный ( $i>0$ ), т. е. его значение изменяется (рис. 8.1), но направление тока остается неизменным. В течение второй половины периода ток отрицательный ( $i<0$ ); это означает, что его действительное направление (направление движения зарядов) изменяется на противоположное.

Величина, пропорционально синусу которой изменяется мгновенное значение тока (ЭДС, напряжения, заряда, потока и т. д.),

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T \quad (8.3)$$

называется угловой частотой и измеряется в рад/с (радиан в секунду).

Ток

$$i = I_m \sin \omega t. \quad (8.2b)$$

У генератора переменного тока с одной парой полюсов (рис. 7.9) одному обороту якоря соответствует один цикл изменения ЭДС, т. е. один оборот якоря продолжается в течение одного периода  $T$ :

$$e = E_m \sin \alpha, \quad (8.4a)$$

или

$$e = E_m \sin \omega t, \quad (8.4b)$$

так как за время  $t=T$  угол  $\alpha$  изменится на  $\omega T = 2\pi f T = 2\pi$ , т. е.  $\omega$  — угловая скорость вращения якоря.

У генератора, имеющего  $p$  пар полюсов, за один оборот якоря каждый виток его обмотки проходит под  $p$  парами полюсов и, следовательно, одному обороту соответствует  $p$  циклов изменения ЭДС или  $p$  периодов:

$$e = E_m \sin p\alpha = E_m \sin \omega t.$$

На рис. 8.2 показано изменение ЭДС за время одного оборота якоря генератора, число пар полюсов которого  $p=2$ . В течение одного оборота  $\alpha=2\pi$  проходят два цикла изменения ЭДС ( $\omega t = \omega \cdot 2T = 2\pi f 2T = 4\pi$ ).

Произведение

$$\omega t = p\alpha \quad (8.5)$$

называется электрическим углом.

На рис. 8.3 показано устройство генератора с двумя парами полюсов, укрепленных на статоре *C*. На валу закреплен якорь-ротор *Я* из листовой стали, в пазах которого рас-

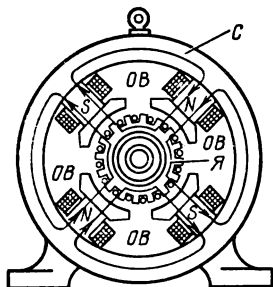


Рис. 8.3

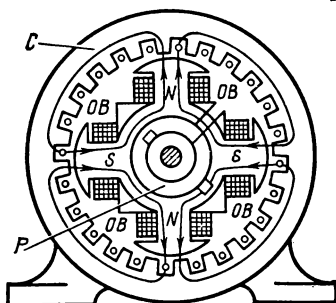


Рис. 8.5

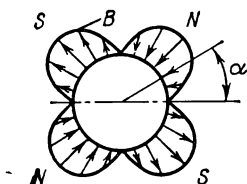


Рис. 8.4

Рис. 8.5. Устройство генератора переменного тока

Рис. 8.3. Устройство генератора переменного тока с двумя парами полюсов

Рис. 8.4. Распределение магнитного поля в генераторе, изображенном на рис. 8.3

положены витки обмотки. Концы обмотки присоединены к кольцам, как на рис. 7.8. Через кольца и щетки обмотка соединена с внешней цепью. По обмотке возбуждения *ОВ*, состоящей из четырех катушек, проходит постоянный ток возбуждения. Форма полюсов выбирается так, чтобы распределение магнитной индукции в воздушном зазоре было синусоидальным  $B = B_m \sin p\alpha$ , как условно показано на диаграмме рис. 8.4. При вращении якоря в его обмотке индуцируется синусоидальная ЭДС.

Рассмотренный тип генератора с вращающимся якорем применяется сравнительно редко. Чаще генераторы выполняются с неподвижным якорем-статором и вращающимся электромагнитом. Как указывалось, при неподвижной обмотке якоря повышается надежность изоляции и упрощается отвод больших токов.

Устройство генератора с неподвижным якорем-статором и явно выраженными полюсами показано на рис. 8.5. В пазах статора  $C$  уложена обмотка якоря. Постоянный ток в обмотку возбуждения  $OB$ , укрепленную на полюсных выступях вращающегося ротора  $P$ , поступает через щетки, наложенные на кольца.

Переменные токи до 20—50 кГц можно получить при помощи высокочастотных генераторов — машин переменного тока, а токи более высокой частоты в электронике и радиотехнике — при помощи генераторов с триодами или транзисторами.

**Пример 8.1.** Определить период тока в сетях энергосистем (частота равна 50 Гц).

**Решение.** Период  $T=1/f=1/50=0,02$  с.

## 8.2. ФАЗА СИНУСОИДАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Предположим, что на якоре-роторе генератора с одной парой полюсов (рис. 8.6) укреплены два одинаковых витка 1 и 2, сдвинутых в пространстве.

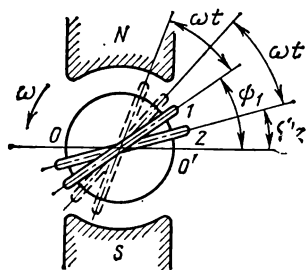
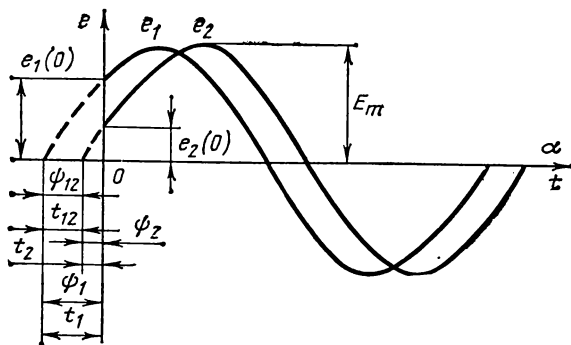


Рис. 8.6. Два витка простейшего генератора, сдвинутые в пространстве

Рис. 8.7. Электродвижущие силы, наводимые в витках генератора по рис. 8.6



При вращении якоря в витках наводятся ЭДС одинаковой частоты с одинаковыми амплитудами, так как витки вращаются с одной угловой скоростью и в одном и том же магнитном поле. Однако сдвиг витков в пространстве вызывает неодновременное прохождение витков под серединами полюсов и, следовательно, ЭДС неодновременно достигнут амплитудных значений.

Пусть якорь вращается с угловой скоростью  $\omega$  в направлении, противоположном движению стрелки часов, и в момент начала отсчета времени ( $t=0$ ) виток 1 относительно нейтральной плоскости  $OO'$  расположен под углом  $\psi_1$ , а виток 2—под углом  $\psi_2$  (рис. 8.6). За время  $t$  оба витка повернутся относительно первоначального положения на один и тот же угол  $\omega t$  и углы их поворота относительно нейтральной плоскости  $OO'$  составят  $\alpha_1 = \psi_1 + \omega t$  и  $\alpha_2 = \psi_2 + \omega t$ .

Мгновенные значения ЭДС (в момент времени  $t$ ) найдем по (8.4а):

$$e_1 = E_m \sin(\omega t + \psi_1) \text{ и } e_2 = E_m \sin(\omega t + \psi_2).$$

Эти синусоидально изменяющиеся ЭДС показаны на рис. 8.7.

В момент начала отсчета времени ( $t=0$ ) ЭДС  $e_1 = e_1(0)$ , наводимая в первом витке (рис. 8.6), не равна нулю, так как в этот момент времени плоскость витка не совпадает с нейтральной плоскостью  $OO'$ :

$$e_1(0) = E_m \sin(\omega \cdot 0 + \psi_1) = E_m \sin \psi_1.$$

Аналогично в момент  $t=0$  ЭДС, наводимая во втором витке,

$$e_2(0) = E_m \sin(\omega \cdot 0 + \psi_2) = E_m \sin \psi_2.$$

Электрические углы  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , определяющие значения ЭДС в начальный момент времени, называются начальными фазными углами или просто начальными фазами.

Разделив начальные фазы  $\psi_1$  и  $\psi_2$  на угловую частоту, получим интервалы времени:

$$t_1 = \frac{\psi_1}{\omega} = \frac{\psi_1}{2\pi} T; \quad t_2 = \frac{\psi_2}{\omega} = \frac{\psi_2}{2\pi} T, \quad (8.6)$$

прошедшие от начала периода ЭДС  $e_1$  или  $e_2$  до момента, который принят за начало отсчета времени. Началом периода обычно называют момент времени, в который синусоидальная величина проходит через нулевое значение и после которого она положительна.



Таким образом, всякая синусоидально изменяющаяся величина характеризуется: а) амплитудой; 2) частотой или периодом; 3) начальной фазой.

Разность начальных фаз двух синусоидальных величин одной и той же частоты называется углом сдвига фаз:

$$\psi_1 - \psi_2 = \psi_{12}. \quad (8.7)$$

Та величина, у которой начало периода или положительная амплитуда достигаются раньше, чем у другой, считается опережающей по фазе, а та, у которой те же значения достигаются позже, — отстающей по фазе.

Разделив угол сдвига фаз на угловую частоту, получим время, соответствующее углу сдвига, или время сдвига

$$t_{12} = \frac{\psi_{12}}{\omega} = \frac{\psi_{12}}{2\pi} T,$$

которое показывает, на какую часть периода или на какое время одна синусоидально изменяющаяся величина опережает другую. На рис. 8.7 ЭДС  $e_1$  опережает по фазе ЭДС  $e_2$  на угол  $\psi_{12}$  (время  $t_{12}$ ) или ЭДС  $e_2$  отстает по фазе от ЭДС  $e_1$  на угол  $\psi_{12}$ .

Две синусоидальные величины одной и той же частоты, имеющие одинаковые начальные фазы, совпадают по фазе. Две синусоидальные величины, угол сдвига фаз которых равен  $180^\circ$  ( $\psi_{12} = \pi$ ), изменяются в противофазе.

**Пример 8.2.** Дано  $e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + 60^\circ)$ ;  $e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + 45^\circ)$ ;  $f = 50$  Гц. Определить: 1) угол сдвига фаз ЭДС  $e_1$  и  $e_2$ ; 2) времена  $t_1$  и  $t_2$ , соответствующие начальным фазам ЭДС  $e_1$  и  $e_2$ ; 3) время  $t_{12}$ , соответствующее сдвигу фаз ЭДС.

**Решение.** Выразим начальные фазы ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  в радианах:

$$\psi_1 = \frac{60^\circ \cdot 2\pi}{360} = \frac{1}{3} \pi; \quad \psi_2 = \frac{45^\circ \cdot 2\pi}{360} = \frac{1}{4} \pi.$$

Определим угол сдвига фаз ЭДС  $e_1$  и  $e_2$

$$\psi_{12} = \psi_1 - \psi_2 = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ = \frac{15^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{1}{12} \pi$$

и период ЭДС

$$T = 1/f = 1/50 = 0,02 \text{ с.}$$

Время, соответствующее начальным фазам ЭДС,

$$t_1 = \frac{\psi_1}{\omega} = \frac{\pi/3}{2\pi} T = \frac{1}{6} 0,02 = 0,00333 \text{ с;}$$

$$t_2 = \frac{\psi_2}{\omega} = \frac{\pi/4}{2\pi} T = \frac{1}{8} 0,02 = 0,00250 \text{ с.}$$

Время, соответствующее сдвигу фаз ЭДС,

$$t_{12} = t_1 - t_0 = 0,00333 - 0,00250 = 0,00083 \text{ с.}$$

**Пример 8.3.** Написать выражение ЭДС  $e_2$ , изменяющейся в противофазе с ЭДС  $e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ , если  $\psi_1 = 60^\circ$ .

**Решение.** Электродвижущая сила

$$e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \psi_1 + 180^\circ) = E_{2m} \sin(\omega t + 240^\circ),$$

или, что то же самое,

$$e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \psi_1 - 180^\circ) = E_{2m} \sin(\omega t - 120^\circ).$$

### 8.3. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Синусоидально изменяющиеся величины изображают синусоидами, показывающими мгновенные значения в любой момент времени, или вращающимися векторами.

Синусоиду строят так, чтобы ее ординаты в выбранном масштабе равнялись мгновенным значениям величины, а абсциссы — времени, отсчитанному от некоторого момента, выбранного за начало отсчета ( $t=0$ ). Такое изображение позволяет найти амплитуду, начальную фазу и период (рис. 8.1, 8.7).

При изображении синусоидально изменяющейся величины, например ЭДС  $e = e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$ , вращающимся вектором на плоскости  $xy$  (рис. 8.8) длина вектора  $OA$  в выбранном масштабе представляет амплитуду  $E_m$ ; угол между вектором и положительным направлением оси абсцисс  $x$  в начальный момент ( $t=0$ ) равен начальной фазе  $\psi$ , а угловая скорость вращения вектора, направленная *против направления движения стрелки часов*, равна угловой частоте  $\omega$ . Мгновенное значение  $e(t)$  определяется проекцией вектора на ось ординат  $y$ . Действительно, в момент времени  $t=0$  ЭДС  $e(0) = E_m \sin \psi$ , эту же величину выражает и проекция вектора  $OA$  на ось  $y$ . В момент времени  $t'$  ЭДС  $e(t') = E_m \sin(\omega t' + \psi)$  и проекция вектора, занявшего новое положение  $OB$ , выражает ту же величину  $e(t')$ . В момент  $t''$  направление вращающегося вектора совпадает с положительным направлением оси  $y$ , т.е. проекция  $e(t'')$  равна длине вектора  $E_m$  и т.д.

Совокупность двух или большего числа векторов, изображающих синусоидально изменяющиеся величины одной частоты в начальный момент времени ( $t=0$ ), называется векторной диаграммой. Например, ЭДС  $e_1 =$

$= E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$  и  $e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)$  представлены на векторной диаграмме (рис. 8.9) двумя векторами  $E_{1m}$  и  $E_{2m}$ , углы между которыми и положительным направлением оси  $x$  равны соответственно  $\psi_1$  и  $\psi_2$ ; окружности, показанные на рисунке, обычно не изображаются.

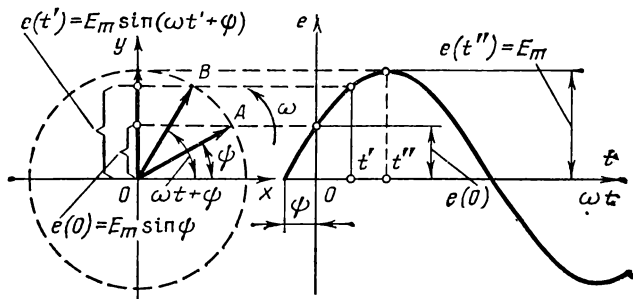


Рис. 8.8. Векторная диаграмма ЭДС и синусоидальное изменение ЭДС

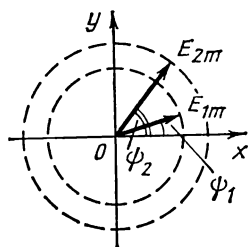


Рис. 8.9. Векторная диаграмма двух ЭДС

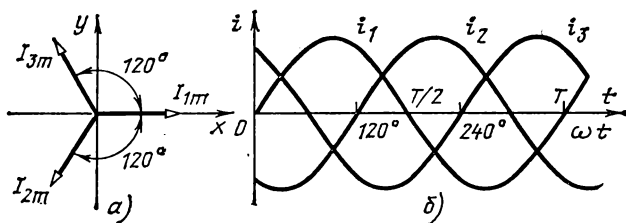


Рис. 8.10. Векторная диаграмма (а) и синусоиды (б) трех токов

На диаграмме рис. 8.10, а построены векторы трех токов:

$$\begin{aligned} i_1 &= I_{1m} \sin \omega t; \\ i_2 &= I_{2m} \sin (\omega t - 120^\circ); \\ i_3 &= I_{3m} \sin (\omega t + 120^\circ), \end{aligned}$$

а на рис. 8.10, б показаны синусоиды этих токов. Ток  $i_1$  имеет нулевую начальную фазу, поэтому вектор  $I_{1m}$  расположен вдоль положительной полуоси  $x$ . Ток  $i_2$  отстает по фазе от тока  $i_1$  на  $120^\circ$ , начальная фаза его отрицательная ( $-120^\circ$ ), поэтому вектор  $I_{2m}$  повернут относительно вектора тока  $I_{1m}$  по направлению движения часовой стрелки, т. е. в отрицательном направлении, на  $120^\circ$ . Ток  $i_3$  опережает по фазе ток  $i_1$  на  $120^\circ$  (или отстает по фазе на  $240^\circ$ ), поэтому его начальная фаза положительна ( $+120^\circ$ ) и вектор тока  $I_{3m}$  повернут в положительную сторону, т. е. в направлении, обратном движению часовой стрелки, на соответствующий угол.

Так как на векторных диаграммах изображают токи, ЭДС, напряжение и т. д. *только одной частоты*, то угловая скорость всех векторов на данной диаграмме одинакова и *взаимное положение векторов в любой момент остается неизменным*. При изучении синусоидальных, т. е. периодически изменяющихся величин, *начало отсчета времени можно выбрать произвольно*; поэтому на векторной диаграмме один из векторов можно направить произвольно, а остальные векторы расположить по отношению к первому под углами, равными соответствующим углам сдвига фаз, и оси координат опустить.

**Пример 8.4.** Построить векторную диаграмму ЭДС примера 8.2, приняв за начало отсчета времени момент: а) когда ЭДС  $e_2(0) = E_m \sin 45^\circ$ ; б) когда ЭДС  $e_2(0) = 0$ .

**Решение.** а) В первом случае ЭДС  $e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + 45^\circ)$ , а ЭДС  $e_1$ , как задано в примере 8.2, опережает по фазе ЭДС  $e_2$  на  $15^\circ$ , т. е.  $e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + 60^\circ)$ , что и показано на рис. 8.11, а. б) Во втором случае ЭДС следует записать в виде  $e_2 = E_{2m} \sin \omega t$  и в виде  $e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + 15^\circ)$ , чтобы ЭДС  $e_1$  по-прежнему опережала по фазе ЭДС  $e_2$  на  $15^\circ$  (рис. 8.11, б).

Изображение синусоидальных величин векторами позволяет значительно упростить графическое определение суммы или разности нескольких синусоидальных величин.

Рассмотрим сложение двух синусоидальных величин одной частоты:

$$e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) \text{ и } e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \psi_2).$$

Мгновенное значение результирующей ЭДС равно алгебраической сумме мгновенных значений слагаемых величин, т. е.

$$e = e_1 + e_2 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + E_{2m} \sin(\omega t + \psi_2).$$

Сложение двух синусоидальных величин, например  $e_1$  и  $e_2$ , можно произвести графически (рис. 8.12) по точкам. Ордината результирующей кривой для каждого момента времени равна сумме ординат слагаемых синусоид для того же момента времени. Суммарная кривая также будет синусо-

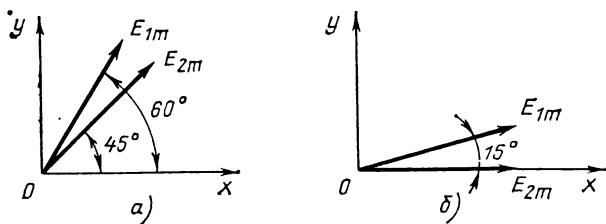


Рис. 8.11. Векторные диаграммы к примеру 8.4

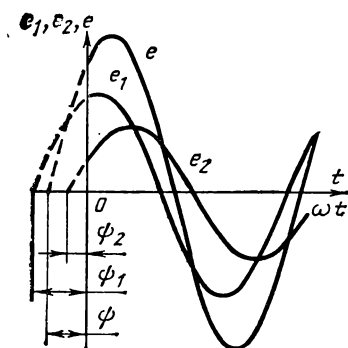


Рис. 8.12. Сложение двух синусоид

соидой той же частоты, что и слагаемые. Из графика определяется амплитуда и начальная фаза результирующей ЭДС, так что можно записать

$$e = e_1 + e_2 = E_m \sin(\omega t + \psi). \quad (8.8)$$

Достаточно точное построение требует значительной затраты времени.

Докажем равенство вектора, изображающего результирующую синусоиду, геометрической сумме векторов, представляющих слагаемые синусоиды. Для сложения двух синусоидальных ЭДС  $e_1$  и  $e_2$ , изображенных в выбранном масштабе векторами  $OA$  и  $OB$  (рис. 8.13), необходимо один из векторов, например  $OB$ , перенести параллельно самому себе так, чтобы начало его совпало с концом другого вектора ( $OA$ ); замыкающий вектор  $OB$  будет изображать сум-

марную ЭДС  $e$ . Вектор  $OB$  можно построить и как диагональ параллелограмма со сторонами  $OA$  и  $OB$ .

Действительно, при  $t=0$  проекция вектора  $OA$  на ось  $y$  представляет мгновенное значение  $e_1(0)$ , проекция вектора  $OB$  (или равного ему вектора  $AB$ ) на ту же ось — мгновенное значение  $e_2(0)$ , а сумма этих проекций  $e_1(0) + e_2(0)$  равна проекции на ось ординат  $e(0)$  суммарного вектора

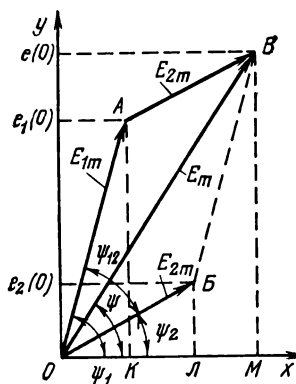


Рис. 8.13. Сложение двух векторов

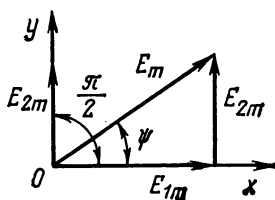


Рис. 8.14. Сложение векторов ЭДС, сдвинутых по фазе на угол  $\pi/2$

$OB$ . Взаимное расположение векторов при их вращении не изменяется, а для проекций в любой момент времени выполняется необходимое условие  $e = e_1 + e_2$ .

Из треугольника векторов находим по известной теореме амплитуду суммарной ЭДС:

$$E_m = \sqrt{E_{1m}^2 + E_{2m}^2 + 2E_{1m}E_{2m}\cos\psi_{12}}, \quad (8.9)$$

где  $\psi_{12} = \psi_1 - \psi_2$ ;

тангенс начального фазного угла  $\psi$  результирующей ЭДС (рис. 8.13):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{BM}{OM} = \frac{E_m \sin \psi}{E_m \cos \psi} = \\ &= \frac{(AK) + (BL)}{(OK) + (OL)} = \frac{E_{1m} \sin \psi_1 + E_{2m} \sin \psi_2}{E_{1m} \cos \psi_1 + E_{2m} \cos \psi_2}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Таким образом, при сложении синусоидальных величин одной частоты получается синусоидальная величина той же частоты, амплитуда которой равна геометрической сумме амплитуд слагаемых величин.

Для часто встречающегося случая сложения двух синусоидальных величин  $e_1 = E_{1m} \sin \omega t$  и  $e_2 = E_{2m} \sin(\omega t +$

$+\pi/2$ ), сдвинутых по фазе на угол  $+\pi/2$  (рис. 8.14), можно написать

$$e = e_1 + e_2 = E_m \sin(\omega t + \psi),$$

где амплитуда результирующей ЭДС

$$E_m = \sqrt{E_{1m}^2 + E_{2m}^2}, \quad (8.11)$$

а тангенс угла

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{E_m \sin \psi}{E_m \cos \psi} = \frac{E_{2m}}{E_{1m}}. \quad (8.12)$$

При сложении двух синусоидальных величин, имеющих одинаковые начальные фазы  $e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi)$  и  $e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \psi)$  (рис. 8.15), получаем

$$e = e_1 + e_2 = (E_{1m} + E_{2m}) \sin(\omega t + \psi) = E_m \sin(\omega t + \psi).$$

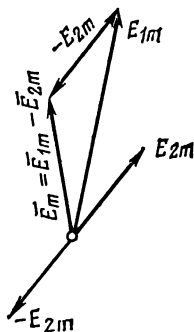
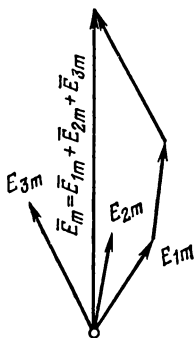
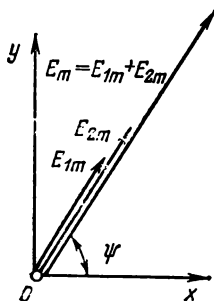


Рис. 8.15. Сложение векторов ЭДС, совпадающих по фазе. Рис. 8.16. Сложение векторов ЭДС по фазе. Рис. 8.17. Вычитание векторов двух ЭДС

Таким образом, в этом случае амплитуда результирующей ЭДС равна сумме амплитуд слагающих ЭДС, а начальная фаза результирующей ЭДС равна начальной фазе каждой из суммируемых ЭДС.

При числе векторов больше двух сложение их производится аналогично рассмотренному выше: векторы переносятся параллельно самим себе так, чтобы начало второго вектора совпало с концом первого, начало третьего совпало с концом второго и т. д. Замыкающий вектор представляет собой вектор суммарной величины. На рис. 8.16 показано сложение векторов трех ЭДС.

Вычитание одной синусоидальной величины из другой

синусоидальной величины заменяют сложением уменьшаемой величины с вычитаемой, взятой с обратным знаком, что следует из выражения

$$e_1 - e_2 = e_1 + (-e_2).$$

Следует иметь в виду, что изменение знака у синусоидальной величины соответствует изменению начальной фазы на  $180^\circ$ ; действительно, можно написать

$$-E_{2m} \sin(\omega t + \psi_2) = E_{2m} \sin(\omega t + \psi_2 \pm \pi).$$

Если синусоидальная величина изображена вектором, то изменение знака означает поворот вектора на  $\pm 180^\circ$ . Таким образом, вычитание вектора можно заменить сложением вектора уменьшаемой величины с обратным вектором вычитаемой величины (рис. 8.17).

При сложении двух синусоидальных величин различной частоты получается несинусоидальная величина, которую нельзя изображать вращающимся вектором.

#### 8.4. СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

**а) Среднее значение за половину периода.** До сих пор для характеристики синусоидального тока, напряжения и ЭДС определялись их мгновенные и максимальные значения. Однако в электротехнике применяют еще два понятия: среднее и действующее (эффективное) значения.

Среднее значение синусоидального тока  $I_{cp}$  вычисляют за полупериод, в течение которого ток остается положительным, т. е. направление тока не изменяется. Оно равно такому постоянному току, при котором в течение полупериода проходит тот же заряд  $Q$ , что и при переменном токе, таким образом,

$$I_{cp} = \frac{Q}{T/2} = \frac{2}{T} Q = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt, \quad (8.13)$$

причем начало отсчета времени  $t=0$  должно совпадать с началом периода тока, чтобы направление тока не изменялось. Аналогично определяются средние значения за полупериод напряжения и ЭДС:

$$U_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} u dt \quad \text{и} \quad E_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} e dt. \quad (8.14)$$



Среднее за полупериод значение тока (аналогично напряжению, ЭДС) можно представить графически высотой прямоугольника с основанием, равным  $T/2$ , и площадью, равной площади, которая ограничена осью абсцисс и кривой тока от начала до половины периода (рис. 8.18).

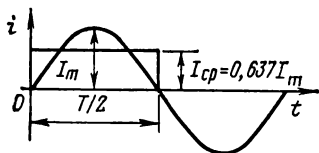


Рис. 8.18. Среднее значение тока за полупериод

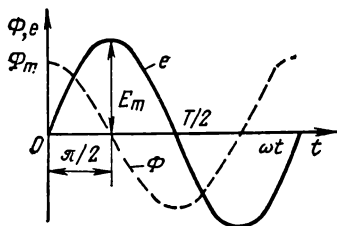


Рис. 8.19. Магнитный поток и наводимая им ЭДС

Среднее значение и амплитуда синусоидального тока связаны между собой следующим соотношением:

$$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt = \frac{2I_m}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = -\frac{2I_m}{T\omega} \cos \omega t \Big|_0^{T/2},$$

и так как  $T\omega = 2\pi$ , а  $\cos(\omega T/2) = \cos(2\pi/2) = -1$  и  $\cos 0 = 1$ , то

$$I_{cp} = -\frac{I_m}{\pi} (-1 - 1) = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m. \quad (8.15)$$

Такое же соотношение справедливо для синусоидальных напряжения и ЭДС.

$$U_{cp} = \frac{2}{\pi} U_m \text{ и } E_{cp} = \frac{2}{\pi} E_m. \quad (8.16)$$

**б) Среднее значение за период.** При синусоидальном токе в течение первой половины периода определенный заряд  $Q = I_{cp}T/2$  проходит в прямом направлении. В течение второй половины периода такой же заряд проходит в обратном направлении. Таким образом, количество электричества, прошедшее за период, равно нулю и среднее за период значение синусоидального тока равно нулю.

Угол поворота подвижной части магнитоэлектрического измерителя (§ 5.10), включенного в цепь переменного тока, пропорционален среднему за период значению тока, проходящего через катушку измерителя. Поэтому при синусоидальном токе

соидальном токе угол поворота подвижной части измерителя равен нулю.

**в) Среднее значение ЭДС индукции.** Если индуцируемая в катушке с числом витков  $\omega$  ЭДС обусловлена изменением магнитного потока по синусоидальному закону, то среднее значение ее за полупериод можно выразить через амплитуду магнитного потока.

Так как начальную фазу одной из синусоидально изменяющихся величин можно выбирать произвольно, то допустим, что магнитный поток имеет начальную фазу  $\psi = 90^\circ$  (рис. 8.19), т. е.

$$\Phi = \Phi_m \sin(\omega t + 90^\circ) = \Phi_m \cos \omega t.$$

Тогда наведенная ЭДС

$$\begin{aligned} e &= -\omega \frac{d\Phi}{dt} = -\omega \Phi_m \frac{d(\cos \omega t)}{dt} = -\omega \Phi_m (-\sin \omega t) = \\ &= \omega \Phi_m \sin \omega t = E_m \sin \omega t, \end{aligned} \quad (8.17)$$

где  $E_m = \omega \Phi_m = 2\pi f \omega \Phi_m$  — амплитуда ЭДС.

Таким образом, синусоидальный магнитный поток наводит синусоидальную ЭДС индукции, отстающую по фазе от магнитного потока на угол  $\pi/2$  (рис. 8.19).

Среднее за полупериод значение ЭДС

$$E_{cp} = \frac{2}{\pi} E_m = \frac{4\pi}{\pi} f \omega \Phi_m = 4f \omega \Phi_m. \quad (8.18)$$

### 8.5. ДЕЙСТВУЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

При расчете цепей переменного тока и их экспериментальном исследовании чаще всего пользуются понятием действующих (эффективных) значений тока, напряжения и ЭДС.

Действующие значения переменных величин обозначаются прописными буквами без индексов, т. е.  $I$  — ток;  $U$  — напряжение;  $E$  — ЭДС.

На шкалах измерительных приборов, а также в технической документации, если нет оговорок, указываются именно действующие значения тока, напряжения и ЭДС.

Действующее значение переменного тока равно значению такого эквивалентного постоянного тока, который, проходя по цепи с тем же сопротивлением, что и переменный ток, выделяет за период то же количество тепла.

При сопротивлении цепи  $r$  количество тепла, выделенное

переменным током, за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ ,

$$dW_T = r i^2 dt,$$

а за период  $T$  переменного тока количество выделенного им тепла

$$W_T = \int_0^T dW_T = \int_0^T r i^2 dt. \quad (8.19)$$

Приравняв  $W_T$  количеству тепла, выделенному при том же сопротивлении  $r$  постоянным током  $I$  за то же время  $T$ , получим

$$r I^2 T = \int_0^T r i^2 dt.$$

откуда действующее значение переменного тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (8.20)$$

Полученное выражение показывает, что действующее значение переменного тока представляет собой среднеквадратичное за период значения тока.

На рис. 8.20, *а* приведена кривая переменного тока  $i$  и кривая квадрата этого тока  $i^2$ . Площадь  $aB\Gamma a + B\Gamma zB$ , ограниченная кривой  $aB\Gamma z$  и осью абсцисс, в одном масштабе представляет собой величину, определяемую выражением  $\int_0^T i^2 dt$ , а в другом масштабе, в  $r$  раз большем, ко-

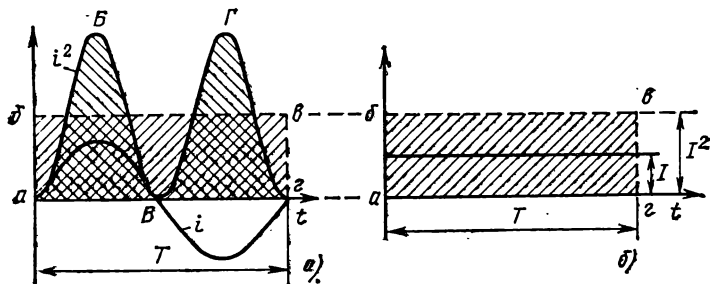


Рис. 8.20. Переменный ток и квадрат переменного тока (*а*), эквивалентный постоянный ток и квадрат постоянного тока (*б*)

личество тепла, выделенного током  $i$  за время  $T$  при сопротивлении цепи  $r$  и определяемое выражением  $r \int_0^T i^2 dt$ .

На рис. 8.20, б сплошная кривая изображает постоянный ток, а пунктирная прямая — квадрат этого тока. Площадь  $ab\gamma a$  в одном масштабе представляет произведение  $I^2 T$ , а в другом масштабе, в  $r$  раз большем, количество тепла, выделенного током  $I$  за время  $T$  при сопротивлении цепи  $r$ .

Если площади  $aB\gamma a + B\Gamma z B$  и  $ab\gamma a$  равны, то количество тепла, выделенного переменным током  $i$ , и количество тепла, выделенного постоянным током  $I$  при одном и том же сопротивлении  $r$  за одно и то же время  $T$ , равны. Именно в этом случае действующее значение переменного тока равно значению постоянного тока.

Аналогично действующие значения напряжения и ЭДС

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} \quad \text{и} \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}. \quad (8.21)$$

При синусоидальном токе, т. е.  $i = I_m \sin \omega t$ , действующее значение тока

$$I = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt}.$$

Приняв во внимание, что

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{2}$$

$$\text{и} \quad \int_0^T \frac{1}{2} dt = \frac{T}{2}, \quad \text{а} \quad \int_0^T \frac{\cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{4\omega} \sin 2\omega t \Big|_0^T = 0,$$

получим

$$I = I_m \sqrt{\frac{1}{T} \frac{T}{2}} = I_m / \sqrt{2} \approx 0,707 I_m. \quad (8.22a)$$

Аналогично для действующих значений синусоидальных напряжения и ЭДС можно написать

$$U = U_m / \sqrt{2} \approx 0,707 U_m \quad \text{и} \quad E = E_m / \sqrt{2} \approx 0,707 E_m. \quad (8.22b)$$

Действующие значения синусоидальных токов, напряжений и ЭДС пропорциональны амплитудам этих величин;

поэтому вектор, выражающий в одном масштабе амплитудное значение, в другом масштабе представляет действующее значение той же величины. В дальнейшем при определении масштабов векторов будут иметься в виду их действующие значения.

**Пример 8.5.** Напряжение, измеренное вольтметром,  $U=220$  В. Определить амплитуду напряжения.

**Решение.** Амплитуда напряжения  $U_m = \sqrt{2} U = \sqrt{2} 220 = 310$  В,  $=310$  В.

## 8.6. ИЗМЕРЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

Для измерения токов и напряжений (или ЭДС) в цепях переменного тока часто применяются соответственно амперметры и вольтметры электромагнитной системы.

Электромагнитный измерительный механизм (рис. 7.23) рассмотрен в § 7.10.

Переменный ток в катушке измерителя создает вращающий момент, пропорциональный квадрату мгновенного значения тока, т. е.

$$m = k i^2.$$

Вследствие значительной инерции подвижной части измерителя угол поворота ее пропорционален среднему значению вращающего момента за период

$$M_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T m dt = \frac{1}{T} k \int_0^T i^2 dt = k I^2,$$

так как по определению  $\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = I^2$  — квадрат действующего значения тока.

Таким образом, средний вращающий момент и пропорциональный ему угол поворота подвижной части измерителя определяются квадратом действующего значения тока.

Обмотка электромагнитного амперметра состоит из нескольких витков или нескольких десятков витков. Вольтметр имеет обмотку с большим числом витков (несколько тысяч) и добавочное сопротивление. На шкалу прибора наносятся не квадраты действующего значения, а сами действующие значения. Поэтому у этих приборов шкала неравномерная.

## Глава девятая

### РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

#### 9.1. ОСОБЕННОСТИ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

В цепи постоянного тока при неизменном напряжении источника питания и параметрах цепи остаются постоянными: ток, мощность и энергия электрического и магнитного полей.

Явления, происходящие в цепях переменного тока, существенно отличаются от процессов в цепях постоянного тока.

При переменном напряжении на выводах цепи проходит переменный ток, изменяются электрическое поле и его энергия, магнитное поле этого тока и запасенная в нем энергия, в цепи возникает ЭДС самоиндукции. Изменяется и мощность, характеризующая скорость преобразования электрической энергии в тепловую (механическую, химическую и т. д.)

Электрическая цепь, в которой происходит преобразование электрической энергии в тепловую и в которой происходит изменение энергии электрического и магнитного полей, характеризуется тремя основными параметрами: сопротивлением  $r$ , емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$ .

Наряду с цепями, обладающими всеми указанными параметрами, встречаются цепи, в которых преобладает один из них ( $r$ ,  $L$  или  $C$ ), тогда как другие параметры выявлены слабо и их влиянием можно пренебречь. Например, одну или несколько ламп накаливания, присоединенных к сети с частотой 50 Гц короткими соединительными проводами, можно рассматривать как сопротивление  $r$ , так как влияние остальных параметров на процессы в этой цепи ничтожно. То же можно сказать и о цепях с нагревательными приборами и реостатами.

Цепь ненагруженного трансформатора во многих случаях можно рассматривать как индуктивность  $L$ , а кабель, работающий без нагрузки, — как емкость  $C$ .

#### 9.2. ЦЕПЬ С РЕЗИСТИВНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

**а) Напряжение и ток цепи.** Если цепь (рис. 9.1) обладает только сопротивлением  $r$ , например цепь с резистором

или резистивным элементом, и на входе ее действует синусоидально изменяющееся напряжение (источника питания или сети)

$$u = U_m \sin \omega t, \quad (9.1)$$

то по закону Ома ток

$$i = u/r = U_m \sin \omega t / r = I_m \sin \omega t. \quad (9.2)$$

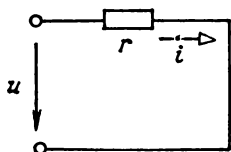


Рис. 9.1. Цепь с резистивным элементом

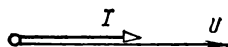


Рис. 9.3. Векторная диаграмма цепи с резистивным элементом

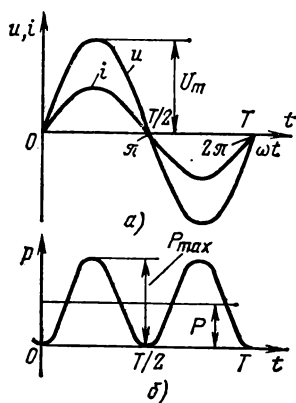


Рис. 9.2. Ток, напряжение (а) и мощность (б) цепи с резистивным элементом

Амплитуда этого тока

$$I_m = U_m / r, \quad (9.3)$$

т. е. равна амплитуде напряжения, деленной на сопротивление цепи.

Разделив амплитуды на  $\sqrt{2}$ , получим

$$I_m / \sqrt{2} = \frac{U_m / \sqrt{2}}{r},$$

или

$$I = U / r. \quad (9.4)$$

Следовательно, действующее значение тока равно действующему значению напряжения на выводах цепи, деленному на ее сопротивление. Таким образом, закон Ома для цепи переменного тока с сопротивлением  $r$  может быть записан и для мгновенных, и для амплитудных, и для действующих значений напряжения и тока.

Из (9.1) и (9.2) видно, что напряжение и ток имеют одинаковую начальную фазу, иначе говоря, они совпадают по фазе, т. е. одновременно достигают своих нулевых и амплитудных значений, и в любой момент времени мгновенные значения тока и напряжения пропорциональны друг другу.

На схеме рис. 9.1 стрелками показаны выбранные *положительные направления* тока и напряжения. Ток направлен так, как указывает стрелка, в те полупериоды, когда его мгновенные значения положительны, т. е.  $i > 0$ . В рассматриваемом случае  $i = I_m \sin \omega t$ . Это значит, что  $i > 0$  в интервалах, когда  $\sin \omega t > 0$  или  $\omega t = 0 - \pi$  (рис. 9.2, а), а также  $\omega t = 2\pi - 3\pi$ ;  $4\pi - 5\pi$  и т. д. Верхний вывод цепи (рис. 9.1) имеет потенциал выше, чем нижний, в те полупериоды, когда  $u > 0$  (стрелка, как и в цепи постоянного тока, направлена от вывода, потенциал которого считается положительным по отношению к потенциалу второго вывода). Так как в цепи с сопротивлением напряжение и ток совпадают по фазе, то мгновенное значение напряжения положительно в те же моменты времени, что и ток (рис. 9.2, а).

На рис. 9.3 показана векторная диаграмма цепи, на которой вектор тока  $I$  совпадает по направлению с вектором напряжения  $U$ . Оси декартовых координат на этом рисунке не показаны, как и на других векторных диаграммах этой главы.

**б) Мощность цепи.** Произведение мгновенных значений напряжения  $u$  и тока  $i$  называется мгновенным значением мощности, или, короче, *мгновенной мощностью*:

$$p = ui. \quad (9.5)$$

Мгновенная мощность характеризует скорость преобразования электрической энергии цепи в данный момент времени. В цепи с сопротивлением  $r$  мгновенная мощность показывает скорость преобразования электрической энергии в тепловую. Действительно, для рассматриваемой цепи  $u = ri$  и

$$p = ui = ri^2. \quad (9.6)$$

Допустим, что в момент  $t_1$  напряжение  $u_1 = 100$  В, а ток  $i_1 = 2$  А; следовательно, сопротивление цепи

$$r = u_1/i_1 = 100/2 = 50 \text{ Ом}$$

и мгновенная мощность

$$p_1 = u_1 i_1 = ri_1^2 = 50 \cdot 2^2 = 200 \text{ Вт.}$$



Это значит, что в данный момент времени  $t_1$  электрическая энергия превращается в тепло со скоростью 200 Дж/с.

Подставив в (9.6) выражения напряжения и тока, получим

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t = 2UI \sin^2 \omega t. \quad (9.7)$$

На рис. 9.2, б показана зависимость мгновенной мощности от времени. Мощность в течение всего периода положительна, так как электрическая энергия превращается в тепловую независимо от направления тока в цепи. Значение мощности  $p$  изменяется от нуля при  $i=0$  (моменты времени  $t=0$ ;  $t=T/2$ ;  $t=T$ ) до положительного максимума  $p_{\max} = U_m I_m = r I_m^2$  при токе  $i=I_m$  и  $i=-I_m$  (моменты времени  $t=T/4$  и  $t=3T/4$ ).

Выражение мгновенной мощности (9.7) можно преобразовать, пользуясь известным соотношением  $\sin^2 \omega t = (1 - \cos 2\omega t)/2$ .

Таким образом,

$$p = U_m I_m \sin^2 \omega t = \frac{U_m I_m}{2} - \frac{U_m I_m}{2} \cos 2\omega t = UI - UI \cos 2\omega t, \quad (9.8)$$

т. е. мгновенная мощность представляет собой сумму двух слагающих: постоянной мощности  $UI$  и переменной  $-UI \cos 2\omega t$ , имеющей амплитуду  $UI$  и изменяющейся с двойной частотой. Средняя за период мощность  $P$  равна постоянной слагающей мгновенной мощности. Действительно,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI - UI \cos 2\omega t] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T UI dt = UI, \end{aligned}$$

так как среднее за период значение переменной слагающей  $UI \cos 2\omega t$ , как и всякой синусоидальной величины (§ 8.4),

равно нулю  $\left( \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos 2\omega t dt = 0 \right)$ .

Таким образом, средняя за период мощность цепи с сопротивлением  $r$  равна произведению действующих значений напряжения и тока этой цепи.

Приняв во внимание, что  $U=rI$  и  $I=U/r$ , можно напи-

сать и другие выражения средней мощности:

$$P = UI = rI^2 = U^2/r. \quad (9.9)$$

Среднюю за период мощность цепи принято называть активной мощностью, а сопротивление  $r$  резистивного элемента, в котором электрическая энергия преобразуется в тепло, — активным сопротивлением.

Средняя или активная мощность характеризует среднюю скорость необратимого преобразования электрической энергии не только в тепловую, но и в другие виды энергии, например световую (лампы накаливания), механическую (электродвигатель), химическую (зарядка аккумулятора).

При определении энергии, которая расходуется в течение длительных промежутков времени, во много раз превосходящих период, пользуются понятием средней или активной мощности. При определении энергии, расходуемой в течение долей периода, пользуются понятием мгновенной мощности.

### 9.3. ЦЕПЬ С ИНДУКТИВНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

**а) Напряжение, ток, сопротивление.** Если цепь, обладает только индуктивностью  $L$  (рис. 9.4), например катушка индуктивности, потерями в которой можно пренебречь, или индуктивный элемент, и по ней проходит синусоидальный

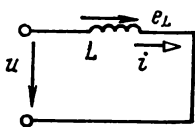


Рис. 9.4. Цепь с индуктивным элементом

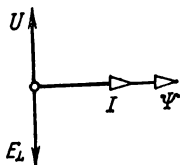


Рис. 9.6. Векторная диаграмма цепи с индуктивным элементом

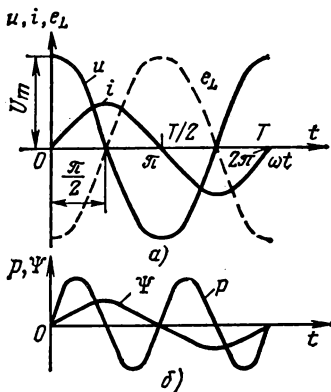


Рис. 9.5. Ток, напряжение (а) и мощность, потокоцепление (б) цепи с индуктивным элементом

ТОК

$$i = I_m \sin \omega t, \quad (9.10)$$

то по определению потокосцепление цепи

$$\Psi = Li = LI_m \sin \omega t = \Psi_m \sin \omega t,$$

где  $\Psi_m = LI_m$  — амплитуда потокосцепления.

Изменение потокосцепления вызывает ЭДС самоиндукции

$$\begin{aligned} e_L &= - \frac{d\Psi}{dt} = - L \frac{di}{dt} = - L \frac{d(I_m \sin \omega t)}{dt} = \\ &= - LI_m \omega \frac{d \sin \omega t}{d\omega t} = - LI_m \omega \cos \omega t = E_{Lm} \sin (\omega t - \pi/2), \end{aligned} \quad (9.11)$$

где  $E_{Lm} = LI_m \omega$  — амплитуда ЭДС.

Так как сопротивление цепи  $r=0$ , то по второму закону Кирхгофа сумма напряжений на выводах цепи (напряжение питания) и ЭДС самоиндукции  $e_L$  равна нулю:

$$u + e_L = 0$$

[аналогично (7.22) при  $r=0$ ], откуда напряжение цепи

$$\begin{aligned} u &= -e_L = L \frac{di}{dt} = LI_m \omega \sin (\omega t + \pi/2) = \\ &= U_m \sin (\omega t + \pi/2) = U_m \cos \omega t, \end{aligned} \quad (9.12)$$

где  $U_m = E_m$ .

Таким образом, приложенное к цепи напряжение вызывает в ней такой ток, который при своем изменении в каждый момент времени индуцирует ЭДС, равную по амплитуде и противоположную по знаку приложенному к цепи напряжению, т. е. уравнивающую это напряжение.

На рис. 9.5, *a* построены зависимости мгновенных значений тока, напряжения и ЭДС от времени, а на рис. 9.6 — векторная диаграмма цепи.

Из (9.10) и (9.12) и из графика (рис. 9.5, *a*) следует, что напряжение опережает ток по фазе на угол  $\pi/2$ , или  $1/4$  периода. Это объясняется тем, что в моменты времени, когда ток проходит через нулевые значения, скорость изменения его наибольшая, соответственно наибольшими будут и ЭДС  $e_L$  и уравнивающее ее напряжение  $u$ . Наоборот, в те моменты, когда ток проходит через свои амплитудные значения, скорость его изменения равна нулю, соответственно равны нулю и ЭДС  $e_L$  и напряжение  $u$ . По закону Ленца

при нарастании тока ЭДС  $e_L$  направлена навстречу току и, наоборот, при уменьшении тока направлена одинаково с ним. Поэтому, например, в течение первой четверти периода (рис. 9.5, а), когда ток положителен и нарастает, ЭДС отрицательна, т. е. направлена противоположно указанному стрелкой на рис. 9.4, а в течение второй четверти периода, когда ток положителен и убывает, ЭДС положительна (направлена, как указано стрелкой на рис. 9.4) и т. д.

Из (9.11) и (9.12) следует, что

$$U_m = E_{Lm} = \omega L I_m, \quad (9.13)$$

откуда получаем закон Ома для амплитудных значений:

$$I_m = U_m / \omega L = U_m / x_L. \quad (9.14)$$

Разделив на  $\sqrt{2}$  каждую из частей написанного равенства, получим закон Ома для действующих значений тока и напряжения:

$$I = U / \omega L = U / x_L. \quad (9.15)$$

Величина

$$x_L = \omega L = 2\pi f L \quad (9.16)$$

называется индуктивным сопротивлением.

Индуктивное сопротивление измеряется в омах, так как

$$[x_L] = [\omega L] = \frac{1}{c} \cdot \text{Гн} = \frac{1}{c} \cdot \text{Ом} \cdot \text{с} = \text{Ом}.$$

Индуктивное сопротивление пропорционально индуктивности и частоте, при постоянном токе оно равно нулю, т. е. цепь с индуктивным элементом не оказывает сопротивления протеканию постоянного тока, а цепь переменного тока с индуктивностью имеет сопротивление (9.16), которое растет с увеличением частоты тока.

*Для цепи с индуктивностью закон Ома применим только для амплитудных и действующих значений тока и напряжения и не может применяться для мгновенных значений, так как  $u = L di/dt$  и  $u \neq x_L i$ .*

**б) Мощность цепи.** Мгновенная мощность цепи с индуктивностью определяется произведением мгновенных значений напряжения и тока:

$$\begin{aligned} p = ui &= U_m \sin(\omega t + \pi/2) \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \cos \omega t \cdot \sin \omega t = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Зависимость мгновенной мощности от времени построена на рис. 9.5, б.

Из уравнения и графика видно, что мгновенная мощность цепи с индуктивностью изменяется с двойной частотой, 2 раза в течение периода достигая положительного максимума  $UI = \omega LI^2$  и 2 раза достигая такого же по значению отрицательного максимума.

В течение первой четверти периода мгновенная мощность положительна, так как и ток и напряжение положительны. Ток в цепи увеличивается от нуля до максимального значения и за счет энергии, развиваемой источником питания, увеличивается энергия магнитного поля цепи до наибольшего значения  $W_{Lmax} = LI_m^2/2 = LI^2$ .

В течение второй четверти периода мгновенная мощность отрицательна, так как ток положительный, а напряжение отрицательное. Ток уменьшается от максимального значения до нуля; естественно, уменьшается до нуля и энергия магнитного поля цепи, которая возвращается обратно источнику питания. В течение третьей и четвертой четвертей периода явления повторяются с той лишь разницей, что ток будет отрицательным, т. е. его действительное направление будет противоположно направлению в первой половине периода.

Таким образом, мгновенная мощность цепи с индуктивностью

$$p = ui = L \frac{di}{dt} i = \frac{Lidi}{dt} = \frac{\Psi di}{dt} \quad (9.17)$$

характеризует скорость преобразования энергии источника питания в энергию магнитного поля цепи, на что указывает числитель последней части формулы (9.17), выражающий приращение энергии магнитного поля за время  $dt$ .

Цепь с индуктивностью в течение первой и третьей четвертей периода работает в режиме потребителя, запасая энергию  $W_{Lmax}$ , а в течение второй и четвертой четвертей — в режиме генератора, возвращая обратно запасенную ею энергию  $W_{Lmax}$ . Таким образом, энергия, полученная цепью с индуктивностью за каждую половину периода, равна нулю; следовательно, равна нулю и средняя мощность цепи. В рассматриваемой цепи происходит только периодический обмен энергией между источником питания и магнитным полем цепи без необратимого преобразования электрической энергии, например, в тепловую, механическую или химическую.

Энергию, которой обмениваются источник питания и цепь с индуктивным сопротивлением, характеризуют максимальным значением мгновенной мощности цепи и называют ее реактивной индуктивной мощностью.

Реактивная мощность цепи с индуктивностью

$$Q_L = UI = \omega LI^2 = \omega W_{Lmax} \quad (9.18)$$

Единица реактивной мощности та же, что и активной, — ватт, но для внесения большей ясности в вопрос о том, о какой мощности идет речь, единицу реактивной мощности называют вольт-ампер реактивный (вар); более крупная единица 1 киловольт-ампер реактивный (квар) =  $10^3$  вар.

**Пример 9.1.** Катушка с индуктивностью  $L=25,4$  мГн и малым активным сопротивлением, которым можно пренебречь, включена в сеть с напряжением  $U=220$  В и частотой  $f=50$  Гц. Определить: 1) индуктивное сопротивление катушки, 2) ток в катушке, 3) реактивную мощность катушки, 4) максимальную энергию, запасаемую в магнитном поле катушки.

**Решение.** 1) Индуктивное сопротивление катушки

$$x_L = \omega L = 2\pi \cdot 50 \cdot 25,4 \cdot 10^{-3} = 8 \text{ Ом.}$$

2) Ток в катушке

$$I = U/x_L = 220/8 = 27,5 \text{ А.}$$

3) Реактивная мощность

$$Q_L = UI = 220 \cdot 27,5 = 6050 \text{ вар} = 6,050 \text{ квар.}$$

4) Максимальная энергия магнитного поля

$$W_{Lmax} = LI_m^2/2 = 25,4 \cdot 10^{-3} (25,7 \sqrt{2})^2/2 = 19,2 \text{ Дж.}$$

#### 9.4. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ И ЭФФЕКТ БЛИЗОСТИ

Сопротивление проводника постоянному току, которое в отличие от его сопротивления  $r$  в цепи переменного тока обозначим  $r_0$ , определяется по (1.21).

То же сопротивление можно определить, воспользовавшись формулой мощности (1.45):

$$r_0 = P_c/I_0^2 \quad (9.19)$$

Включив в цепь переменного тока проводник, обладающий в цепи постоянного тока сопротивлением  $r_0$ , и измерив ток  $I$  и мощность  $P$ , можем обнаружить, что его сопротив-

ление

$$r = P/I^2 > r_0.$$

Таким образом, сопротивление проводника в цепи переменного тока или активное сопротивление больше сопротивления проводника постоянному току.

Увеличение сопротивления проводника при переменном токе вызвано неодинаковой плотностью тока по сечению проводника, например, для проводника цилиндрического сечения различной плотностью тока в слоях, находящихся на разных расстояниях от оси. В поверхностных слоях проводника плотность тока больше, чем при постоянном токе, а в центральной части меньше. При достаточно высокой частоте неравномерность проявляется особенно резко, так что плотность тока в центральной части сечения проводника практически равна нулю и ток проходит только в поверхностном слое (заштрихованный крестом слой на рис. 9.7, а),

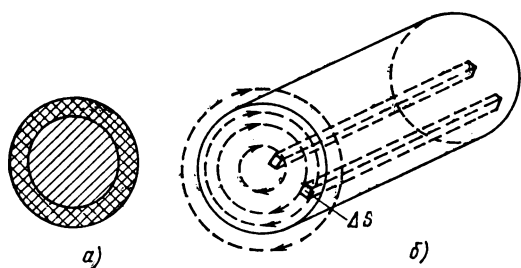


Рис. 9.7. Поверхностный эффект:

а — ток в поверхностном слое; б — магнитное поле цилиндрического провода с током

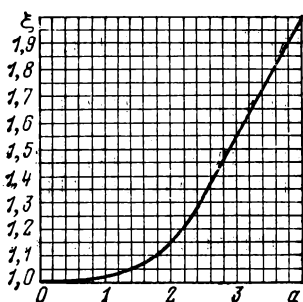


Рис. 9.8. График для определения коэффициента поверхностного эффекта

толщина которого уменьшается с повышением частоты. Поэтому рассмотренное явление получило название **поверхностного эффекта**. Поверхностный эффект вызывает

по существу уменьшение сечения проводника, по которому проходит ток, что и приводит к увеличению его сопротивления.

Для объяснения поверхностного эффекта рассмотрим цилиндрический провод (рис. 9.7, б), который можно представить состоящим из большого числа элементарных проводников одинакового сечения  $\Delta S$ , прилегающих вплотную друг к другу и расположенных концентрическими слоями. Сопротивление каждого из элементарных проводников постоянному току ( $\rho l / \Delta S$ ) одинаково, поэтому и плотность постоянного тока в них также одинакова. Переменный ток возбуждает и внутри проводника, и вне его переменное магнитное поле (рис. 5.18 и 9.7). Элементарные проводники, расположенные у оси провода, сцепляются с наибольшим магнитным потоком (внутренним и внешним), а такие же проводники, расположенные в поверхностном слое, сцепляются с наименьшим потоком (только внешним). Поэтому первые обладают большим индуктивным сопротивлением, чем вторые, и соответственно ток в первых будет меньше, чем во вторых, т. е. плотность тока уменьшается от периферии к оси провода. Разница в плотностях тока у оси и на периферии провода возрастает с увеличением диаметра провода  $d$ , проводимости материала  $\gamma = 1/\rho$ , магнитной проницаемости материала провода  $\mu_r$  и частоты переменного тока  $f$ .

Отношение активного сопротивления провода  $r$  к его сопротивлению при постоянном токе  $r_0$  называется коэффициентом поверхностного эффекта:

$$\xi = r/r_0. \quad (9.20)$$

Коэффициент  $\xi$  (кси) определяют по таблицам или графикам. На рис. 9.8 дана зависимость коэффициента  $\xi$  от произведения  $a = d\sqrt{\gamma\mu_0\mu_r f}$ , в котором  $d$  выражается в см,  $\gamma$  — в См/см,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9}$  Гн/см и  $f$  — в Гц.

Влияние токов, проходящих по соседним проводам, также приводит к различной плотности тока в проводах; это явление называется эффектом близости.

Если токи в двух параллельных проводах направлены одинаково (рис. 9.9, а), то элементарные проводники, принадлежащие разным проводам и наиболее удаленные друг от друга, сцепляются с наименьшим магнитным потоком и поэтому имеют наибольшую плотность тока (заштрихованы крестом на рис. 9.9, а). Если токи в двух параллельных проводах направлены противоположно друг другу



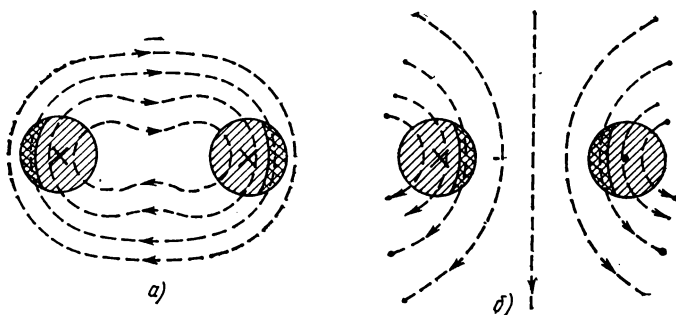


Рис. 9.9. Эффект близости

(рис. 9.9, б), то наибольшая плотность тока наблюдается у наиболее сближенных элементарных проводников (принадлежащих разным проводам), которые сцеплены с наименьшим магнитным потоком. Таким образом, эффект близости определяется дополнительными ЭДС взаимной индукции, наводимыми в элементарных проводниках.

## 9.5. ЦЕПЬ С ЕМКОСТНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

**а) Напряжение, ток, сопротивление.** Если цепь, обладающая только емкостью (рис. 9.10), например конденсатор без потерь или емкостный элемент, находится под переменным напряжением, то заряд изменяется пропорционально напряжению ( $q = Cu$ ) и, следовательно, в цепи будет проходить переменный ток.

При синусоидальном напряжении на выводах цепи

$$u = U_{\max} \sin \omega t, \quad (9.21)$$

ток в цепи, равный скорости изменения заряда,

$$\begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu)}{dt} = C \frac{du}{dt} = C \frac{d(U_m \sin \omega t)}{dt} = \\ &= C\omega U_m \cos \omega t = I_m \sin(\omega t + \pi/2). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Из (9.22) следует, что ток опережает по фазе напряжения на выводах цепи на угол  $\pi/2$ , или на  $1/4$  периода, а амплитуда его

$$I_m = \omega C U_m. \quad (9.23)$$

На рис. 9.11 построены зависимости тока и напряжения

от времени, соответствующие (9.21) и (9.22), а на рис. 9.12 — векторная диаграмма цепи с емкостью.

В течение первой четверти периода напряжение в цепи положительно и изменяется от нуля до амплитудного значения  $U_m$ , пропорционально напряжению изменяется и заряд конденсатора, который заряжается, причем на левой обкладке (рис. 9.10) накапливается положительный заряд,

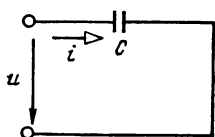


Рис. 9.10. Цепь с емкостным элементом

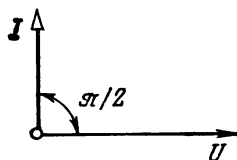


Рис. 9.12. Векторная диаграмма цепи с емкостным элементом

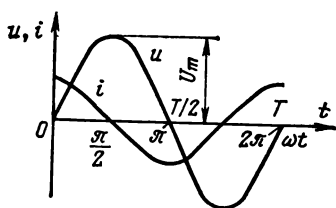


Рис. 9.11. Ток и напряжение в цепи с емкостным элементом

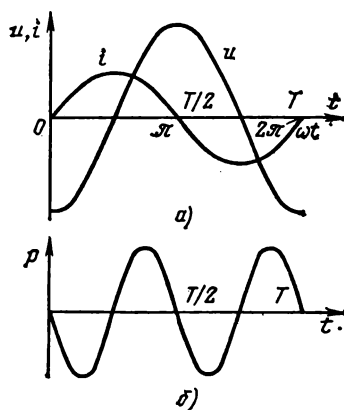


Рис. 9.13. Ток, напряжение (а) и мощность (б) цепи с емкостным элементом

а на правой — отрицательный. Скорость изменения напряжения, максимальная в начале, в конце первой четверти периода становится равной нулю. Ток в цепи, пропорциональный скорости увеличения напряжения (9.22), положителен и изменяется от  $I_m$  до нуля. В течение второй четверти напряжение уменьшается от  $U_m$  до нуля; пропорционально напряжению уменьшается заряд конденсатора, т. е. конденсатор разряжается. В начале этой четверти периода скорость уменьшения напряжения равна нулю, а в конце — максимальна, поэтому ток в цепи отрицателен, т. е.

его направление обратно показанному на рис. 9.10, и он изменяется от нуля до  $-I_m$ .

В течение третьей и четвертой четвертей периода происходит сначала зарядка, но на обкладках накапливаются заряды обратного знака, а затем — разрядка конденсатора.

Разделив обе части уравнения (9.23) на  $\sqrt{2}$ , получим

$$I_m/\sqrt{2} = \omega C U_m/\sqrt{2} \text{ или } I = \omega C U = \frac{U}{1/\omega C} = \frac{U}{x_C}, \quad (9.24)$$

т. е. закон Ома для цепи с емкостью.

Величина

$$x_C = 1/\omega C = 1/(2\pi fC) \quad (9.25)$$

представляет собой емкостное сопротивление. Оно измеряется в омах:

$$\begin{aligned} [x_C] &= \left[ \frac{1}{\omega C} \right] = 1 / \left( \frac{1}{c} \Phi \right) = 1 / \left( \frac{1}{c} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{В}} \right) = \\ &= \frac{1}{\text{А/В}} = \text{В/А} = \text{Ом}. \end{aligned}$$

Емкостное сопротивление изменяется обратно пропорционально частоте  $f$  и емкости  $C$ . Уменьшение частоты вызывает увеличение емкостного сопротивления, так что при постоянном напряжении (при  $f=0$ ) емкостное сопротивление  $x_C = \infty$  и постоянный ток через емкостный элемент не проходит.

*Для цепи с емкостью закон Ома применим только для амплитудных и действующих значений тока и напряжения и не может применяться для мгновенных значений, так как  $i \neq u/x_C$ .*

Если начальная фаза напряжения на емкости выбрана равной нулю, т. е.  $u = U_m \sin \omega t$ , то ток в цепи по (9.22)  $i = I_m \sin(\omega t + \pi/2)$ .

Если начальную фазу напряжения выбрать равной  $-\pi/2$  (рис. 9.13, а):

$$u = U_m \sin(\omega t - \pi/2) = -U_m \cos \omega t, \quad (9.26)$$

т. е. за начало отсчета времени принять момент, когда напряжение проходит через отрицательное амплитудное значение, то ток в цепи с емкостью

$$i = C du/dt = C \omega U_m \sin \omega t = I_m \sin \omega t. \quad (9.27)$$

Из (9.27) следует, что ток опять опережает по фазе на-

пряжение на угол  $\pi/2$ , но в начальный момент отсчета времени проходит через нулевое значение.

**б) Мощность цепи.** Мгновенная мощность цепи с емкостью определяется произведением мгновенных значений напряжения и тока.

Если напряжение на выводах цепи равно  $u = U_m \sin(\omega t - \pi/2)$ , а ток в цепи  $i = I_m \sin \omega t$ , то мгновенная мощность

$$p = ui = U_m \sin(\omega t - \pi/2) \cdot I_m \sin \omega t = UI \cos(-\pi/2) - UI \cos(2\omega t - \pi/2) = -UI \sin 2\omega t.$$

Зависимость мгновенной мощности от времени построена на рис. 9.13, б.

Из приведенных уравнений и графиков видно, что мгновенная мощность цепи изменяется с двойной частотой, 2 раза в течение периода достигая положительного максимума  $UI = \omega CU^2$  и 2 раза такого же отрицательного максимума.

В течение первой четверти периода мгновенная мощность отрицательна, так как напряжение цепи от отрицательного максимума ( $-U_m$ ) уменьшается до нуля, конденсатор разряжается, максимальная энергия электрического поля конденсатора  $W_{C \max} = CU_m^2/2 = CU^2$  уменьшается до нуля, т. е. энергия возвращается источнику питания.

В течение второй четверти периода мгновенная мощность положительна, напряжение от нуля увеличивается до  $U_m$ , конденсатор заряжается, в его электрическом поле запасается энергия, получаемая от источника питания и возрастающая от нуля до наибольшего значения  $W_{C \max}$ .

В течение третьей и четвертой четвертей периода явления повторяются с той лишь разницей, что действительное направление тока противоположно направлению тока в первый полупериод.

Таким образом, мгновенная мощность цепи с емкостью

$$p = ui = u \frac{d(Cu)}{dt} = \frac{Cudu}{dt} \quad (9.28)$$

характеризует скорость преобразования энергии источника питания в энергию электрического поля, на что указывает числитель последней части формулы (9.28), выражающий приращение энергии электрического поля за время  $dt$ .

Энергия, полученная цепью с емкостью за каждый полупериод, равна нулю; равна нулю и средняя мощность цепи. В этой цепи происходит только периодический обмен энергией между источником питания и конденсатором.

Энергию, которой обмениваются источник питания и конденсатор, характеризуют максимальным значением мгновенной мощности этой цепи и называют реактивной емкостной мощностью:

$$Q_C = UI = \omega CU^2 = \omega W_{Cmax}. \quad (9.29)$$

## 9.6. ЦЕПЬ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ И ИНДУКТИВНОСТЬЮ

а) **Напряжение, ток, сопротивление.** Если цепь, обладающая сопротивлением  $r$  и индуктивностью  $L$  и называемая коротче  $rL$ -цепью (рис. 9.14), находится под переменным на-

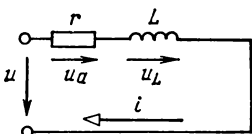


Рис. 9.14. Эквивалентная схема цепи с сопротивлением и индуктивностью

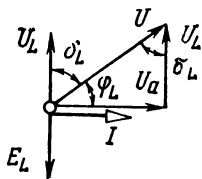


Рис. 9.16. Векторная диаграмма цепи с сопротивлением и индуктивностью

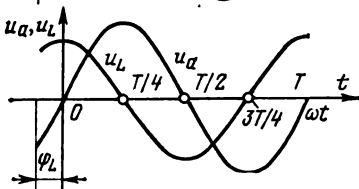
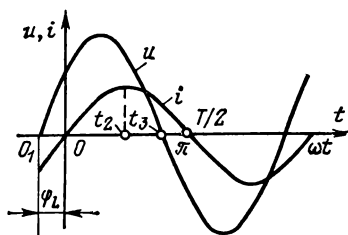


Рис. 9.15 Напряжение и ток цепи с сопротивлением и индуктивностью

пряжением, то, как показано выше (§ 7.6), в любой момент времени это напряжение состоит из двух слагаемых (7.236):

$$u = ri + Ldi/dt = u_a + u_L. \quad (9.30)$$

Первое из них  $u_a = ri$  называется активной составляющей, а второе  $u_L = Ldi/dt = -e_L$  индуктивной составляющей напряжения.

Необходимо отметить, что рассматриваемая цепь (с  $L$  и  $r$ ) в большинстве случаев представляет собой последовательную схему замещения катушки какой-либо электрической машины, аппарата или прибора и что в катушке нет

таких точек, между которыми действовало бы напряжение  $u_a$  или  $u_L$ . Физической величиной является напряжение на выводах катушки, равное сумме составляющих  $u_a + u_L$ . Деление физической величины на составляющие представляет собой удобный вычислительный прием, вытекающий из (9.30). Из того же уравнения следует, что явления, происходящие в катушке, те же, что и в цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов с сопротивлением  $r$  и индуктивностью  $L$  (рис. 9.14). Таким образом, последнюю и можно считать последовательной схемой замещения катушки.

Если в рассматриваемой цепи проходит синусоидальный ток

$$i = I_m \sin \omega t,$$

то активная составляющая напряжения

$$u_a = r i = r I_m \sin \omega t = U_{am} \sin \omega t,$$

а индуктивная составляющая

$$\begin{aligned} u_L &= L \frac{di}{dt} = L \frac{d(I_m \sin \omega t)}{dt} = L \omega I_m \cos \omega t = \\ &= U_{Lm} \sin(\omega t + \pi/2). \end{aligned}$$

Обе составляющие напряжения изменяются синусоидально. Первая из них  $u_a$  совпадает по фазе с током, а вторая  $u_L$  опережает его на  $\pi/2$ , или на  $1/4$  периода (рис. 9.15 и 9.16). Амплитудные значения этих составляющих  $U_{am} = r I_m$  и  $U_{Lm} = \omega L I_m$ , а их действующие значения  $U_a = r I$  и  $U_L = \omega L I$ .

Сумма слагаемых

$$\begin{aligned} u &= u_a + u_L = U_{am} \sin \omega t + U_{Lm} \sin(\omega t + \pi/2) = \\ &= U_m \sin(\omega t + \varphi_L) \end{aligned} \quad (9.31)$$

выражает мгновенное значение синусоидального напряжения на выводах цепи, опережающего по фазе ток на угол  $\varphi_L$  (рис. 9.15 и 9.16).

Амплитуда этого напряжения аналогично (8.11):

$$U_m = \sqrt{U_{am}^2 + U_{Lm}^2},$$

а действующее значение

$$U = U_m / \sqrt{2} = \sqrt{(U_{am}/\sqrt{2})^2 + (U_{Lm}/\sqrt{2})^2} = \sqrt{U_a^2 + U_L^2}. \quad (9.32)$$

Таким образом, напряжения  $U$ ,  $U_a$  и  $U_L$  связаны между собой таким же соотношением, как и стороны прямоугольного треугольника напряжений (рис. 9.16), катеты которого изображают напряжения  $U_a$  и  $U_L$ , а гипотенуза — напряжение  $U$  на выводах цепи.

Угол сдвига фаз между напряжением и током можно определить из векторной диаграммы (рис. 9.16) по одной из формул

$$\cos \varphi_L = U_a/U; \quad \sin \varphi_L = U_L/U \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \varphi_L = U_L/U_a. \quad (9.33)$$

Сдвиг по фазе тока  $i$  относительно напряжения  $u$  вызывается ЭДС самоиндукции  $e_L$ , которая отстает по фазе от тока на  $1/4$  периода, а индуктивная составляющая напряжения  $u_L$ , равная ей по значению и противоположная по фазе, опережает ток на  $1/4$  периода, или на  $\pi/2$  (рис. 9.15 и 9.16). Чем больше индуктивная составляющая напряжения по сравнению с активной, тем больше угол отставания тока  $i$  от напряжения цепи  $u$ .

Выражая в (9.32) составляющие напряжения через произведения сопротивлений и тока, получаем

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_a^2 + U_L^2} = \sqrt{(rI)^2 + (\omega LI)^2} = \\ &= I \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = Iz, \end{aligned} \quad (9.34)$$

откуда ток в цепи

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} = \frac{U}{z}. \quad (9.35)$$

Полученная формула выражает закон Ома для действующих значений цепи с активным сопротивлением и индуктивностью.

Величина

$$z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} \quad (9.36)$$

называется полным сопротивлением  $rL$ -цепи и измеряется в омах.

Графически полное сопротивление  $z$  изображают гипотенузой прямоугольного треугольника сопротивлений (рис. 9.17), а сопротивления  $r$  и  $\omega L = x_L$  — его катетами в соответствии с выражением (9.36). Треугольник сопротивлений можно получить уменьшив в  $I$  раз стороны треугольника напряжений.

Угол между сторонами треугольника  $z$  и  $r$  равен углу  $\varphi_L$  между векторами напряжения  $U$  и тока  $I$ , так как

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi_L &= U_a/U = r/zI = r/z; \\ \sin \varphi_L &= U_L/U = x_L/z; \\ \operatorname{tg} \varphi_L &= U_L/U_a = x_L/r. \end{aligned} \right\} \quad (9.37)$$

Мгновенное значение тока  $i \neq u/z$ ; поэтому закон Ома не может применяться для мгновенных значений тока и напряжения.

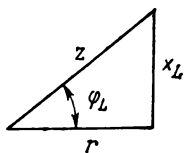


Рис. 9.17. Треугольник сопротивлений цепи с сопротивлением и индуктивностью

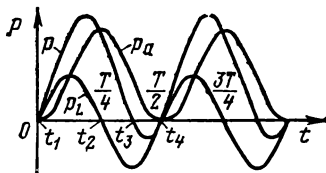


Рис. 9.18. Мощность цепи с сопротивлением и индуктивностью

В рассмотренном случае было принято, что ток в цепи  $i = I_m \sin \omega t$  имеет нулевую начальную фазу (рис. 9.15), а напряжение на выводах цепи

$$u = zI_m \sin(\omega t + \varphi_L) = U_m \sin(\omega t + \varphi_L)$$

опережает по фазе ток на угол  $\varphi_L$ , или, что то же, ток отстает от напряжения по фазе на угол  $\varphi_L$ .

Если напряжение на выводах цепи выбрать с нулевой начальной фазой, т. е. принять, что  $u = U_m \sin \omega t$ , и, следовательно, начало отсчета времени — совпадающим с началом периода напряжения ( $O_1$  на рис. 9.15), то ток в цепи

$$i = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t - \varphi_L) = I_m \sin(\omega t - \varphi_L),$$

т. е. ток по-прежнему отстает по фазе от напряжения на угол  $\varphi_L$ , или, что то же, напряжение опережает ток на тот же угол  $\varphi_L < \pi/2$ .

б) **Мощность цепи.** В цепи с сопротивлением и индук-



тивностью мгновенная мощность

$$p = ui = U_m \sin(\omega t + \varphi_L) \cdot I_m \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \cos - \\ - \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \varphi_L) = UI \cos \varphi_L - UI \cos(2\omega t + \varphi_L). \quad (9.38)$$

Зависимость мгновенной мощности  $p$  от времени построена на рис. 9.18. Из написанного следует, что мгновенная мощность  $rL$ -цепи состоит из двух слагаемых: постоянной мощности  $UI \cos \varphi_L$  и переменной  $UI \cos(2\omega t + \varphi_L)$ , изменяющейся по простому гармоническому закону с двойной частотой.

Среднее за период значение переменной слагающей мощности или косинусоидальной функции, как и синусоидальной, равно нулю. Поэтому средняя за период или активная мощность цепи равна постоянной слагающей мгновенной мощности:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = UI \cos \varphi_L. \quad (9.39)$$

Итак, активная мощность цепи равна произведению действующих значений напряжения, тока и  $\cos \varphi_L$ .

Множитель  $\cos \varphi_L$  называется коэффициентом мощности, так как при неизменных значениях напряжения и тока в цепи мощность ее изменяется в зависимости от  $\cos \varphi_L$  от нуля при  $\varphi_L = \pi/2$  до наибольшего значения  $P = UI$  при  $\varphi_L = 0$ .

Мгновенную мощность цепи с сопротивлением и индуктивностью можно представить еще и в виде суммы мощностей в двух элементах схемы замещения цепи (рис. 9.14):

$$p = ui = u_a i + u_L i = p_a + p_L. \quad (9.40)$$

Мгновенная мощность в резистивном элементе [см. (9.7) и (9.8)]

$$p_a = ri^2 = u_a i = U_{am} \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = \\ = 2U_a I \sin^2 \omega t = U_a I - U_a I \cos 2\omega t. \quad (9.41)$$

Она, как показано в § 9.2, б, характеризует скорость необратимого процесса преобразования электрической энергии в какой-либо другой вид энергии, например в тепловую.

Мгновенная мощность в резистивном элементе (9.41)

состоит из постоянной  $U_a I$  и переменной  $U_a I \cos 2\omega t$  составляющих. Постоянная составляющая выражает среднюю за период мощность или активную мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_a dt = U_a I = r I^2. \quad (9.42)$$

Так как  $U_a = U \cos \varphi_L$ , то  $P = UI \cos \varphi_L$ , т. е. представляет собой активную мощность всей цепи с параметрами  $r$  и  $L$ .

Мгновенная мощность в индуктивном элементе

$$p_L = u_L i = U_{Lm} \sin(\omega t + \pi/2) \cdot I_m \sin \omega t = U_L I \sin 2\omega t. \quad (9.43)$$

Она изменяется с двойной частотой, 2 раза в течение периода достигая положительного максимума  $U_L I = \omega L I^2$  и 2 раза такого же отрицательного максимума (рис. 9.18).

Реактивная индуктивная мощность цепи является мерой обменной энергии между источником питания и цепью

$$Q_L = U_L I = UI \sin \varphi_L = \omega L I^2 = x_L I^2. \quad (9.44)$$

В интервале времени от  $t_1=0$  до  $t_2=T/4$ , когда  $i>0$ ,  $u>0$ ,  $u_a>0$ ,  $u_L>0$  (рис. 9.15), мгновенная мощность цепи  $p$  и ее составляющие  $p_a$  и  $p_L$  положительны (рис. 9.18); следовательно, энергия, получаемая цепью от источника питания, частично преобразуется в тепловую и частично запасается в магнитном поле. В течение времени от  $t_2=T/4$  до  $t_3$ , когда  $i>0$ ,  $u>0$ ,  $u_a>0$ , но  $u_L<0$ , мощности  $p$  и  $p_a$  положительны, а  $p_L$  отрицательна, при этом  $p_a>p$ , таким образом, тепловая энергия частично получается от источника питания, а частично из магнитного поля. В промежутке времени от  $t_3$  до  $t_4=T/2$ , когда  $i>0$ ,  $u<0$  и  $u_L<0$ , мощности  $p$  и  $p_L$  отрицательны, причем  $p_L$  по абсолютному значению больше  $p_a$ . Это означает, что энергия магнитного поля частично превращается в тепловую, частично возвращается источнику питания. В следующую половину периода процессы повторяются при обратном направлении тока.

Размеры, масса и стоимость электрических генераторов, трансформаторов и других электротехнических устройств определяются произведением номинальных действующих значений напряжения и тока, т. е. значений, на которые они рассчитаны. Произведение действующих значений напряжения и тока называется **полной мощностью**:

$$S = UI. \quad (9.45)$$

Активная, реактивная и полная мощности графически

изображаются сторонами прямоугольного треугольника мощностей (рис. 9.19), так как эти мощности связаны соотношением

$$P^2 + Q_L^2 = S^2 \text{ или } (UI \cos \varphi_L)^2 + (UI \sin \varphi_L)^2 = (UI)^2. \quad (9.46)$$

Треугольник мощностей можно получить из треугольника напряжений, умножив на ток  $I$  все его стороны. Из тре-

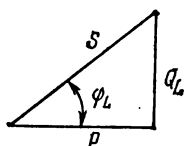


Рис. 9.19. Треугольник мощностей цепи с сопротивлением и индуктивностью

угольника мощностей можно определить коэффициент мощности

$$\cos \varphi_L = P/S. \quad (9.47)$$

Единица полной мощности называется вольт-ампер (В·А); более крупная единица 1 киловольт-ампер (кВ·А) = =  $10^3$  В·А. Применение различных названий единиц мощности — активной (ватт), реактивной (вар) и полной (вольт-ампер) — позволяет по единице измерения определить, какая рассматривается мощность: активная, реактивная или полная.

в) **Угол потерь и параметры.** Разность  $\pi/2 - \varphi_L = \delta_L$  называется углом потерь и является одним из параметров катушки индуктивности. Из рис. 9.16 следует, что

$$\operatorname{tg} \delta_L = \frac{U_a}{U_L} = \frac{rI}{\omega LI} = \frac{r}{x_L}, \quad (9.48)$$

откуда

$$r = x_L \operatorname{tg} \delta_L = \omega L \operatorname{tg} \delta_L.$$

Активная мощность катушки по (9.39)

$$P = UI \cos \varphi_L = rI^2 = I^2 \omega L \operatorname{tg} \delta_L.$$

Измерив напряжение, ток и активную мощность, можно определить параметры последовательной схемы замещения (рис. 9.14):

$$z = U/I; \quad r = P/I^2; \quad x_L = \omega L = \sqrt{z^2 - r^2}.$$

**Пример 9.2.** Катушка с индуктивностью  $L=51$  мГн и сопротивле-

нием  $r=12$  Ом включена в сеть с напряжением  $U=250$  В и частотой  $f=50$  Гц. Определить: 1) индуктивное сопротивление катушки, 2) полное сопротивление катушки, 3) ток в катушке, 4) активную мощность катушки, 5) реактивную мощность катушки, 6) полную мощность катушки, 7) наибольшую энергию, запасаемую в магнитном поле катушки.

**Решение.**

$$1) x_L = \omega L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,051 = 16 \text{ Ом};$$

$$2) z = \sqrt{r^2 + x_L^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ Ом};$$

$$3) I = U/z = 250/20 = 12,5 \text{ А};$$

$$4) P = U_a I = rI^2 = 12 \cdot 12,5^2 = 1875 \text{ Вт};$$

$$5) \text{ по (9.37) } \sin \varphi_L = x_L / r = 16/20 = 0,8$$

$$\text{и } Q_L = UI \sin \varphi_L = 250 \cdot 12,5 \cdot 0,8 = 2500 \text{ вар};$$

$$6) S = UI = 250 \cdot 12,5 = 3125 \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$7) W_{Lmax} = LI_m^2/2 = LI^2 = 0,051 \cdot 12,5^2 = 7,97 \text{ Дж}.$$

## 9.7. ЦЕПЬ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ И ЕМКОСТЬЮ

**а) Напряжение, ток, сопротивление.** Если в цепи с активным сопротивлением  $r$  и емкостью  $C$ , или, короче,  $rC$ -цепи (рис. 9.20), проходит синусоидальный ток  $i = I_m \times \sin \omega t$ , то напряжение на сопротивлении

$$u_a = ri = rI_m \sin \omega t = U_{am} \sin \omega t,$$

а напряжение на емкости

$$u_c = x_C I_m \sin (\omega t - \pi/2) = U_{cm} \sin (\omega t - \pi/2).$$

Оба напряжения изменяются синусоидально. Первое из них совпадает по фазе с током, а второе отстает от него на  $\pi/2$ , или на  $1/4$  периода (рис. 9.21, а, б и 9.22). Амплитуды этих напряжений  $U_{am} = rI_m$  и  $U_{cm} = 1/\omega C \cdot I_m = x_C I_m$ , а действующие значения  $U_a = rI$  и  $U_c = 1/\omega C \cdot I = x_C I$ .

**Сумма напряжений**

$$\begin{aligned} u &= u_a + u_c = U_{am} \sin \omega t + U_{cm} \sin (\omega t - \pi/2) = \\ &= U_m \sin (\omega t - \varphi_c) \end{aligned}$$

выражает мгновенное значение напряжения на выводах цепи. Оно отстает по фазе от тока на угол  $\varphi_c$ , или, что то же, ток опережает напряжение на угол  $\varphi_c$  (рис. 9.21, а

и 9.22). Амплитуда этого напряжения

$$U_m = \sqrt{U_{am}^2 + U_{cm}^2},$$

а действующее значение

$$U = U_m / \sqrt{2} = \sqrt{(U_{am} / \sqrt{2})^2 + (U_{cm} / \sqrt{2})^2} = \sqrt{U_a^2 + U_c^2}. \quad (9.49)$$

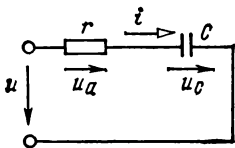


Рис. 9.20. Цепь с сопротивлением и емкостью

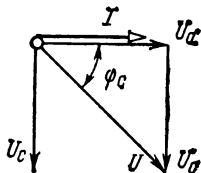


Рис. 9.22. Векторная диаграмма цепи с сопротивлением и емкостью

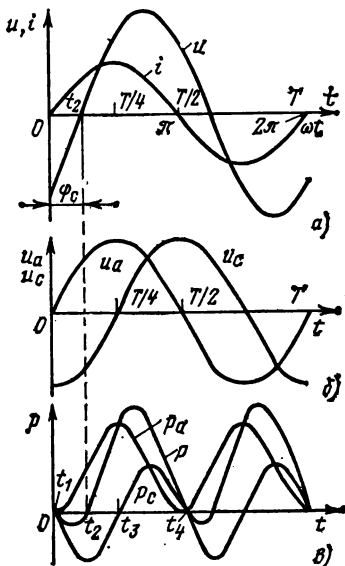


Рис. 9.21. Ток, напряжение (а, б) и мощность (в) цепи с сопротивлением и емкостью

Если напряжение на выводах цепи выбрать с нулевой начальной фазой  $u = U_m \sin \omega t$ , то ток в цепи  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_c)$ , т. е., естественно, опережает по фазе напряжение на тот же угол  $\varphi_c$ .

Подставив в (9.49) вместо  $U_a$  и  $U_c$  их выражения через ток и сопротивления, найдем, что

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_c^2} = \sqrt{(rI)^2 + (x_c I)^2} = I \sqrt{r^2 + x_c^2} = Iz,$$

откуда получим закон Ома для действующих значений

$rC$ -цепи:

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x_C^2}} = \frac{U}{z}. \quad (9.50)$$

Величина

$$z = \sqrt{r^2 + x_C^2} = \sqrt{r^2 + (1/\omega C)^2} \quad (9.51)$$

называется полным сопротивлением  $rC$ -цепи и измеряется в омах.

Сопротивления  $r$ ,  $x_C$ ,  $z$  графически изображают сторонами прямоугольного треугольника сопротивлений, катетами которого являются сопротивления  $r$  и  $x_C$ , а гипотенузой — полное сопротивление  $z$  (рис. 9.23). Треугольник со-

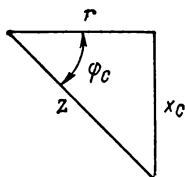


Рис. 9.23. Треугольник сопротивлений цепи с сопротивлением и емкостью

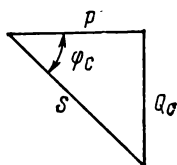


Рис. 9.24. Треугольник мощностей цепи с сопротивлением и емкостью

противлений можно получить из треугольника напряжений (рис. 9.22), уменьшив все стороны в  $I$  раз.

Из треугольника напряжения и из треугольника сопротивлений можно определить угол сдвига фаз между напряжением и током цепи, так как

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi_C &= U_a/U = rI/zI = r/z; \\ \sin \varphi_C &= U_C/U = x_C/z; \\ \operatorname{tg} \varphi_C &= U_C/U_a = x_C/r. \end{aligned} \right\} \quad (9.52)$$

Следует обратить внимание на то, что вектор напряжения на емкости повернут относительно вектора активного напряжения на  $90^\circ$  в обратную сторону вращения векторов, а вектор напряжения на индуктивности на  $90^\circ$  в направлении их вращения (рис. 9.22 и 9.16). Соответственно в треугольниках сопротивлений (рис. 9.23 и 9.17) емкост-

ное сопротивление  $x_c$  повернуто относительно сопротивления  $r$  на  $90^\circ$  в сторону, обратную направлению вращения векторов, а индуктивное сопротивление  $x_L$  — на  $90^\circ$  в сторону их вращения.

б) **Мощность цепи.** В  $rC$ -цепи мгновенная мощность

$$p = ui = U_m \sin(\omega t - \varphi_C) I_m \sin \omega t = UI \cos \varphi_C - UI \cos(2\omega t - \varphi_C). \quad (9.53)$$

Зависимость мгновенной мощности от времени построена на рис. 9.21, в.

Мощность  $rC$ -цепи можно представить еще и в виде суммы мощностей двух элементов схемы замещения цепи (рис. 9.20):

$$p = ui = u_a i + u_c i = p_a + p_c. \quad (9.54)$$

Мгновенная мощность в резистивном элементе  $p_a = u_a i = 2U_a I \sin^2 \omega t$  и мгновенная мощность в емкостном элементе  $p_c = u_c i = -U_c I \sin 2\omega t$  уже рассмотрены выше, первая из них — в § 9.2, б и 9.6, б, а вторая — в § 9.5, б.

Средняя за период или активная мощность  $rC$ -цепи

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt = UI \cos \varphi_C.$$

Реактивная емкостная мощность рассматриваемой цепи, характеризующая обмен энергией между источником питания и электрическим полем цепи,

$$Q_C = \omega C U_C^2 = U_C I \sin \varphi_C.$$

Наконец, полная мощность цепи

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Мощности  $P$ ,  $Q_C$  и  $S$  образуют стороны треугольника мощностей (рис. 9.24).

Коэффициент мощности

$$\cos \varphi_C = P/S.$$

**Пример 9.3.** Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора емкостью  $C=80$  мкФ и реостата с сопротивлением  $r=30$  Ом, находится под напряжением  $U=120$  В с частотой  $f=50$  Гц. Определить следующие величины: 1)  $x_c$ , 2)  $z$ , 3)  $I$ , 4)  $U_a$ , 5)  $U_c$ , 6)  $\varphi_c$ , 7)  $P$ , 8)  $Q_c$ , 9)  $S$ .

Решение.

$$1) x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{10^6}{2\pi 50 \cdot 80} = 40 \text{ Ом};$$

$$2) z = \sqrt{r^2 + x_C^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ Ом};$$

$$3) I = U/z = 120/50 = 2,4 \text{ А};$$

$$4) U_a = rI = 30 \cdot 2,4 = 72 \text{ В};$$

$$5) U_C = x_C I = 40 \cdot 2,4 = 96 \text{ В};$$

$$6) \cos \varphi_C = r/z = 30/50 = 0,6 \text{ и угол } \varphi_C = 53^\circ 10';$$

$$7) P = UI \cos \varphi_C = 120 \cdot 2,4 \cdot 0,6 = 172,8 \text{ Вт};$$

$$8) \sin \varphi_C = x_C/z = 40/50 = 0,8 \text{ и } Q_C = UI \sin \varphi_C = 120 \cdot 2,4 \cdot 0,8 = 230,4 \text{ вар};$$

$$9) S = UI = 120 \cdot 2,4 = 288 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

## 9.8. ПРОСТАЯ НЕРАЗВЕТВЛЕННАЯ ЦЕПЬ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

а) **Напряжение, ток, сопротивление.** Если в цепи с активным сопротивлением  $r$ , индуктивностью  $L$  и емкостью  $C$ , или, короче, в  $rLC$ -цепи (рис. 9.25), например в последовательно соединенных катушке индуктивности и конденсаторе, ток  $i = I_m \sin \omega t$ , то напряжение на сопротивлении  $u_a = U_{am} \sin \omega t$ , напряжение на индуктивности

$$u_L = U_{Lm} \sin (\omega t + \pi/2),$$

а напряжение на емкости

$$u_C = U_{Cm} \sin (\omega t - \pi/2).$$

Амплитуды этих напряжений

$$U_{am} = rI_m; \quad U_{Lm} = \omega L I_m = x_L I_m; \quad U_{Cm} = (1/\omega C) I_m = x_C I_m$$

и их действующие значения

$$U_a = rI; \quad U_L = \omega L I = x_L I \text{ и } U_C = (1/\omega C) I = x_C I.$$

Первое из этих напряжений совпадает по фазе с током, второе опережает по фазе ток на  $1/4$  периода, а третье отстает по фазе от тока на  $1/4$  периода.

На рис. 9.26, а и б построены зависимости тока и напряжений от времени, а на рис. 9.27 дана векторная диаграмма цепи при  $U_L > U_C$ , т. е.  $x_L > x_C$ .



Мгновенное значение напряжения на выводах рассматриваемой неразветвленной цепи равно сумме трех составляющих, активной, индуктивной и емкостной:

$$u = u_a + u_L + u_C = U_{Am} \sin \omega t + U_{Lm} \sin (\omega t + \pi/2) + U_{Cm} \sin (\omega t - \pi/2).$$

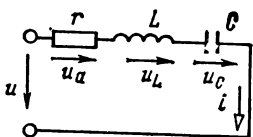


Рис. 9.25. Цепь с сопротивлением, индуктивностью и емкостью

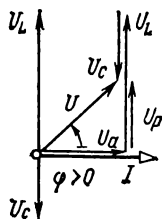


Рис. 9.27. Векторная диаграмма цепи с сопротивлением, индуктивностью и емкостью при  $x_L > x_C$ .

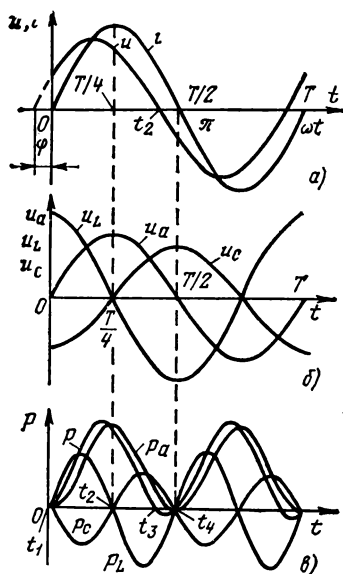


Рис. 9.26. Ток, напряжение (а, б) и мощность (в) цепи с сопротивлением, индуктивностью и емкостью

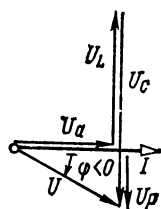


Рис. 9.28. Векторная диаграмма цепи с сопротивлением, индуктивностью и емкостью при  $x_L < x_C$

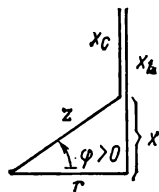


Рис. 9.29. Треугольник сопротивлений цепи с сопротивлением, индуктивностью и емкостью при  $x_L > x_C$

Напряжение на емкости изменяется в противофазе с напряжением на индуктивности, и их алгебраическая сумма называется реактивной составляющей напряжения:

$$\begin{aligned} u_p &= u_L + u_C = U_{Lm} \sin(\omega t + \pi/2) + U_{Cm} \sin(\omega t - \pi/2) = \\ &= |U_{Lm} - U_{Cm}| \sin(\omega t \pm \pi/2) = U_{pm} \sin(\omega t \pm \pi/2). \end{aligned}$$

Абсолютное значение разности амплитудных значений напряжений  $U_{Lm}$  и  $U_{Cm}$  равно амплитуде реактивной составляющей напряжения  $U_{pm}$ . Реактивная составляющая напряжения опережает по фазе активную на угол  $\pi/2$  при  $U_L > U_C$ , т. е.  $x_L > x_C$  (рис. 9.27) или отстает на угол  $\pi/2$  при  $U_L < U_C$ , т. е.  $x_L < x_C$  (рис. 9.28).

Напряжение на выводах цепи равно сумме активной и реактивной составляющих:

$$\begin{aligned} u &= u_a + u_p = U_{am} \sin \omega t + U_{pm} \sin(\omega t \pm \pi/2) = \\ &= U_m \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

действующее значение этого напряжения

$$U = \sqrt{U_a^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}. \quad (9.55)$$

График напряжения  $u$  для случая  $U_L > U_C$ , или, что то же,  $x_L > x_C$ , показан на рис. 9.26, а.

В дальнейшем реактивную составляющую  $U_p$  будем считать алгебраической величиной:  $U_p = U_L - U_C$ , так что  $U_p > 0$  при  $U_L > U_C$  и  $U_p < 0$  при  $U_L < U_C$ .

Заменим в (9.55) напряжения  $U_L$  и  $U_C$  их выражениями

$$U = \sqrt{(rI)^2 + (x_L I - x_C I)^2} = I \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = Iz, \quad (9.56)$$

где полное сопротивление  $rLC$ -цепи

$$z = \frac{U}{I} = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{r^2 + x^2}, \quad (9.57)$$

а  $x = x_L - x_C$  называется реактивным сопротивлением (алгебраическая величина в отличие от  $x_L = \omega L$  и  $x_C = 1/\omega C$ ).

Полное сопротивление  $z$  графически изображается гипотенузой прямоугольного треугольника сопротивлений (рис. 9.29, построенный при  $x_L > x_C$ ), одним катетом которого является активное сопротивление  $r$ , а другим модуль реактивного сопротивления цепи  $x = x_L - x_C$ . При неболь-

шой разнице между индуктивным и емкостным сопротивлениями каждое из них может быть значительно больше полного сопротивления цепи. Для цепи, в которой  $x_L > x_C$ , реактивное сопротивление положительно, для цепи, у которой  $x_L < x_C$ , реактивное сопротивление отрицательно.

Треугольник сопротивлений можно получить, уменьшив в  $I$  раз стороны треугольника напряжений.

б) **Угол сдвига фаз.** Угол сдвига фаз между напряжением и током равен углу между сторонами  $z$  и  $r$  треугольника сопротивлений и определяется через тангенс

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_p}{U_a} = \frac{U_L - U_C}{U_a} = \frac{x_L - x_C}{r} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{r} = \frac{x}{r} \quad (9.58a)$$

или синус

$$\sin \varphi = \frac{U_p}{U} = \frac{x}{z}. \quad (9.58b)$$

В отличие от  $\varphi_L$  и  $\varphi_C$  угол  $\varphi$  — алгебраическая величина. При  $x_L > x_C$  или при  $U_L > U_C$  (рис. 9.27 и 9.29) угол  $\varphi$  положителен; это значит, что напряжение на выходах цепи опережает по фазе ток на угол  $\varphi$  или ток отстает по фазе на угол  $\varphi$  от напряжения на выходах цепи (индуктивный режим цепи). При  $x_L = x_C$  или при  $U_L = U_C$  угол  $\varphi$  равен нулю, напряжение и ток в цепи совпадают по фазе; в цепи имеет место резонанс напряжений (см. гл. 11). Наконец, если  $x_L < x_C$  или  $U_L < U_C$  (рис. 9.28), угол  $\varphi$  отрицателен, напряжение отстает по фазе на угол  $|\varphi|$  или ток опережает по фазе на угол  $|\varphi|$  напряжение цепи (емкостный режим цепи).

*Будем далее всегда считать угол сдвига  $\varphi$ , представляющий собой разность начальных фаз напряжения и тока, алгебраической величиной и всегда откладывать на векторных диаграммах от вектора тока к вектору напряжения, как на рис. 9.27 и 9.28.*

Принимая при расчете всех неразветвленных цепей начальную фазу тока равной нулю или  $i = I_m \sin \omega t$ , получим для напряжения  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ . В частности, для  $rL$ -цепи ( $x = x_L$ ,  $x_C = 0$ ) или для  $rLC$ -цепи при положительном реактивном сопротивлении ( $x_L > x_C$  и  $x > 0$ ) угол сдвига фаз  $\varphi > 0$ , так как по (9.58)  $\operatorname{tg} \varphi = x/r > 0$  или  $\sin \varphi > 0$ . Для  $rC$ -цепи ( $x_L = 0$ ,  $x = -x_C$ ) или для  $rLC$ -цепи при отрицательном реактивном сопротивлении ( $x_C > x_L$  и  $x < 0$ ) угол сдвига фаз  $\varphi < 0$ , так как по (9.58)  $\operatorname{tg} \varphi = x/r < 0$  (рис. 9.28). Во всех случаях, как следует из

треугольников напряжений,

$$U_a = U \cos \varphi; \quad U_p = U \sin \varphi. \quad (9.59)$$

**в) Сопоставление напряжений.** Напряжения на индуктивности и на емкости изменяются в противофазе и частично или полностью компенсируют друг друга. Следовательно, напряжение на выводах цепи определяется значениями активного  $U_a$  и реактивного  $U_p = U_L - U_C$  напряжений. При небольшой разнице значений индуктивного и емкостного напряжений каждое из них может быть больше напряжения всей цепи. Например, при  $U_L = 6,2$  кВ,  $U_C = 7$  кВ,  $U_a = 0,6$  кВ получим  $U = 1$  кВ.

Напряжения на отдельных участках, значительно превышающие приложенное к цепи напряжение, могут представлять опасность для изоляции установки и обслуживающего персонала и поэтому в цепях электроустановок недопустимы.

Рассмотрим в качестве примера трансформатор  $Tp$ , соединенный с генератором  $G$  двумя двухжильными кабелями длиной  $l_1$  и  $l_2$  (рис. 9.30), между которыми поставлены плавкие предохранители. При перегорании одного из предохранителей (на рис. 9.30 — нижнего) трансформа-

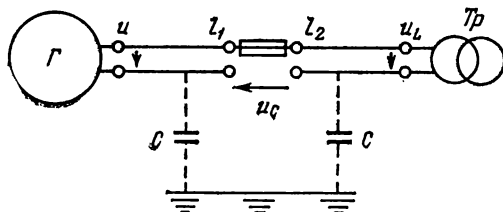


Рис. 9.30. Включение трансформатора последовательно с емкостными элементами при перегорании предохранителя

тор подключается к генератору через две емкости  $C$ , образованные жилами кабелей и землей (оболочкой). В полученной цепи напряжение  $U_C$  между разъединенными жилами кабеля, а также напряжение на трансформаторе  $U_L$  могут быть больше напряжения генератора  $U$ , как например, на рис. 9.28.

**г) Мощность цепи.** Мгновенная мощность  $rLC$ -цепи может быть представлена тремя составляющими:

$$p = p_a + p_L + p_C = u_a i + u_L i + u_C i. \quad (9.60)$$

Выбирая опять нулевую начальную фазу  $u$  тока, т.е. принимая  $i = I_m \sin \omega t$  (рис. 9.26, а), получаем, как и раньше,

$$u_a = U_{am} \sin \omega t; \quad u_L = U_{Lm} \sin (\omega t + \pi/2) \\ \text{и} \quad u_C = U_{Cm} \sin (\omega t - \pi/2).$$

После подстановки напряжений и тока в (9.60) найдем мгновенную мощность цепи:

$$p = 2U_a I \sin^2 \omega t + U_L I \sin 2\omega t - U_C I \sin 2\omega t.$$

Зависимости мгновенной мощности и ее составляющих от времени при  $x_L > x_C$  показаны на рис. 9.26, в.

Составляющие  $p_L$  и  $p_C$  мгновенной мощности изменяются с двойной частотой и в каждый момент времени имеют противоположные знаки.

Средняя или активная мощность цепи

$$P = UI \cos \varphi = U_a I \quad (9.61)$$

всегда положительная.

Реактивная мощность, характеризующая обмен энергией между цепью и источником питания,

$$Q = UI \sin \varphi = U_p I = (U_L - U_C) I. \quad (9.62)$$

Реактивная мощность может быть положительной (индуктивный режим:  $U_L > U_C$ ;  $x_L > x_C$  и  $\varphi > 0$ ) или отрицательной (емкостный режим:  $U_L < U_C$ ;  $x_L < x_C$  и  $\varphi < 0$ ).

Полная мощность цепи

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (9.63)$$

Коэффициент мощности

$$\cos \varphi = P/S.$$

## 9.9. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ НЕРАЗВЕТВЛЕННОЙ ЦЕПИ

Цепь (рис. 9.31) состоит из нескольких последовательно соединенных участков или элементов, обладающих активными и реактивными сопротивлениями. При токе  $I$  в цепи активная составляющая напряжения произвольного участка  $n$

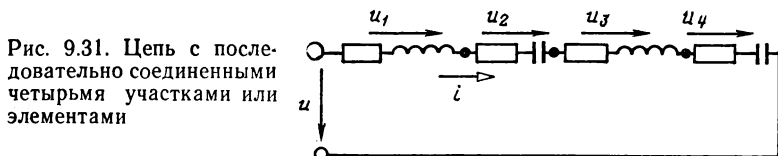
$$U_{an} = r_n I,$$

реактивная составляющая напряжения участка

$$U_{pn} = x_n I$$

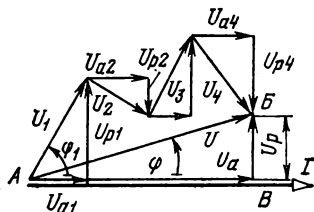
рассматривается как алгебраическая величина, так как реактивное сопротивление  $x_n$  — алгебраическая величина.

На векторной диаграмме активные составляющие напряжения откладываются по направлению вектора тока, а реактивные — под углом  $\pm 90^\circ$  (в зависимости от знака  $x_n$ ) к вектору тока. Векторная диаграмма цепи (рис. 9.31)



показана на рис. 9.32, где векторы напряжений отложены в той же последовательности, в которой расположены участки цепи.

Рис. 9.32. Векторная диаграмма цепи, изображенной на рис. 9.31



Напряжение на произвольном участке

$$U_n = \sqrt{U_{an}^2 + U_{pn}^2};$$

вектор его повернут относительно вектора тока на угол, определяемый через

$$\operatorname{tg} \varphi_n = x_n / r_n.$$

Сумма векторов всех напряжений  $U_n$  равна вектору напряжения на выводах цепи  $U$  (рис. 9.32).

Действующее значение этого напряжения  $U$  определяется из прямоугольного треугольника ( $АВВ$  на рис. 9.32). Одним катетом треугольника является активная составляющая напряжения цепи  $U_a$  ( $АВ$  на рис. 9.32), равная арифметической сумме активных составляющих напряжений всех участков; другим катетом — реактивная составляющая напряжения цепи  $U_p$  ( $ВВ$ ), которая равна алгебраи-

ческой сумме реактивных составляющих всех участков цепи.

Таким образом, напряжение цепи

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = \sqrt{(\sum U_{an})^2 + (\sum U_{pn})^2}. \quad (9.64)$$

Заменив в (9.64) составляющие напряжений произведениями токов и сопротивлений, получим

$$U = \sqrt{(rI)^2 + (xI)^2} = \sqrt{(\sum r_n I)^2 + (\sum x_n I)^2}$$

или

$$U = I \sqrt{r^2 + x^2} = I \sqrt{(\sum r_n)^2 + (\sum x_n)^2},$$

откуда полное сопротивление цепи рис. 9.31

$$z = U/I = \sqrt{r^2 + x^2} = \sqrt{(\sum r_n)^2 + (\sum x_n)^2}. \quad (9.65)$$

Угол сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением на выводах цепи  $U$  и током  $I$  определяется через

$$\operatorname{tg} \varphi = x/r = \sum x_n / \sum r_n. \quad (9.66)$$

Если  $x = \sum x_n > 0$  и, следовательно, угол  $\varphi > 0$ , то напряжение цепи опережает по фазе ток, что соответствует индуктивному режиму работы всей цепи (рис. 9.32); если  $x = \sum x_n < 0$ , то  $\varphi < 0$  и напряжение отстает по фазе от тока; следовательно, имеет место емкостный режим работы цепи.

Активная, реактивная и полная мощности цепи определяются по (9.61) — (9.63).

**Пример 9.4.** Четыре последовательно соединенных участка подключены к источнику с напряжением  $U=217$  В и частотой  $f=50$  Гц. Сопротивления участков  $r_1=3$  Ом,  $x_{L1}=11$  Ом,  $r_2=4$  Ом,  $x_{C2}=3$  Ом,  $r_3=5$  Ом,  $x_{L3}=7$  Ом,  $r_4=6$  Ом,  $x_{C4}=7$  Ом.

Определить: 1) ток в цепи, 2) угол сдвига фаз между напряжением и током, 3) активную, реактивную и полную мощности цепи, 4) напряжения на отдельных участках цепи, 5) углы сдвига фаз между напряжениями на участках и током в цепи.

**Решение.**

$$1) r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 3 + 4 + 5 + 6 = 18 \text{ Ом};$$

$$x = x_{L1} - x_{C2} + x_{L3} - x_{C4} = 11 - 3 + 7 - 7 = 8 \text{ Ом};$$

$$z = \sqrt{r^2 + x^2} = \sqrt{18^2 + 8^2} = 19,7 \text{ Ом};$$

$$I = U/z = 217/19,7 = 11 \text{ А};$$

$$2) \operatorname{tg} \varphi = x/r = 8/18 = 0,445 > 0,$$

откуда  $\varphi = +24^\circ$ ;  $\cos \varphi = 0,913$ ;  $\sin \varphi = 0,407$ ;

$$3) P = UI \cos \varphi = 217 \cdot 11 \cdot 0,913 = 2179 \text{ Вт};$$

$$Q = UI \sin \varphi = 217 \cdot 11 \cdot 0,407 = 971,5 \text{ вар};$$

$$S = UI = 217 \cdot 11 = 2387 \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$4) z_1 = \sqrt{r_1^2 + x_{L1}^2} = \sqrt{3^2 + 11^2} = 11,4 \text{ Ом};$$

$$U_1 = z_1 I = 11,4 \cdot 11 = 125,4 \text{ В};$$

$$z_2 = \sqrt{r_2^2 + x_{C2}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ Ом};$$

$$U_2 = z_2 I = 5 \cdot 11 = 55 \text{ В};$$

$$z_3 = \sqrt{r_3^2 + x_{L3}^2} = \sqrt{5^2 + 7^2} = 8,6 \text{ Ом};$$

$$U_3 = z_3 I = 8,6 \cdot 11 = 96,4 \text{ В};$$

$$z_4 = \sqrt{r_4^2 + x_{C4}^2} = \sqrt{6^2 + 7^2} = 9,22 \text{ Ом};$$

$$U_4 = z_4 I = 9,22 \cdot 11 = 101,4 \text{ В};$$

$$5) \operatorname{tg} \varphi_1 = x_1/r_1 = 11/3 = 3,66; \quad \varphi_1 = 74^\circ 40';$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = x_2/r_2 = -x_{C2}/r_2 = -3/4 = -0,75; \quad \varphi_2 = -36^\circ 50';$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = x_3/r_3 = 7,5/5 = 1,4; \quad \varphi_3 = 54^\circ 30';$$

$$\operatorname{tg} \varphi_4 = x_4/r_4 = -7/6 = -1,166; \quad \varphi_4 = -49^\circ 30'.$$

## 9.10. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ДВУХ ВЕТВЕЙ

Цепь с двумя параллельными ветвями (рис. 9.33), каждая с сопротивлением и индуктивностью, подключена

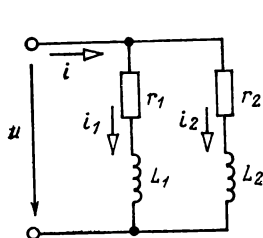


Рис. 9.33. Цепь с двумя параллельными ветвями

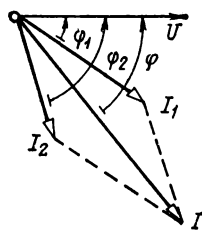


Рис. 9.34. Векторная диаграмма цепи по рис. 9.33

к источнику синусоидального напряжения  $u = U_m \sin \omega t$ . Рассчитаем режим работы цепи.

Ток в первой параллельной ветви

$$i_1 = \frac{U_m}{z_1} \sin(\omega t - \varphi_1) = I_{m1} \sin(\omega t - \varphi_1).$$



Ток во второй параллельной ветви

$$i_2 = \frac{U_m}{z_2} \sin(\omega t - \varphi_2) = I_{m2} \sin(\omega t - \varphi_2).$$

Действующие значения этих токов

$$I_1 = U/z_1 \text{ и } I_2 = U/z_2, \quad (9.67)$$

где  $z_1 = \sqrt{r_1^2 + x_{L1}^2}$  и  $z_2 = \sqrt{r_2^2 + x_{L2}^2}$  — полные сопротивления параллельных ветвей.

Токи  $i_1$  и  $i_2$  отстают по фазе от напряжения цепи на углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , тангенсы которых

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = x_{L1}/r_1 \text{ и } \operatorname{tg} \varphi_2 = x_{L2}/r_2.$$

Общий ток в неразветвленной части цепи

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 = I_{m1} \sin(\omega t - \varphi_1) + I_{m2} \sin(\omega t - \varphi_2) = \\ &= I_m \sin(\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Его действующее значение  $I$ , равное геометрической сумме действующих значений токов  $I_1$  и  $I_2$ , найдем из векторной диаграммы (рис. 9.34):

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

причем  $I < (I_1 + I_2)$ . На рис. 9.34 показано, что углы сдвига фаз, как было принято ранее, отсчитывают от векторов тока к вектору напряжения, и для цепи с сопротивлениями и индуктивностями (рис. 9.33)  $\varphi_1 > 0$ ;  $\varphi_2 > 0$ ;  $\varphi > 0$ .

Ток в неразветвленной части цепи отстает по фазе от напряжения на угол  $\varphi$ , тангенс которого определяется аналогично (8.10):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2}{I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2}.$$

Активная мощность первой и второй ветвей

$$P_1 = UI_1 \cos \varphi_1; \quad P_2 = UI_2 \cos \varphi_2,$$

а всей цепи

$$P = UI \cos \varphi.$$

Реактивная мощность первой и второй ветвей

$$Q_1 = UI_1 \sin \varphi_1; \quad Q_2 = UI_2 \sin \varphi_2,$$

а всей цепи

$$Q = UI \sin \varphi.$$

Соответственно полные мощности

$$S_1 = UI_1; \quad S_2 = UI_2 \text{ и } S = UI.$$

Аналогично рассчитываются токи и мощности и в том случае, если одна из ветвей или обе ветви вместо индуктивных элементов содержат емкостные.

### 9.11. РАСЧЕТ ЦЕПИ С ПАРАЛЛЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫМИ ВЕТВЯМИ МЕТОДОМ ПРОВОДИМОСТЕЙ

При расчете режима цепи с катушкой, обладающей индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $r$  (§9.6,  $a$ ), было отмечено, что для удобства расчета напряжение цепи можно рассматривать разложенным на две составляющие: активную  $U_a$  и реактивную  $U_p$ . В соответствии с этим катушка была представлена последовательной схемой замещения с двумя последовательно соединенными элементами: сопротивлением и индуктивностью.

При расчете цепи с параллельным соединением ветвей можно применить метод проводимостей. По методу проводимостей ток каждой параллельной ветви (в частности, катушки) рассматривают состоящим из двух составляющих: активной  $I_a$  и реактивной  $I_p$ . В соответствии с этим ветвь с любым приемником заменяют эквивалентной схемой с двумя параллельно соединенными элементами: активным с проводимостью  $g = I_a/U$  и реактивным с проводимостью  $b = I_p/U$ . В качестве примера эквивалентная схема для цепи рис. 9.33 показана на рис. 9.35,  $a$ .

Активная составляющая каждого тока совпадает по фазе с напряжением параллельно соединенных ветвей. Например, активная составляющая тока в первой ветви (рис. 9.35,  $a$ )

$$I_{a1} = I_1 \cos \varphi_1 = \frac{U}{z_1} \frac{r_1}{z_1} = U \frac{r_1}{z_1^2} = g_1 U.$$

Величина

$$g_1 = r_1/z_1^2$$

называется активной проводимостью первой ветви.

Активная составляющая второго тока

$$I_{a2} = I_2 \cos \varphi_2 = g_2 U,$$

где  $g_2 = r_2/z_2^2$  — активная проводимость второй ветви.

Для произвольной ветви, в частности и для  $rC$ -ветви или  $rLC$ -ветви, активная проводимость вычисляется по такой же формуле

$$g_B = r_B / z_B^2, \quad (9.68)$$

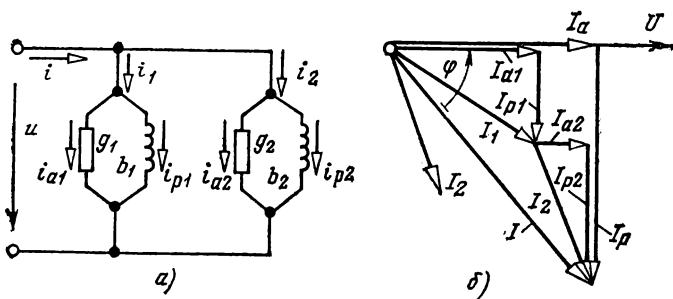


Рис. 9.35. Эквивалентная схема цепи по рис. 9.33 (а) и треугольники токов (б)

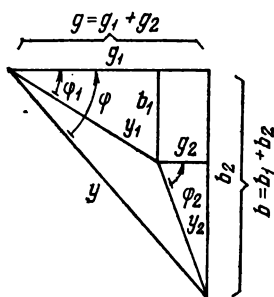


Рис. 9.36. Треугольники проводимостей

т.е. активная проводимость равна отношению активного сопротивления ветви к квадрату полного сопротивления, а активная составляющая тока ветви

$$I_{a.B} = I_B \cos \varphi_B = g_B U. \quad (9.69)$$

Реактивная составляющая первого тока

$$I_{p1} = I_1 \sin \varphi_1 = \frac{U}{z_1} \frac{x_1}{z_1} = U \frac{x_1}{z_1^2} = b_1 U,$$

где

$$b_1 = x_1 / z_1^2$$

называется реактивной проводимостью первой ветви. Для схемы (рис. 9.33) реактивная проводимость ин-

дуктивная:

$$b_1 = x_1/z_1^2 = b_{L1} = x_{L1}/z_1^2.$$

Реактивная составляющая второго тока

$$I_{p2} = I_2 \sin \varphi_2 = b_2 U,$$

где

$$b_2 = x_2/z_2^2 = x_{L2}/z_2^2.$$

В общем случае для произвольной ветви

$$b_b = x_b/z_b^2, \quad (9.70)$$

причем в общем случае  $x_b$  может быть или положительным (индуктивный режим) или отрицательным (емкостный режим), поэтому и *реактивную проводимость нужно считать алгебраической величиной*: положительной при  $x_b > 0$  и отрицательной при  $x_b < 0$ .

Реактивная составляющая тока произвольной ветви, рассматриваемая как алгебраическая величина,

$$I_{p.b} = I_b \sin \varphi_b = b_b U. \quad (9.71)$$

В  $rL$ -ветви реактивная составляющая отстает по фазе от напряжения на  $1/4$  периода (рис. 9.35, б), в  $rC$ -ветви — опережает напряжение на  $1/4$  периода, а в ветви с тремя элементами  $r$ ,  $L$  и  $C$  — отстает на  $1/4$  периода при  $x_L > x_C$  или опережает на  $1/4$  периода при  $x_L < x_C$ . Таким образом, реактивная составляющая тока сдвинута относительно напряжения на угол  $\pm \pi/2$ .

Токи в ветвях и их составляющие изображаются на векторной диаграмме сторонами прямоугольных треугольников токов (рис. 9.35, б); поэтому токи и их составляющие связаны между собой теми же соотношениями, что и стороны треугольников:

$$I_1 = \sqrt{I_{a1}^2 + I_{p1}^2} = U \sqrt{g_1^2 + b_1^2}. \quad (9.72a)$$

$$I_2 = \sqrt{I_{a2}^2 + I_{p2}^2} = U \sqrt{g_2^2 + b_2^2}. \quad (9.72b)$$

Из сравнения (9.67) и (9.72) можно сделать вывод, что

$$y_1 = 1/z_1 = \sqrt{g_1^2 + b_1^2} \quad \text{и} \quad y_2 = 1/z_2 = \sqrt{g_2^2 + b_2^2}$$

и вообще полная проводимость ветви

$$y_b = \sqrt{g_b^2 + b_b^2}. \quad (9.73)$$

Уменьшив в  $U$  раз стороны треугольника токов, получим подобный ему треугольник проводимостей (рис. 9.36); естественно, что активная, реактивная и полная проводимости ветви связаны между собой так же, как стороны треугольника проводимостей.

Углы сдвига фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  между напряжениями и токами в ветвях определяются через их тангенсы (рис. 9.36):

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = b_1/g_1 \text{ и } \operatorname{tg} \varphi_2 = b_2/g_2$$

или через их синусы:

$$\sin \varphi_1 = b_1/y_1 \text{ и } \sin \varphi_2 = b_2/y_2$$

(через косинусы определяются только абсолютные значения, но не знаки углов сдвига фаз).

Активная составляющая общего тока (рис. 9.35)

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} = g_1 U + g_2 U = (g_1 + g_2) U = gU,$$

где  $g = g_1 + g_2$  — активная проводимость всей цепи (рис. 9.35).

Реактивная составляющая общего тока

$$I_p = I_{p1} + I_{p2} = b_1 U + b_2 U = (b_1 + b_2) U = bU;$$

здесь  $b = b_1 + b_2$  — реактивная проводимость всей цепи (рис. 9.35).

Общий ток цепи

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{(gU)^2 + (bU)^2} = U \sqrt{g^2 + b^2} = yU; \quad (9.74)$$

здесь

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} = 1/z$$

— полная проводимость цепи (рис. 9.35) и для всей цепи, так же как для отдельной ветви

$$g = r/z^2 = ry^2 \text{ и } b = x/z^2 = xy^2. \quad (9.75)$$

Ток  $i$  отстает по фазе от напряжения  $u$  на угол  $\varphi$ , который определяется через его тангенс или синус:

$$\operatorname{tg} \varphi = b/g; \quad \sin \varphi = b/y.$$

Активная мощность цепи

$$P = UI \cos \varphi = UI \frac{g}{y} = UIzg = gU^2.$$

Реактивная мощность цепи

$$Q = UI \sin \varphi = UI \frac{b}{y} = UIzb = bU^2.$$

Полная мощность цепи

$$S = \sqrt{\overline{P^2} + \overline{Q^2}} = U^2 \sqrt{g^2 + b^2} = yU^2.$$

## 9.12. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ЦЕПИ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ВЕТВЯМИ

Рассмотрим общий случай расчета режима на примере цепи с тремя параллельными ветвями (рис. 9.37). Первая ветвь содержит активное и индуктивное сопротивления

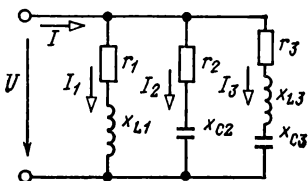


Рис. 9.37. Разветвленная цепь переменного тока

( $r_1$  и  $x_{L1}$ ), вторая ветвь активное и емкостное сопротивление ( $r_2$  и  $x_{C2}$ ) и третья ветвь активное, индуктивное и емкостное сопротивления ( $r_3$ ,  $x_{L3}$  и  $x_{C3}$ ).

Активные проводимости ветвей по (9.68)

$$g_1 = r_1/z_1^2; \quad g_2 = r_2/z_2^2; \quad g_3 = r_3/z_3^2,$$

$$\text{где } z_1 = \sqrt{r_1^2 + x_{L1}^2}; \quad z_2 = \sqrt{r_2^2 + x_{C2}^2};$$

$$z_3 = \sqrt{r_3^2 + (x_{L3} - x_{C3})^2}.$$

Активная проводимость цепи равна сумме проводимостей всех ветвей

$$g = g_1 + g_2 + g_3 = \Sigma g_n. \quad (9.76)$$

Реактивные проводимости отдельных ветвей в отличие от активных проводимостей являются алгебраическими величинами (9.70). Реактивная проводимость первой ветви

$$b_1 = x_1/z_1^2 = x_{L1}/z_1^2 > 0,$$

так как  $x_1 = x_{L1} = \omega L_1 > 0$ . Реактивная проводимость второй ветви

$$b_2 = x_2/z_2^2 = -x_{C2}/z_2^2 < 0,$$

так как  $x_2 = -x_{C2} = -1/\omega C_2 < 0$ .

Реактивная проводимость третьей ветви

$$b_3 = x_3/z_3^2 = (x_{L3} - x_{C3})/z_3^2,$$

если  $x_{L3} = \omega L_3 > x_{C3} = 1/\omega C_3$ , то  $b_3 > 0$ , т. е. реактивная проводимость имеет индуктивный характер; при  $x_{L3} < x_{C3}$  реактивная проводимость  $b_3 < 0$ , т. е. имеет емкостный характер.

Реактивная проводимость всей цепи — также алгебраическая величина:

$$b = b_1 + b_2 + b_3 = \Sigma b_n. \quad (9.77)$$

Полная проводимость всей цепи

$$y = \sqrt{b^2 + g^2}. \quad (9.78)$$

Угол сдвига фаз между напряжением  $u$  и общим током  $i$  находится через тангенс или синус:

$$\operatorname{tg} \varphi = b/g \text{ или } \sin \varphi = b/y. \quad (9.79)$$

В зависимости от знака  $b$  угол  $\varphi$  может быть положительным или отрицательным, т. е. общий ток может отставать по фазе от напряжения ( $\varphi > 0$ ) или опережать по фазе напряжение ( $\varphi < 0$ ).

Аналогично определяются углы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  для всех ветвей цепи. В ветвях с индуктивной реактивной проводимостью угол сдвига фаз положителен и ток в ветви отстает по фазе от напряжения. В ветвях с емкостной реактивной проводимостью ток опережает по фазе напряжение.

Векторная диаграмма строится аналогично показанным на рис. 9.34 и 9.35, б, причем  $I < (I_1 + I_2 + I_3)$ .

Активная мощность цепи

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = g_1 U^2 + g_2 U^2 + g_3 U^2 = \Sigma g_n U^2. \quad (9.80)$$

Реактивная мощность цепи

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = b_1 U^2 + b_2 U^2 + b_3 U^2 = \Sigma b_n U^2. \quad (9.81)$$

Полная мощность цепи

$$S = y \dot{U}^2, \quad (9.82)$$

причем естественно, что  $S < (S_1 + S_2 + S_3)$ .

### 9.13. СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ КОНДЕНСАТОРА И КАТУШКИ С ПОТЕРЯМИ

а) **Конденсатор.** У конденсатора с твердым или жидким диэлектриком в общем случае есть потери, так как при

переменном напряжении на его выводах в диэлектрике наблюдается преобразование электрической энергии в тепло (см. § 4.4).

Ток конденсатора с потерями опережает напряжение на его выводах на угол несколько меньший  $\pi/2$ . Дополняющий до  $90^\circ$  угол  $\delta_c = \pi/2 - \varphi_c$  называется углом потерь и является одним из параметров конденсатора. Он зависит от свойств диэлектрика и увеличивается с ростом частоты.

При расчетах конденсатор с потерями (рис. 9.38, а) за-

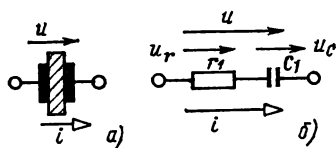


Рис. 9.38. Обозначение конденсатора с потерями на схемах (а) и его последовательная схема замещения (б)

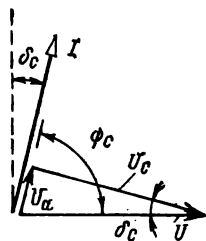


Рис. 9.39. Векторная диаграмма конденсатора со схемой замещения по рис. 9.38

меняется последовательной или параллельной схемой замещения.

Последовательная схема (рис. 9.38, б) состоит из емкости  $C_1$ , т. е. конденсатора без потерь, и последовательно присоединенного сопротивления  $r_1$ . Она должна удовлетворять требованиям: при заданном напряжении  $u = U_m \sin \omega t$  ток  $i$  конденсатора и ток в последовательной схеме должны быть одинаковы и, следовательно, мощность в сопротивлении  $r_1$  должна быть равна мощности потерь в конденсаторе.

На рис. 9.39 дана векторная диаграмма для последовательной эквивалентной схемы. Активная составляющая напряжения на сопротивлении  $U_a = r_1 I$  совпадает по фазе с током, напряжением на емкости  $U_c = x_{C1} I$ , отстает по фазе от тока на угол  $\pi/2$ . Вектор напряжения на выводах конденсатора, равный сумме векторов напряжений  $U_a$  и  $U_c$ , отстает по фазе от тока на угол  $\varphi_c = \pi/2 - \delta_c$ .

Активная мощность

$$P = UI \cos \varphi_c = U_a I = r_1 I^2,$$



но так как из треугольника напряжений (рис. 9.39)

$$\operatorname{tg} \delta_C = \frac{U_a}{U_C} = \frac{r_1 I}{x_{C1} I} = \frac{r_1}{x_{C1}}, \quad (9.83)$$

откуда

$$r_1 = x_{C1} \operatorname{tg} \delta_C = \frac{\operatorname{tg} \delta_C}{\omega C_1},$$

то и мощность

$$P = UI \cos \varphi_C = I^2 \frac{1}{\omega C_1} \operatorname{tg} \delta_C. \quad (9.84)$$

При слишком большом напряжении или очень высокой частоте нагрев диэлектрика конденсатора может превысить допустимые значения.

Измерив напряжение, ток и мощность конденсатора с потерями, можно определить параметры последовательной эквивалентной схемы:

$$z = \frac{U}{I}; \quad r_1 = \frac{P}{I^2}; \quad x_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \sqrt{z^2 - r_1^2},$$

откуда

$$\begin{aligned} C_1 &= 1/\omega x_{C1} = \frac{1}{\omega \sqrt{z^2 - r_1^2}} = \\ &= \frac{1}{\omega \sqrt{U^2/I^2 - (P/I^2)^2}} = \frac{I^2}{\omega \sqrt{U^2 I^2 - P^2}}. \end{aligned}$$

Параллельная схема замещения (рис. 9.40) состоит из емкости  $C_2$  и параллельно присоединенного сопротивле-

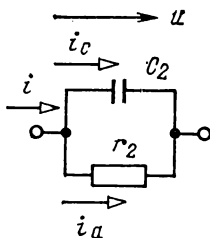


Рис. 9.40. Параллельная схема замещения конденсатора с потерями

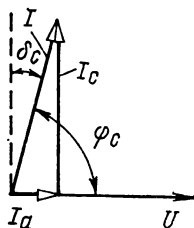


Рис. 9.41. Векторная диаграмма конденсатора со схемой замещения по рис. 9.40

ния  $r_2$ . Естественно, она должна удовлетворять тем же требованиям, что и первая схема.

На рис. 9.41 дана векторная диаграмма для этой схемы. Ток в активном сопротивлении  $i_a$  (рис. 9.40) совпадает по фазе с напряжением  $u$ , ток в емкости  $i_c$  опережает напряжение  $u$  на угол  $\pi/2$ . Общий ток  $i$ , равный сумме токов двух ветвей, опережает по фазе напряжение на тот же угол  $\varphi_C = \pi/2 - \delta_C$ .

Активная мощность, развиваемая в цепи,

$$P = UI \cos \varphi_C = UI_a = U^2/r_2.$$

Из треугольника токов (рис. 9.41)

$$\operatorname{tg} \delta_C = \frac{I_a}{I_C} = \frac{U/r_2}{U/x_{C2}} = \frac{x_{C2}}{r_2} = \frac{1}{\omega C_2 r_2}, \quad (9.85)$$

откуда

$$r_2 = \frac{1}{\omega C_2 \operatorname{tg} \delta_C}$$

и мощность

$$P = UI \cos \varphi_C = U^2 \omega C_2 \operatorname{tg} \delta_C. \quad (9.86)$$

Измерив напряжение, ток и мощность конденсатора с потерями, можно определить параметры параллельной схемы замещения:

$$y = I/U; \quad g_2 = P/U^2; \quad b_{C2} = \omega C_2 = \sqrt{y^2 - g_2^2}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} C_2 = 1/\omega b_{C2} &= \frac{1}{\omega} \sqrt{y^2 - g_2^2} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{I^2}{U^2} - \left(\frac{P}{U^2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{\omega U^2} \sqrt{U^2 I^2 - P^2}. \end{aligned}$$

Следует учесть, что  $g_2 = 1/r_2 \neq 1/r_1$  и  $C_2 \neq C_1$ .

**Пример 9.5.** Конденсатор включен в сеть с напряжением  $U=200$  В и частотой  $f=50$  Гц, ток конденсатора  $I=1$  А, активная мощность  $P=10$  Вт. Определить параметры параллельной схемы замещения конденсатора.

**Решение.** Сопротивление

$$r_2 = 1/g_2 = U^2/P = 200^2/10 = 4000 \text{ Ом};$$

емкость

$$C_2 = \frac{1}{\omega U^2} \sqrt{U^2 I^2 - P^2} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 200^2} = \sqrt{200^2 \cdot 1^2 - 10^2} \approx 16 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$$

б) **Катушка.** При низких частотах, например при стандартной частоте  $f=50$  Гц, катушка может быть заменена последовательной схемой замещения (рис. 9.14), расчет параметров которой был уже рассмотрен в § 9.6.

Параллельная схема замещения (рис. 9.35) применяется редко.

При более высоких частотах схема замещения катушки усложняется вследствие влияния емкостей  $C$  между отдельными витками катушки (рис. 9.42). При увеличении

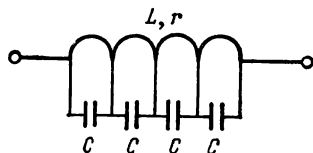


Рис. 9.42. Учет емкостей между отдельными витками катушки

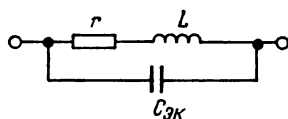


Рис. 9.43. Упрощенная схема замещения катушки при учете емкостей между отдельными витками

частоты емкостное сопротивление ( $x_C = 1/\omega C$ ) между витками уменьшается и влияние междувитковой емкости увеличивается. Упрощенная схема катушки с учетом междувитковой емкости  $C_{эк}$  показана на рис. 9.43. В действительности все указанные на схеме параметры являются не сосредоточенными, а распределенными по длине катушки.

Применяемые в электротехнике образцовые катушки сопротивлений, катушки магазинов сопротивлений, реостаты и другие аналогичные устройства обладают некоторой индуктивностью и междувитковой емкостью, с которыми необходимо считаться при их работе в цепях с повышенной и высокой частотой.

#### 9.14. ЗНАЧЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА МОЩНОСТИ ДЛЯ ЭНЕРГЕТИКИ

Электрические машины, аппараты и другие устройства характеризуются: 1) номинальным током  $I_n$ , который при длительном прохождении вызывает предельное допустимое нагревание; 2) номинальным напряжением  $U_n$ , на которое рассчитана и изготовлена машина или прибор; 3) номинальной полной мощностью, равной произведению  $U_n$  и  $I_n$ , т. е.

$$S_n = U_n I_n.$$

Полное использование мощности генератора происходит при номинальных напряжении и токе и работе с  $\cos \varphi_0 = 1$ , так как в этом случае активная мощность наибольшая и равна номинальной полной мощности

$$P = U_n I_n \cos \varphi_0 = U_n I_n = S_n.$$

Генератор, работающий при номинальных напряжении и токе, но при  $\cos \varphi \neq 1$ , развивает активную мощность, пропорциональную  $\cos \varphi$ . Следовательно, уменьшение  $\cos \varphi$ , значение которого определяется приемником энергии, вызывает неполное использование генератора.

У приемника энергии, работающего при заданных неизменных напряжении  $U$  и активной мощности  $P$ , но при различных  $\cos \varphi$ , ток тем больший, чем меньше его  $\cos \varphi$ . Действительно, обозначив через  $I_0$  ток при  $\cos \varphi_0 = 1$  и  $I$  — ток при  $\cos \varphi < 1$ , можем написать, что

$$P = UI_0 \cos \varphi_0 = UI \cos \varphi,$$

откуда следует

$$I_0 \cos \varphi_0 = I \cos \varphi$$

или

$$I = I_0 \cos \varphi_0 / \cos \varphi = I_0 / \cos \varphi. \quad (9.87)$$

Обозначив через  $r$  сопротивление генератора и соединительных проводов, найдем мощность тепловых потерь в них:  $\Delta P = rI^2$ . При постоянной мощности  $P$  и уменьшающемся  $\cos \varphi$  ток, а значит, и мощность тепловых потерь увеличиваются. Если при  $\cos \varphi_0 = 1$

$$\Delta P_0 = rI_0^2, \quad (9.88)$$

то при других значениях  $\cos \varphi$  с учетом (9.87) получим

$$\Delta P = rI^2 = rI_0^2 \frac{1}{\cos^2 \varphi} = \Delta P_0 \frac{1}{\cos^2 \varphi}. \quad (9.89)$$

Таким образом, при постоянной мощности  $P$  приемника уменьшение  $\cos \varphi$  вызывает увеличение потерь на нагревание, которые растут обратно пропорционально квадрату коэффициента мощности.

Для полного использования номинальной установленной мощности генераторов и уменьшения тепловых потерь необходимо повышать  $\cos \varphi$  установок до значений, близких к единице (0,95—1).

У широко применяемых для привода станков и других машин асинхронных двигателей  $\cos \varphi$  при холостом ходе

составляет 0,2—0,3, а при номинальной нагрузке 0,83—0,85. Для повышения  $\cos \varphi$  параллельно двигателю или группе двигателей включают конденсаторы. В этом случае энергия в магнитном поле двигателя частично или полностью накапливается за счет энергии электрического поля конденсаторов (см. гл. 11) и наоборот, а генератор и провода, соединяющие его с цепью двигатель — конденсатор, разгружаются от обменной энергии (от реактивной слагающей тока).

Повышение  $\cos \varphi$  электрических установок является важной технико-экономической проблемой. Повышение означает значительную экономию электрической энергии, так как уменьшаются потери в генераторах, трансформаторах, в воздушных и кабельных сетях. Одновременно разгрузка электрических установок от обменной энергии позволяет лучше использовать установленную мощность, т. е. увеличить активную мощность, развиваемую генераторами, и передачу энергии через трансформаторы и по линиям.

**Пример 9.6.** Номинальные данные генератора:  $U_n=6000$  В,  $I_n=250$  А,  $S_n=1500$  кВ·А. Определить активную мощность генератора при  $\cos \varphi_1=0,9$  и  $\cos \varphi_2=0,3$ .

**Решение.** Активная мощность

$$P_1 = U_n I_n \cos \varphi_1 = 6000 \cdot 250 \cdot 0,9 = 1350 \text{ кВт};$$

$$P_2 = U_n I_n \cos \varphi_2 = 6000 \cdot 250 \cdot 0,3 = 450 \text{ кВт}.$$

**Пример 9.7.** Двигатель работает при напряжении  $U=220$  В, частоте  $f=50$  Гц с  $\cos \varphi_1=0,6$ , развивая мощность  $P=20$  кВт. Определить, какой емкости конденсатор необходимо подключить параллельно двигателю с тем, чтобы установка работала с  $\cos \varphi_2=0,9$ .

**Решение.** Ток двигателя при  $\cos \varphi_1=0,6$

$$I_1 = P / (U \cos \varphi_1) = 20\,000 / (220 \cdot 0,6) = 152 \text{ А}.$$

При  $\cos \varphi_1=0,6$  угол  $\varphi_1=53^\circ 10'$  и  $\sin \varphi_1=0,8$ .

Реактивная слагающая тока двигателя

$$I_{p1} = I_1 \sin \varphi_1 = 152 \cdot 0,8 = 121,6 \text{ А}.$$

При  $\cos \varphi_2=0,9$  угол  $\varphi_2=26^\circ 50'$  и  $\sin \varphi_2=0,436$ .

Ток установки двигатель — конденсатор, работающий при  $\cos \varphi_2=0,9$ ,

$$I_2 = P / (U \cos \varphi_2) = 20\,000 / (220 \cdot 0,9) = 101 \text{ А}.$$

Реактивная слагающая тока

$$I_{p2} = I_2 \sin \varphi_2 = 101 \cdot 0,436 = 44 \text{ А}.$$

Уменьшение реактивной слагающей тока после подключения конденсатора [уменьшается, так как реактивная составляющая тока дви-

гателя, как и катушки индуктивности, отстает по фазе от напряжения на  $90^\circ$  ( $\varphi_1 > 0$ ), а у конденсатора без потерь ток опережает по фазе напряжение на  $90^\circ$

$$I_C = I_{p1} - I_{p2} = 121,6 - 44 = 77,6 \text{ A.}$$

Емкостное сопротивление конденсатора

$$x_C = 1/\omega C = U/I_C = 220/77,6 = 2,83 \text{ Ом.}$$

Емкость конденсатора

$$C = \frac{1}{x_C \omega} = \frac{1}{x_C \cdot 2\pi f} = \frac{1}{2,83 \cdot 2\pi \cdot 50} = 0,00113 \text{ Ф} = 1130 \text{ мкФ.}$$

### 9.15. АКТИВНАЯ И РЕАКТИВНАЯ ЭНЕРГИИ

Величину, определяемую как произведение активной мощности  $P$  и времени  $t$ , в течение которого мощность остается неизменной, называют активной энергией:

$$W_a = Pt = (UI \cos \varphi) t. \quad (9.90)$$

Она характеризует электрическую энергию, израсходованную в цепи переменного тока.

Если в течение времени  $t$  мощность изменяется, то время  $t$  делят на промежутки  $t_1, t_2, t_3$  и т. д., в течение каждого из которых мощность остается неизменной, и энергию определяют как сумму

$$W_a = P_1 t_1 + P_2 t_2 + \dots = W_{a1} + W_{a2} + \dots$$

Активная энергия измеряется счетчиками активной энергии.

Величину, определяемую как произведение реактивной мощности  $Q$  и времени  $t$ , называют реактивной энергией:

$$W_p = Qt = (UI \sin \varphi) t. \quad (9.91)$$

Она является чисто расчетной величиной, позволяющей определить среднее значение коэффициента мощности установки.

При изменяющейся реактивной мощности реактивная энергия определяется по формуле

$$W_p = Q_1 t_1 + Q_2 t_2 + \dots = W_{p1} + W_{p2} + \dots$$

Реактивная энергия измеряется счетчиками реактивной энергии.

При постоянных значениях мощностей отношение

$$\begin{aligned} \frac{W_a}{\sqrt{W_a^2 + W_p^2}} &= \frac{UIt \cos \varphi}{\sqrt{(UIt \cos \varphi)^2 + (UIt \sin \varphi)^2}} = \\ &= \frac{UIt \cos \varphi}{UIt \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} = \cos \varphi, \end{aligned}$$

т. е. равно коэффициенту мощности.

Если активная и реактивная мощности установки изменяются, то, измерив при помощи счетчиков активную и реактивную энергию за какой-то промежуток времени, можно найти отношение

$$\frac{W_a}{\sqrt{W_a^2 + W_p^2}} = \cos \varphi_{cp}, \quad (9.92)$$

называемое средним значением коэффициента мощности установки. Средний коэффициент мощности установки является важным технико-экономическим показателем режима работы установки.

#### 9.16. ИЗМЕРЕНИЕ МОЩНОСТИ И УГЛА СДВИГА ФАЗ

Измерение мощности в цепи переменного тока низкой частоты и, в частности, промышленной частоты производится электродинамическими или ферродинамическими ваттметрами.

Электродинамический ваттметр (рис. 9.44, а) имеет две катушки. Первая из них — неподвижная последовательная

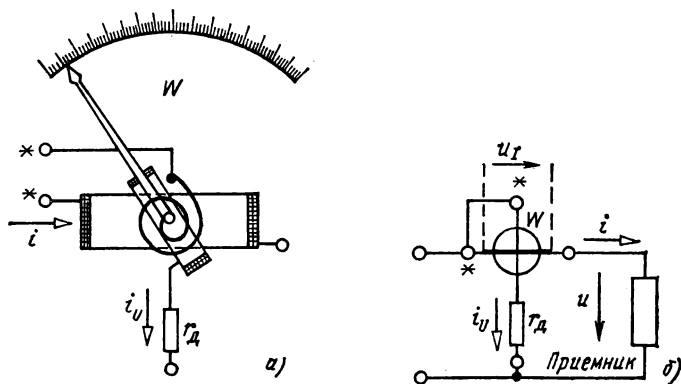


Рис. 9.44. Электродинамический ваттметр:  
а — схема устройства; б — схема включения

(или катушка тока) — включается последовательно с приемником, активная мощность которого измеряется (рис. 9.44, б). Вторая катушка — подвижная параллельная (или катушка напряжения) — крепится на одной оси с указательной стрелкой прибора. Эта катушка вместе с последовательно соединенным добавочным сопротивлением  $r_d$  образует параллельную цепь ваттметра, которая включается параллельно приемнику.

Взаимодействие токов последовательной катушки  $i$  и параллельной  $i_U$  создает вращающий момент, действующий на подвижную катушку. Мгновенное значение  $m$  этого момента пропорционально произведению мгновенных значений токов  $i$  и  $i_U$ , т. е.

$$m = k_1 i i_U,$$

где  $k_1$  — коэффициент пропорциональности.

Считая, что напряжение на параллельной цепи ваттметра  $u = U_m \sin \omega t$ , а ток в последовательной катушке  $i = I_m \sin (\omega t - \varphi)$ , и пренебрегая малым сопротивлением катушки напряжения по сравнению с добавочным  $r_d$ , найдем ток в параллельной цепи ваттметра:

$$i_U = \frac{U_m}{r_d} \sin \omega t.$$

Таким образом, вращающий момент

$$\begin{aligned} m &= k_1 \frac{U_m}{r_d} \sin \omega t \cdot I_m \sin (\omega t - \varphi) = \frac{k_1}{r_d} \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi - \\ &\quad - \frac{k_1}{r_d} \frac{U_m I_m}{2} \cos (2\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Среднее значение вращающего момента за период равно постоянной составляющей  $m$ , т. е. его первому слагаемому:

$$M_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T m dt = \frac{k_1}{r_d} UI \cos \varphi = \frac{k_1}{r_d} P.$$

Вращающий момент вызывает поворот подвижной части ваттметра на угол  $\alpha$ , при котором он уравнивается противодействующим моментом пружин. Противодействующий момент пропорционален углу закручивания пружин

$$M_{np} = k_2 \alpha,$$

где  $k_2$  — коэффициент пропорциональности, так что  $M_{cp} =$





ной мощности отличается от ваттметра активной мощности тем, что ток в его параллельной катушке включением добавочных элементов сдвигают по фазе относительно напряжения на параллельной ветви на угол  $90^\circ$ .

Ферродинамические приборы отличаются от электродинамических наличием стального магнитопровода, уменьшающего магнитное сопротивление цепи, в которой замыкается магнитный поток. Вследствие этого при малой МДС получается большой магнитный поток, а следовательно, и большой вращающий момент.

Измерив амперметром, вольтметром и ваттметром ток, напряжение и активную мощность цепи переменного тока, можно определить косинус угла сдвига фаз между напряжением и током по формуле

$$\cos \varphi = P/(UI)$$

и угол  $\varphi$  (абсолютное значение) — по косинусу.

Этот метод измерения неудобен, так как требует одновременного отсчета по шкалам трех приборов и затраты времени на вычисление.

Угол сдвига фаз и его косинус обычно измеряют фазометром (при низких частотах).

Электродинамический фазометр (рис. 9.46) состоит из неподвижной последовательной катушки и двух подвижных катушек напряжения. Катушки напряжения расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях и укреплены на одной оси со стрелкой прибора. Последовательно с одной из этих катушек включено активное добавочное сопротивление, последовательно с другой — индуктивное. Вследствие этого ток в первой из них практически совпадает по фазе с напряжением  $u$ , а во второй отстает по фазе от напряжения на угол  $90^\circ$ .

В результате взаимодействия магнитного поля тока неподвижной катушки с токами  $i_1$  и  $i_2$  подвижных катушек возникают два вращающих момента, обусловленные силами  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 9.46) и направленные противоположно друг другу. Фазометр в отличие от других приборов не имеет пружин для создания противодействующего момента. Поэтому под действием двух вращающих моментов подвижная часть прибора повернется на угол, при котором моменты уравниваются. Отклонение подвижной части и стрелки зависит от угла сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением  $u$  и током  $i$  приемника, так что на шкале прибора наносятся углы сдвига  $\varphi$  или  $\cos \varphi$ .

## Глава десятая

### КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

#### 10.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Для определения в произвольный момент времени  $t$  значения переменного тока  $i$  заданной частоты  $\omega$  необходимо знать два числа, например амплитуду  $I_m$  и начальную фазу  $\psi$ . Действительно, зная  $I_m$  и  $\psi$  (а также  $\omega$ ), можно записать, что в любой момент времени

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Однако вместо двух действительных чисел можно пользоваться одним комплексным числом. Применение комплексных чисел упрощает расчеты цепей переменного тока и находит широкое применение.

Комплексным числом или, короче, комплексом называется сумма действительного числа  $L$  и мнимого  $\sqrt{-M^2} = M\sqrt{-1}$ , представляющего собой квадратный корень из отрицательного числа или произведение действительного числа  $M$  и квадратного корня отрицательной единицы  $\sqrt{-1}$ , называемой мнимой единицей и обозначаемой в электротехнике буквой  $j$ .

Таким образом, комплексное число

$$L + \sqrt{-M^2} = L + \sqrt{-1} M = L + jM. \quad (10.1)$$

Действительное число графически изображают отрезком на оси абсцисс  $x$ , которую называют осью действительных величин или, короче, действительной осью (рис. 10.1). Например, заданное действительное положительное число  $K$  изображено на рис. 10.1 отрезком или вектором  $\underline{K}_1 = K$  на положительной полуоси действительных величин.

Мнимое число графически изображают отрезком на оси ординат  $y$ , которую называют осью мнимых величин, для краткости, мнимой осью; например, мнимое число  $jK$  на рис. 10.1 изображено вектором  $\underline{K}_2 = jK$  на положительной полуоси мнимых величин.

Таким образом, мнимая единица  $j$  представляет собой поворотный множитель, при умножении на который вектор, изображающий действительное число  $K$ , поворачивается на угол  $90^\circ$  против направления движения часовой стрелки, т. е. в положительную сторону. Умножение на  $j$  мнимого

числа или в общем случае комплексного числа также приводит к повороту изображающего вектора на  $90^\circ$  в том же направлении. Например, умножение на  $j$  поворачивает изо-

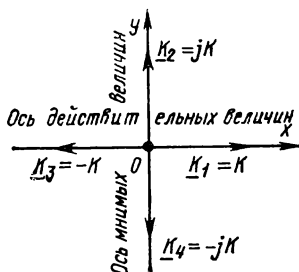


Рис. 10.1. Графическое изображение действительных и мнимых величин

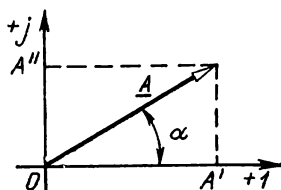


Рис. 10.2. Разложение вектора на составляющие, совпадающие по направлению с осями координат

бразующий вектор  $\underline{K}_2$  на угол  $90^\circ$  в том же направлении и получается вектор  $\underline{K}_3$ , изображающий отрицательное число  $-K$ , так как

$$j(jK) = j^2 K = -K;$$

здесь принято во внимание, что по определению

$$j^2 = -1.$$

Третье умножение числа  $K$  на  $j$  дает отрицательное мнимое число

$$j(j^2 K) = j^3 K = j^2 jK = -jK,$$

т. е.

$$j^3 = -j,$$

и изображающий вектор вновь повернется на  $90^\circ$  и займет положение на отрицательной полуоси мнимых величин — вектор  $\underline{K}_4$  на рис. 10.1.

Четвертый поворот возвращает вектор в исходное положение, при этом

$$j^4 = j^2 j^2 = (-1)(-1) = 1.$$

На рис. 10.2 комплексное число  $\underline{A} = A' + jA''$  изображено вектором  $\underline{A}$ , проекция которого на действительную ось равна его действительной части  $\text{Re } \underline{A} = A'$ , а проекция на мнимую ось — мнимой части  $\text{Im } \underline{A} = A''$ ; таким образом,

можно записать, что

$$\underline{A} = A' + jA'' = \operatorname{Re} \underline{A} + j \operatorname{Im} \underline{A}, \quad (10.2)$$

где  $\operatorname{Re}$  и  $\operatorname{Im}$  — обозначения действительной и мнимой составляющих.

Положительные полуоси действительных и мнимых величин обычно обозначают знаками «+1» и «+j», как и показано на рис. 10.2 и последующих. Плоскость, на которой изображаются комплексные величины или числа, называют комплексной плоскостью.

Векторы, изображающие комплексные величины, записывают с чертой снизу ( $\underline{K}_1, \underline{K}_2, \underline{K}_3, \underline{K}_4, \underline{A}$ ).

Длина вектора  $\underline{A}$  или модуль вектора

$$A = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2}. \quad (10.3)$$

Угол  $\alpha$ , образованный вектором  $\underline{A}$  и положительной полуосью действительных величин и называемый аргументом вектора  $\underline{A}$ , определяется через его тангенс:

$$\operatorname{tg} \alpha = A''/A' = \operatorname{Im} \underline{A} / \operatorname{Re} \underline{A}. \quad (10.4)$$

Положение вектора на комплексной плоскости определяется по знакам  $A'$  и  $A''$  или значению  $\alpha$ .

Итак, вектор, изображающий комплексную величину или число, определяется действительной и мнимой частями или значениями модуля и аргумента.

Кроме рассмотренной алгебраической формы записи комплексных величин и чисел применяется еще тригонометрическая форма, при которой действительная и мнимая части комплекса (10.2) выражаются через модуль и аргумент. Как видно на рис. 10.2,

$$\underline{A} = A' + jA'' = A \cos \alpha + jA \sin \alpha = A (\cos \alpha + j \sin \alpha). \quad (10.5)$$

Применяется еще третья — показательная форма комплексных величин. Комплексное число в показательной форме выражается произведением модуля и поворотного множителя  $e^{j\alpha}$ , т. е.

$$\underline{A} = A (\cos \alpha + j \sin \alpha) = A e^{j\alpha}. \quad (10.6)$$

Из (10.6) следует, что поворотный множитель (формула Эйлера)

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad (10.7)$$

где  $\operatorname{Re} e^{j\alpha} = \cos \alpha$  и  $\operatorname{Im} e^{j\alpha} = \sin \alpha$ .

Поворотный множитель  $e^{j\alpha}$  показывает, что вектор повернут относительно положительной полуоси действительных величин на угол  $\alpha$  против направления движения часовой стрелки. Отрицательному значению угла  $\alpha$  соответствует поворот вектора по часовой стрелке.

Так как показатель степени должен быть отвлеченным числом, то угол  $\alpha$  поворотного множителя должен выражаться в радианах. Однако ради большей наглядности допускается его условная запись в градусах.

Рассмотрим несколько характерных примеров вычислений с поворотным множителем, результаты которых полезно запомнить:

$$1) e^{j0} = \cos 0 + j \sin 0 = 1;$$

$$2) e^{j\pi/2} = e^{j90^\circ} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = 0 + j \cdot 1 = j;$$

$$3) e^{-j\pi/2} = e^{-j90^\circ} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - \\ - j \sin \frac{\pi}{2} = 0 - j \cdot 1 = -j;$$

$$4) e^{\pm j\pi} = e^{\pm j180^\circ} = (e^{j\pi/2})^2 = (j)^2 = -1.$$

## 10.2. ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

а) **Сложение и вычитание комплексных чисел.** Для сложения и вычитания комплексных величин и чисел они записываются в алгебраической форме.

При сложении комплексных складываются отдельно их действительные и мнимые составляющие, например:

$$\underline{A} + \underline{B} = (A' + jA'') + (B' + jB'') = (A' + B') + \\ + j(A'' + B'') = C' + jC'' = \underline{C}. \quad (10.8)$$

Каждое комплексное число может быть представлено вектором, поэтому сложению комплексных соответствует сложение векторов.

Составляющая суммарного вектора, направленная по одной из осей, равна алгебраической сумме составляющих, направленных по той же оси (рис. 10.3), т. е.  $C' = A' + B'$  и  $C'' = A'' + B''$ .

При вычитании комплексных вычитаются отдельно их

действительные и мнимые составляющие, например:

$$\underline{A} - \underline{B} = (A' + jA'') - (B' + jB'') = (A' - B') + j(A'' - B'') = C' + jC'' = \underline{C}. \quad (10.9)$$

Вычитание комплексных чисел может быть заменено сложением уменьшаемого числа с вычитаемым, взятым с обратным знаком, что следует из выражения

$$\underline{C} = \underline{A} - \underline{B} = \underline{A} + (-\underline{B}).$$

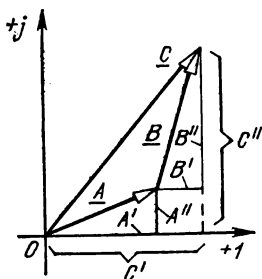


Рис. 10.3. Сложение двух векторов

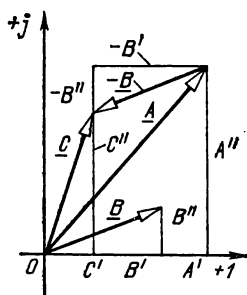


Рис. 10.4. Вычитание двух векторов

Следовательно, вычитание векторов, представляющих комплексные величины, можно заменить сложением уменьшаемого вектора с вычитаемым вектором, взятым с обратным знаком (рис. 10.4).

**Пример 10.1.** Определить сумму  $\underline{C}$  комплексных чисел  $\underline{A} = 4 + j6$  и  $\underline{B} = -3 + j2$ .

**Решение.** Сумма  $\underline{C} = (4 + j6) + (-3 + j2) = (4 - 3) + j(6 + 2) = 1 + j8$ .

**Пример 10.2.** Определить разность  $\underline{C}$  чисел  $\underline{A} = 80 + j90$  и  $\underline{B} = 50 - j30$ .

**Решение.** Разность  $\underline{C} = \underline{A} - \underline{B} = (80 + j90) - (50 - j30) = 30 + j120$ .

**Пример 10.3.** Определить сумму  $\underline{C}$  чисел  $\underline{A} = 10e^{j45^\circ}$  и  $\underline{B} = 6e^{-j30^\circ}$ .

**Решение.** Выразим комплексные числа в алгебраической форме:

$$\underline{A} = 10e^{j45^\circ} = 10 \cos 45^\circ + j 10 \sin 45^\circ = 7,07 + j 7,07;$$

$$\underline{B} = 6e^{-j30^\circ} = 6 \cos 30^\circ - j 6 \sin 30^\circ = 5,2 - j 3.$$

Складывая, получаем

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} = (7,07 + j 7,07) + (5,2 - j 3) = 12,27 + j 4,07.$$

Модуль суммы

$$C = \sqrt{12,27^2 + 4,07^2} = 12,9.$$

Тангенс аргумента

$$\operatorname{tg} \alpha = C''/C' = 4,07/12,27 = 0,331; \quad \alpha = 18^\circ 20'.$$

Сумма, выраженная в показательной форме,  $C = 12,9e^{j18^\circ 20'}$ .

**б) Умножение и деление комплексных чисел.** Умножение и деление комплексных чисел выполняется проще, если они записаны в показательной форме.

Перемножим два комплекса, заданные своими модулями  $A$  и  $B$  и аргументами  $\alpha$  и  $\beta$ . Произведение их

$$Ae^{j\alpha} \cdot Be^{j\beta} = AB e^{j(\alpha+\beta)} = Ce^{j\gamma} = \underline{C}, \quad (10.10)$$

откуда

$$C = AB \text{ и } \gamma = \alpha + \beta. \quad (10.11)$$

Таким образом, произведение двух комплексных чисел представляет собой новый комплекс, модуль которого равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов перемножаемых комплексных чисел.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Если один из множителей — положительное действительное число  $b$ , то в результате умножения комплекса  $\underline{A}$  или изображающего его вектора  $\underline{A} = Ae^{j\alpha}$  на число  $b$  получается комплекс или вектор

$$\underline{C} = A b e^{j\alpha}, \quad (10.12)$$

направленный вдоль вектора  $A$  и равный по модулю произведению модуля  $A$  и числа  $b$ .

2. Если один из множителей — поворотный множитель  $e^{j\beta}$ , то в результате умножения вектора  $\underline{A} = Ae^{j\alpha}$  на  $e^{j\beta}$  получается вектор

$$\underline{C} = A e^{j(\alpha+\beta)}, \quad (10.13)$$

модуль которого равен модулю  $A$ , а аргумент — сумме аргументов сомножителей.

3. Комплексные величины, имеющие одинаковые модули и равные по абсолютному значению, но противоположные по знаку аргументы, называются сопряженными. Сопряженный комплекс будем отмечать звездочкой. Например, для комплекса  $\underline{A} = Ae^{j\alpha} = A' + jA''$  сопряженным будет:

$$\underline{\dot{A}} = A e^{-j\alpha} = A' - jA'' \quad (10.14)$$



(изменяется знак аргумента и знак перед мнимой частью).

Произведение сопряженных множителей равно квадрату модуля:

$$\underline{C} = \underline{A} \underline{A}^* = A e^{j\alpha} \cdot A e^{-j\alpha} = A^2. \quad (10.15)$$

4. Комплексы  $\underline{A}$  и  $1/\underline{A}$ , произведение которых равно единице:

$$\underline{A} \frac{1}{\underline{A}} = A e^{j\alpha} \frac{1}{A} e^{-j\alpha} = 1, \quad (10.16)$$

называются обратными.

Если сомножители заданы в алгебраической форме, например  $\underline{A} = A' + jA''$  и  $\underline{B} = B' + jB''$ , то их произведение

$$\begin{aligned} \underline{A} \underline{B} &= (A' + jA'')(B' + jB'') = A'B' + A'jB'' + jA''B' + \\ &+ j^2 A''B'' = (A'B' - A''B'') + j(A'B'' + A''B') = \\ &= C' + jC'' = \underline{C}. \end{aligned}$$

**Пример 10.4.** Определить произведение комплексов  $\underline{A} = 40e^{j10^\circ}$  и  $\underline{B} = 5e^{j25^\circ}$ .

**Решение.**  $\underline{C} = \underline{A} \underline{B} = 40e^{j10^\circ} \cdot 5e^{j25^\circ} = 200e^{j35^\circ}$ .

**Пример 10.5.** Определить произведение комплексов  $\underline{A} = 70e^{j30^\circ}$  и  $\underline{B} = 0,5e^{-j10^\circ}$ .

**Решение.**  $\underline{C} = \underline{A} \underline{B} = 70e^{j30^\circ} \cdot 0,5e^{-j10^\circ} = 35e^{j20^\circ}$ .

**Пример 10.6.** Определить произведение комплексов  $\underline{A} = 2 + j4$  и  $\underline{B} = 8 + j6$ .

**Решение.**  $\underline{C} = \underline{A} \underline{B} = (2 + j4)(8 + j6) = (2 \cdot 8 - 4 \cdot 6) + j(2 \cdot 6 + 4 \cdot 8) = -8 + j44$ .

Частное от деления комплекса  $\underline{A} = A e^{j\alpha}$  на комплекс  $\underline{B} = B e^{j\beta}$  равно произведению комплекса  $\underline{A}$  и комплекса  $1/\underline{B}$  — обратного делителю  $\underline{B}$ , таким образом,

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{A e^{j\alpha}}{B e^{j\beta}} = \frac{A}{B} e^{j\alpha} e^{-j\beta} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha - \beta)} = C e^{j\gamma} = \underline{C}, \quad (10.17)$$

откуда

$$C = A/B \text{ и } \gamma = \alpha - \beta. \quad (10.18)$$

Таким образом, частное от деления одного комплекса на другой представляет собой новый комплекс, модуль которого равен частному от деления модулей, а аргумент равен разности аргументов делимого и делителя.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Если делимое — комплекс  $\underline{A} = Ae^{j\alpha}$ , а делитель — положительное действительное число, то частное является комплексом или вектором

$$\underline{C} = (A/b)e^{j\alpha}, \quad (10.19)$$

направленным вдоль вектора  $\underline{A}$  и равным по модулю частному от деления модуля  $A$  на число  $b$ .

2. Если делимое — комплекс  $\underline{A} = Ae^{j\alpha}$ , а делитель — поворотный множитель  $e^{j\beta}$ , то частное будет комплексом или вектором

$$\underline{C} = \frac{Ae^{j\alpha}}{e^{j\beta}} = Ae^{j(\alpha-\beta)} = Ce^{j\gamma}, \quad (10.20)$$

повернутым относительно вектора  $\underline{A}$  на угол  $-\beta$  с модулем, равным модулю делимого  $A$ .

Если делимое и делитель даны в алгебраической форме, то следует предварительно обе величины перевести в показательную форму или устранить мнимость в знаменателе, что достигается умножением числителя и знаменателя дроби на комплекс, сопряженный делителю:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{A}}{\underline{B}} &= \frac{A' + jA''}{B' + jB''} \frac{B' - jB''}{B' - jB''} = \frac{A' B' - A' jB'' + jA'' B' + A'' B''}{(B')^2 + (B'')^2} = \\ &= \frac{A' B' + A'' B''}{(B')^2 + (B'')^2} + j \frac{A'' B' - A' B''}{(B')^2 + (B'')^2} = C' + jC'' = \underline{C}. \end{aligned} \quad (10.21)$$

**Пример 10.7.** Определить частное  $\underline{C}$  от деления  $\underline{A} = 50 e^{j30^\circ}$  на  $\underline{B} = 2,5 e^{j50^\circ}$ .

**Решение.**

$$\underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{50e^{j30^\circ}}{2,5e^{j50^\circ}} = 20e^{j(30^\circ-50^\circ)} = 20e^{-j20^\circ}.$$

**Пример 10.8.** Определить частное  $\underline{C}$  от деления комплекс  $\underline{A} = 2 + j4$  на  $\underline{B} = 0,8 + j0,4$ .

**Решение.**

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{2 + j4}{0,8 + j0,4} \frac{0,8 - j0,4}{0,8 - j0,4} = \\ &= \frac{2 \cdot 0,8 - j2 \cdot 0,4 + j4 \cdot 0,8 + j4(-j0,4)}{0,8^2 + 0,4^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \cdot 0,8 + 4 \cdot 0,4 + j(4 \cdot 0,8 - 2 \cdot 0,4)}{0,64 + 0,16} = 4,0 + j3,0.$$

Для расчетов с комплексными числами рекомендуется применять микрокалькулятор.

### 10.3. КОМПЛЕКСНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Выше (§ 8.3) было установлено, что мгновенное значение синусоидального тока или напряжения можно изображать проекцией вращающегося вектора на неподвижную ось. Покажем теперь, что вращающиеся векторы, а следовательно, и изображаемые ими синусоидальные величины можно выражать комплексными числами.

Допустим, что требуется представить комплексом ток, амплитуда которого  $I_m$ , а начальная фаза  $\psi$ , т. е.

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi). \quad (10.22)$$

Изобразим на комплексной плоскости под углом  $\psi$  к положительной полуоси действительных величин вектор

$$\underline{I_m} = I_m e^{j\psi} \quad (10.23)$$

длиной  $I_m$ , повернутый относительно оси действительных величин на угол  $\psi$  (рис. 10.5). Если этот вектор вращать

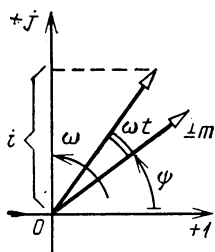


Рис. 10.5 Вектор тока на комплексной плоскости

в положительном направлении с угловой скоростью  $\omega$ , то мгновенное значение тока  $i$  изобразится проекцией вращающегося вектора  $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$  на мнимую ось; это условно можно записать так:

$$i = \text{Im} [I_m e^{j(\omega t + \psi)}] = \text{Im} [I_m e^{j\psi} e^{j\omega t}].$$

В § 8.3 было отмечено, что взаимное расположение векторов на векторной диаграмме с течением времени не изменяется; поэтому нет необходимости вращать векторы при изображении синусоидально изменяющихся величин на

комплексной плоскости. Достаточно изобразить векторы в начальный момент времени, т. е. представить их комплексами. Например, ток  $i$  (10.22) можно представить в символической записи (10.23).

Учитывая, что на векторных диаграммах обычно откладывают не амплитуды, а действующие значения синусоидальных величин, комплексное значение тока, или, короче, комплекс тока, запишем в виде

$$\underline{I} = I e^{j\psi} \quad (10.23a)$$

(отсутствие индекса  $m$  указывает на то, что записано действующее значение комплексной величины).

Аналогично выполняется символическая запись напряжения.

Если

$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha), \quad (10.24)$$

то комплекс напряжения

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\alpha} \text{ и } \underline{U} = U e^{j\alpha}. \quad (10.25)$$

Частное от деления комплекса напряжения на выводах цепи (ветви) на комплекс тока называется комплексным сопротивлением цепи и обозначается прописной буквой  $\underline{Z}$ , т. е.

$$\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I} = \frac{U e^{j\alpha}}{I e^{j\psi}} = z e^{j(\alpha-\psi)} = z e^{j\varphi} \quad (10.26)$$

или

$$\underline{Z} = z e^{j\varphi} = z \cos \varphi + j z \sin \varphi = r + jx, \quad (10.27)$$

где  $r = z \cos \varphi$  — активное сопротивление;  $x = z \sin \varphi$  — реактивное сопротивление и  $z = \sqrt{r^2 + x^2}$  — полное сопротивление.

Придав выражению (10.26) другой вид, получим

$$\underline{I} = \underline{U}/\underline{Z} = \underline{U}/(r + jx) \quad (10.28)$$

— закон Ома в комплексной форме.

Например, для последовательной схемы замещения катушки индуктивности (рис. 9.14) при токе  $i = I_m \sin \omega t$  напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ , где  $\varphi = \varphi_L$ , или в комплексной форме

$$\underline{I} = I e^{j0} = I \text{ и } \underline{U} = U e^{j\varphi},$$

а комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I} = Ue^{j\varphi}/I = ze^{j\varphi} = z(\cos \varphi + j \sin \varphi); \quad (10.29)$$

так как для цепи с индуктивностью  $x = x_L$ , то

$$\underline{Z} = r + jx_L = ze^{j\varphi}. \quad (10.29a)$$

Комплексное сопротивление и его действительная и мнимая составляющие могут быть представлены на комплексной плоскости (рис. 10.6) в виде треугольника сопротивлений.

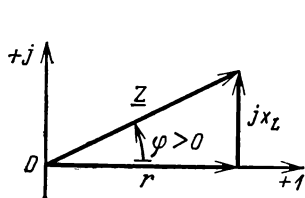


Рис. 10.6. Треугольник сопротивлений  $rL$ -цепи

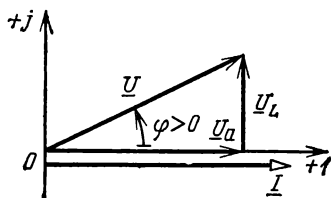


Рис. 10.7. Векторная диаграмма  $rL$ -цепи

Модуль комплексного сопротивления, обозначенный строчной буквой  $z$ , определяется по формуле (9.36):

$$z = \sqrt{r^2 + x_L^2},$$

а аргумент — через его синус или тангенс:

$$\sin \varphi = x_L/z; \quad \operatorname{tg} \varphi = x_L/r, \text{ т. е. } \varphi > 0.$$

Из (10.28) напряжение на выводах цепи

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} = r \underline{I} + jx_L \underline{I} = \underline{U}_a + \underline{U}_L.$$

Первое слагаемое этого выражения представляет собой комплексное напряжение на активном сопротивлении. Это напряжение совпадает по фазе с током (рис. 10.7), и, естественно, комплексы  $rI = rI$  и  $I = I$  имеют одинаковый аргумент, равный нулю. Второе слагаемое — комплексное напряжение на индуктивности  $jx_L I = jx_L I = x_L I e^{j90^\circ}$ , аргумент которого равен  $90^\circ$  (как уже известно, напряжение на индуктивности опережает по фазе ток на  $90^\circ$ ). Таким образом, множитель  $j$  в выражении  $jx_L = j\omega L$  ясно показывает, что на индуктивности между напряжением и током имеется сдвиг фаз  $90^\circ$ .

Для неразветвленной цепи с активным сопротивлением и емкостью (рис. 9.20) при  $i = I_m \sin \omega t$  напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ , где  $\varphi = -\varphi_c$ , комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = r + jx = r - jx_c = ze^{j\varphi}, \quad (10.30)$$

где  $x = -x_c$ ;  $z = \sqrt{r^2 + x_c^2}$ ;  $\sin \varphi = -x_c/z$ ;  $\operatorname{tg} \varphi = -x_c/r$ , т. е.  $\varphi < 0$ .

Треугольник сопротивлений показан на рис. 10.8.

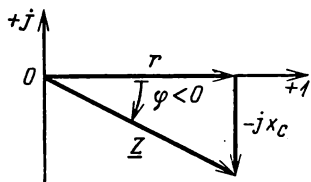


Рис. 10.8. Треугольник сопротивлений  $rC$ -цепи

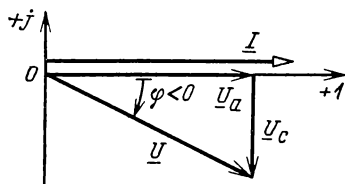


Рис. 10.9. Векторная диаграмма  $rC$ -цепи

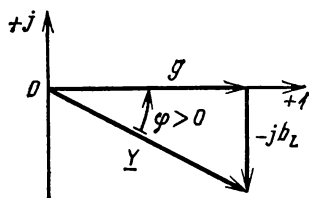


Рис. 10.10. Треугольник проводимостей  $rL$ -цепи

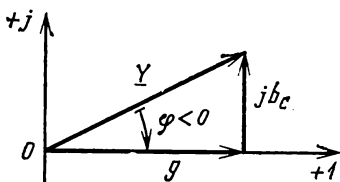


Рис. 10.11. Треугольник проводимостей  $rC$ -цепи

### Напряжение на емкости

$$\underline{U}_c = -jx_c \underline{I} = x_c \underline{I} e^{-j90^\circ}$$

отстает по фазе от тока на  $90^\circ$  (рис. 10.9). Напряжение на выводах цепи

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} = r \underline{I} - jx_c \underline{I} = \underline{U}_a + \underline{U}_c.$$

Следует обратить внимание на то, что комплекс  $\underline{Z}$  не зависит от выбора начальной фазы тока или напряжения. Например, для  $rL$ -цепи при любой начальной фазе тока напряжение будет опережать ток цепи на угол  $\varphi$ , тангенс которого равен отношению  $x_L/r$ . Действительно, выбрав у тока начальную фазу  $\psi$  (10.22), т. е. приняв  $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$ , запишем напряжение (10.24)  $u = U_m \sin(\omega t + \alpha)$ , которое

должно по-прежнему опережать ток на тот же угол  $\varphi$ , так как  $\operatorname{tg} \varphi = x_L/r$  имеет то же значение, что и при нулевой начальной фазе. Следовательно,  $\alpha = \psi + \varphi$  и комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = \frac{U}{I} = \frac{Ue^{j\alpha}}{Ie^{j\psi}} = \frac{U}{I} e^{j(\alpha-\psi)} = ze^{j\varphi}. \quad (10.31)$$

При расчетах разветвленных цепей часто вводят комплексную проводимость  $\underline{Y}$  — величину, обратную комплексному сопротивлению:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{ze^{j\varphi}} = \frac{1}{z} e^{-j\varphi} = ye^{-j\varphi} = y \cos \varphi - jy \sin \varphi = g - jb, \quad (10.32)$$

где  $g = y \cos \varphi$  — активная проводимость;  $b = y \sin \varphi$  — реактивная проводимость.

Например, для последовательной  $rL$ -цепи комплексная проводимость (рис. 10.10)

$$\begin{aligned} \underline{Y} = g - jb &= \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{r + jx_L} = \frac{1}{r + jx_L} \times \\ &\times \frac{r - jx_L}{r - jx_L} = \frac{r - jx_L}{r^2 + x_L^2} = g - jb_L, \end{aligned}$$

где активная проводимость  $g$  и индуктивная  $b_L$  определяются по известным уже выражениям (9.75)

$$g = r/z^2; \quad b_L = x_L/z^2, \quad \text{а } z^2 = r^2 + x_L^2.$$

Модуль комплексной проводимости можно определить по известной формуле (9.78)

$$y = \sqrt{g^2 + b_L^2},$$

а аргумент — через его синус или тангенс:

$$\sin \varphi = b/y = b_L/y; \quad \operatorname{tg} \varphi = b/g = b_L/g,$$

откуда видно, что  $\varphi > 0$ , т. е. напряжение опережает по фазе ток.

Для последовательной  $rC$ -цепи комплексная проводимость (рис. 10.11)

$$\underline{Y} = g - jb = ye^{-j\varphi} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{r - jx_C} = \frac{r + jx_C}{z^2} = g + jb_C,$$

где активная проводимость  $g$  и емкостная  $b_C$  определяются

по известным уже выражениям (9.75)

$$g = \frac{r}{z^2}; \quad b_c = \frac{x_c}{z^2} \text{ и } z^2 = r^2 + x_c^2.$$

Модуль комплексной проводимости

$$y = \sqrt{g^2 + b_c^2},$$

а аргумент определяется через синус или тангенс:

$$\sin \varphi = \frac{b}{y} = \frac{-b_c}{y}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{g} = \frac{-b_c}{g},$$

откуда следует, что  $\varphi < 0$ , т. е. ток опережает по фазе напряжение.

Наконец, для  $rLC$ -цепи можно написать

$$\underline{Z} = r + jx_L - jx_C = r + j(x_L - x_C) = r + jx = ze^{j\varphi};$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{r^2 + x^2} = g - jb,$$

где активная и реактивная проводимости

$$g = \frac{r}{r^2 + x^2} = \frac{r}{z^2}; \quad b = \frac{x}{r^2 + x^2} = \frac{x_L - x_C}{z^2};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{r} = \frac{b}{g};$$

угол  $\varphi > 0$  при  $x > 0$  или при  $b > 0$ ;

угол  $\varphi < 0$  при  $x < 0$  или при  $b < 0$ .

**Пример 10.9.** Неразветвленная цепь с активным сопротивлением  $r=80$  Ом и емкостным сопротивлением  $x_c=60$  Ом находится под напряжением  $u=183\sin(\omega t + 25^\circ)$  В. Определить ток в цепи.

**Решение.** Комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = r + jx = r - jx_C = 80 - j60 \text{ Ом};$$

модуль и аргумент этого сопротивления

$$z = \sqrt{r^2 + x_C^2} = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100 \text{ Ом};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = x/r = -x_C/r = -60/80 = -0,75; \quad \varphi = -37^\circ.$$

То же сопротивление в показательной форме

$$\underline{Z} = ze^{j\varphi} = 100e^{-j37^\circ} \text{ Ом}.$$



Ток в цепи

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{(183/\sqrt{2})e^{j25}}{100e^{-j37^\circ}} = 1,3e^{j62^\circ} \text{ A};$$

$$i = 1,3\sqrt{2} \sin(\omega t + 62^\circ) \text{ A}.$$

Если ток и напряжение цепи выражены в комплексной форме, то активную и реактивную мощности цепи определяют, умножая комплексное напряжение на сопряженный комплексный ток.

Допустим, что  $\underline{I} = Ie^{j\psi}$ , напряжение  $\underline{U} = Ue^{j\alpha} = Ue^{j(\varphi+\psi)}$ , т. е. вектор напряжения опережает вектор тока на угол  $\varphi$ , что при положительном значении угла  $\varphi$  соответствует индуктивной нагрузке.

Произведение комплекса напряжения и сопряженного комплекса тока представляет мощность в комплексной форме или, короче, комплексную мощность. Действительно,

$$\begin{aligned} \underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* &= Ue^{j(\varphi+\psi)} \cdot Ie^{-j\psi} = UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = \\ &= P + jQ. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Таким образом, действительная часть полученного комплекса выражает активную мощность, а мнимая — реактивную мощность цепи. При емкостной нагрузке, т. е. при  $\varphi < 0$ , мнимая часть комплексной мощности имеет отрицательный знак ( $\sin \varphi < 0$ ).

**Пример 10.10.** Определить активную и реактивную мощности цепи, если ток  $I = 10 e^{j25^\circ}$  А, напряжение  $\underline{U} = 220 e^{-j12^\circ}$  В.

Решение.

$$\begin{aligned} \underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* &= 220 e^{-j12^\circ} \cdot 10 e^{-j25^\circ} = 2200 e^{-j37^\circ} = \\ &= 2200 \cos(-37^\circ) + j 2200 \sin(-37^\circ) = 2200 \cdot 0,8 - \\ &- j 2200 \cdot 0,6 = 1760 - j 1320 \text{ В} \cdot \text{А}; \quad P = 1,760 \text{ кВт}; \quad Q = -1,320 \text{ квар}. \end{aligned}$$

#### 10.4. ЗАКОНЫ КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Для узла электрической цепи переменного тока по первому закону Кирхгофа сумма мгновенных значений токов, направленных к узлу, равна сумме мгновенных значений токов, направленных от узла. То же самое правило справедливо и при записи токов в комплексной форме.

Например, для узла А (рис. 10.12) получим первый

закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_3 + \underline{I}_5 = \underline{I}_2 + \underline{I}_4, \quad (10.34)$$

или сумма комплексных токов, направленных к узлу, равна сумме комплексных токов, направленных от него.

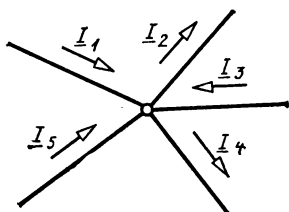


Рис. 10.12. Узел электрической цепи

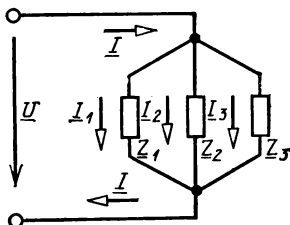


Рис. 10.13. Схема к примеру 10.11

Считая токи, направленные от узла положительными, а токи, направленные к узлу, отрицательными, можно написать и так:

$$-\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 + \underline{I}_4 - \underline{I}_5 = 0, \quad (10.35)$$

или в общем виде

$$\Sigma \underline{I} = 0, \quad (10.36)$$

т. е. алгебраическая сумма комплексных токов в узле равна нулю. Уравнение (10.36) по виду ничем не отличается от уравнения (2.2), выражающего то же правило для цепи постоянного тока. Для замкнутого контура электрической цепи переменного тока по второму закону Кирхгофа алгебраическая сумма мгновенных значений ЭДС, действующих в контуре, равна алгебраической сумме мгновенных значений падений напряжения на отдельных его участках.

Приписав ЭДС и токам, совпадающим по направлению с направлением обхода контура, знак плюс, а несовпадающим — минус, получим при комплексной записи для любого замкнутого контура

$$\begin{aligned} \Sigma \underline{E} &= \Sigma \underline{Z} \underline{I} = \Sigma r \underline{I} + \Sigma j x_L \underline{I} + \Sigma (-j x_C) \underline{I} = \\ &= \Sigma r \underline{I} + \Sigma j \omega L \underline{I} + \Sigma \left( -j \frac{1}{\omega C} \right) \underline{I}, \end{aligned} \quad (10.37)$$

где к числу ЭДС  $E$  относится только ЭДС источников, так как ЭДС самоиндукции учитываются соответствующими

падениями напряжения ( $j\omega L I = j\omega L I$ ). Таким образом, для всякого замкнутого контура алгебраическая сумма комплексных ЭДС источников питания равна алгебраической сумме комплексных падений напряжений.

Последнее уравнение называется вторым законом Кирхгофа в комплексной форме. Оно также совпадает по виду с уравнением для цепи постоянного тока (2.3). Как и в цепях постоянного тока, для записи уравнений по законам Кирхгофа необходимо задаться положительными направлениями токов.

**Пример 10.11.** Определить ток  $i$  в неразветвленной части цепи (рис. 10.13), если токи в ветвях  $i_1 = 14 \sin(\omega t + 66^\circ)$  А;  $i_2 = 6,36 \sin(\omega t + 116,5^\circ)$  А;  $i_3 = 8,3 \sin(\omega t - 59^\circ)$  А.

Решение. Определим комплексы токов в ветвях:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{14}{\sqrt{2}} e^{j66^\circ} = \frac{14}{\sqrt{2}} (\cos 66^\circ + j \sin 66^\circ) = (4 + j9) \text{ А}; \\ \underline{I}_2 &= \frac{6,36}{\sqrt{2}} e^{j116,5^\circ} = \frac{6,36}{\sqrt{2}} (\cos 116,5^\circ + j \sin 116,5^\circ) = (-2 + j4) \text{ А}; \\ \underline{I}_3 &= \frac{8,3}{\sqrt{2}} e^{-j59^\circ} = \frac{8,3}{\sqrt{2}} [\cos(-59^\circ) + j \sin(-59^\circ)] = (3 - j5) \text{ А}. \end{aligned}$$

Комплекс тока в неразветвленной части цепи

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 4 + j9 - 2 + j4 + 3 - j5 = 5 + j8 \text{ А}.$$

Мгновенное значение тока  $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$ , где  $I_m = I \sqrt{2} = \sqrt{5^2 + 8^2} \sqrt{2} = 9,44 \sqrt{2}$ ;

$$\operatorname{tg} \psi = 8,5 \text{ и } \psi = 58^\circ,$$

таким образом,  $i = 9,44 \sqrt{2} \sin(\omega t + 58^\circ)$  А.

Введя комплексную форму записи для всех параметров и величин, определяющих режим цепи переменного тока, можно геометрические операции над векторами заменить алгебраическими над изображающими их комплексами, а все соотношения и законы цепей постоянного тока формально применять к расчету цепей переменного тока.

В частности, при комплексной форме записи известные методы расчета цепей постоянного тока (метод контурных токов, метод узловых потенциалов, метод преобразования и др.) применимы и для расчета цепей переменного тока.

Для решения системы уравнений с большим числом неизвестных токов применяют ЭВМ, обеспеченные типовыми

программами. Для расчетов режимов относительно простых цепей, рассмотренных в следующих параграфах, целесообразно применение микрокалькуляторов.

### 10.5. РАСЧЕТ ПРОСТЕЙШИХ ЦЕПЕЙ

Для неразветвленной цепи, например с четырьмя участками (рис. 10.14), по второму закону Кирхгофа комплекс-

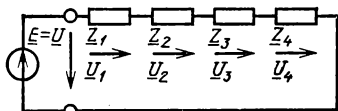


Рис. 10.14. Неразветвленная цепь при  $Z_1 = r_1 + jx_{L1}$ ;  $Z_2 = r_2 - jx_{C2}$ ;  $Z_3 = r_3 + jx_{L3}$ ;  $Z_4 = r_4 - jx_{C4}$

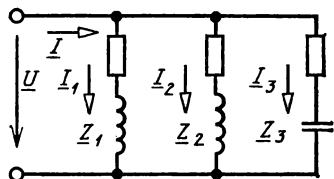


Рис. 10.15. Разветвленная цепь

ная ЭДС источника питания равна алгебраической сумме комплексных падений напряжений:

$$\underline{E} = \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I} + \underline{Z}_3 \underline{I} + \underline{Z}_4 \underline{I} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 + \underline{U}_4.$$

Так как ток на всех участках неразветвленной цепи один и тот же, то

$$\underline{E} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) \underline{I},$$

откуда

$$\underline{E}/\underline{I} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 = \underline{Z}, \quad (10.38)$$

т. е. комплексное эквивалентное или общее сопротивление неразветвленной цепи равно сумме всех комплексных сопротивлений этой цепи.

При заданных параметрах участков (рис. 10.14)

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= r_1 + jx_{L1} + r_2 - jx_{C2} + r_3 + jx_{L3} + \\ &+ r_4 - jx_{C4} = (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + j(x_{L1} + x_{L3} - \\ &- x_{C2} - x_{C4}) = r_s + jx_s. \end{aligned}$$

Ток в цепи

$$\underline{I} = \underline{U}/\underline{Z}.$$

Напряжения на отдельных участках

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}; \quad \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}; \quad \underline{U}_3 = \underline{Z}_3 \underline{I}; \quad \underline{U}_4 = \underline{Z}_4 \underline{I}.$$

Комплексная мощность цепи определяется по формуле (10.33).

По первому закону Кирхгофа комплексный ток в неразветвленной части цепи, имеющей, например, три параллельные ветви (рис. 10.15), равен алгебраической сумме комплексных токов всех ветвей цепи, т. е.

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3.$$

По закону Ома токи в ветвях и общий ток

$$\underline{I}_1 = \underline{U}/\underline{Z}_1; \quad \underline{I}_2 = \underline{U}/\underline{Z}_2; \quad \underline{I}_3 = \underline{U}/\underline{Z}_3; \quad \underline{I} = \underline{U}/\underline{Z};$$

где  $\underline{Z}$  — общее или эквивалентное сопротивление цепи.

Подставив выражения токов в предыдущее равенство, получим

$$\underline{U}/\underline{Z} = \underline{U}/\underline{Z}_1 + \underline{U}/\underline{Z}_2 + \underline{U}/\underline{Z}_3,$$

или после сокращения

$$1/\underline{Z} = 1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3.$$

Переходя к комплексным проводимостям, найдем, что

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3, \quad (10.39)$$

т. е. комплексная эквивалентная или общая проводимость разветвленной цепи равна сумме комплексных проводимостей всех параллельных ветвей.

В частном случае для часто встречающейся цепи с двумя параллельными ветвями можно написать

$$1/\underline{Z}_{12} = 1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 \quad \text{или} \quad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2). \quad (10.40)$$

**Пример 10.12.** Определить эквивалентное сопротивление двух параллельных ветвей, если  $\underline{Z} = 1 - j0,5$  Ом и  $\underline{Z}_2 = 1 + j0,5$  Ом.

**Решение.** Эквивалентное сопротивление

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{12} &= \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(1 - j0,5)(1 + j0,5)}{1 - j0,5 + 1 + j0,5} = \\ &= \frac{1 + j0,5 - j0,5 + 0,25}{2} = 0,625 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

## 10.6. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ СО СМЕШАННЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ

Расчет режима цепи с последовательно-параллельным (смешанным) соединением сопротивлений (рис. 10.16) при заданном напряжении на выводах  $\underline{U}$  и известных парамет-

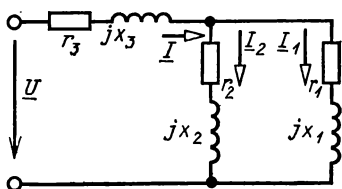


Рис. 10.16. Цепь со смешанным соединением элементов

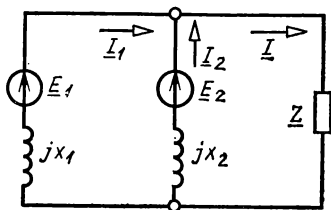


Рис. 10.17. Схема к примеру 10.13.

рах цепи заключается в определении токов, напряжений и мощностей всех участков цепи. Если применить комплексный метод, то расчет таких цепей аналогичен расчету цепи постоянного тока с последовательно-параллельным соединением сопротивлений (§ 2.4).

Для цепи (рис. 10.16) расчет выполняется в следующем порядке.

Определяется сопротивление разветвленной части цепи:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2).$$

Так как разветвленная часть цепи соединена последовательно с неразветвленным участком, то сопротивление всей цепи

$$\underline{Z} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{12}.$$

Если число параллельных ветвей более двух, то следует сначала суммировать комплексные проводимости ветвей аналогично суммированию для трех ветвей по (10.39), а затем перейти к сопротивлению параллельного соединения и вычислению  $\underline{Z}$ .

Ток в неразветвленной части цепи, равный сумме токов в параллельных ветвях,

$$\underline{I} = \underline{U} / \underline{Z}.$$

Напряжение на неразветвленном участке  $\underline{Z}_3$

$$\underline{U}_3 = \underline{Z}_3 \underline{I}.$$

Напряжение на параллельных ветвях

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{Z}_{12} \underline{I}.$$

Токи в параллельных ветвях

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 / \underline{Z}_1; \quad \underline{I}_2 = \underline{U}_2 / \underline{Z}_2.$$

Активные и реактивные мощности определяются по формуле (10.33).

В § 10.4 уже отмечалось, что применение комплексного метода позволяет для расчета цепей переменного тока пользоваться всеми методами расчета сложных цепей постоянного тока, рассмотренными в гл. 2.

В качестве иллюстрации рассмотрим применение метода узлового напряжения (см. § 2.9) на примере цепи с двумя источниками питания.

**Пример 10.13.** Определить токи во всех участках цепи (рис. 10.17), если ЭДС  $e_1 = 284 \sin \omega t$  В и  $e_2 = 298 \sin \omega t$  В. Направления действия ЭДС указаны стрелками. Внутренние сопротивления источников питания индуктивные  $x_1 = x_2 = 0,1$  Ом. Сопротивление нагрузки  $\underline{Z} = r + jx = 1 + j0,5$  Ом.

**Решение.** Проводимости участков цепи

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{jx_1} = \frac{1}{j0,1} = -j10 \text{ См (так как } \frac{1}{j} = -j);$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{r + jx} = \frac{1}{1 + j0,5} \cdot \frac{1 - j0,5}{1 - j0,5} = 0,8 - j0,4 \text{ См.}$$

Комплексные ЭДС

$$\underline{E}_1 = 284 / \sqrt{2} = 220 \text{ В; } \underline{E}_2 = 298 / \sqrt{2} = 210 \text{ В.}$$

Напряжение между узлами А и В

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB} = \underline{U} &= \frac{\Sigma E \underline{Y}}{\Sigma \underline{Y}} = \frac{\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \\ &= \frac{200(-j10) + 210(-j10)}{-j10 - j10 + 0,8 - j0,4} = 200,66 - j7,87 \text{ В.} \end{aligned}$$

Комплексные токи в участках цепи

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1 - \underline{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{200 - 200,66 + j7,87}{j0,1} = 78,7 + j6,6 = 78,8 e^{j4^\circ 50'} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2 - \underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{210 - 200,66 + j7,87}{j0,1} = 78,7 - j93,4 = 122e^{-j50^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 78,7 + j6,6 + 78,7 - j93,4 = 157,4 - j86,8 = 180e^{-j39^\circ} \text{ A}.$$

Мгновенные значения токов

$$i_1 = 111,4 \sin(\omega t + 4^\circ 50') \text{ A}; \quad i_2 = 172,6 \sin(\omega t - 50^\circ) \text{ A};$$

$$i = 254 \sin(\omega t - 39^\circ) \text{ A}.$$

## 10.7. КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ

При изменении какого-либо параметра цепи, например сопротивления резистора, емкости конденсатора, индуктивности катушки и т. д., для токов и напряжений на отдельных участках цепи получаются новые значения. Проследить за изменением режима цепи можно построением серии векторных диаграмм.

Предположим, что в цепи рис. 10.18 сопротивление резистора  $r$  регулируется в пределах от значения  $r_1$  до значения  $r_2 = 2r_1$ . Построим векторную диаграмму при  $r = r_1$  (рис. 10.19). Ток  $\underline{I}_C$  опережает по фазе на  $90^\circ$  общее для двух

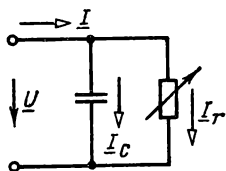


Рис. 10.18. Параллельное соединение конденсатора и переменного резистора

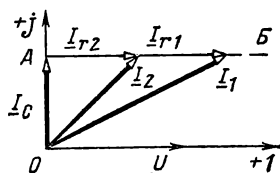


Рис. 10.19. Линейная диаграмма для схемы рис. 10.8.

ветвей напряжение  $U$ , начальная фаза которого выбрана равной нулю, ток  $\underline{I}_{r1} = U/r_1$  совпадает по фазе с напряжением. Ток источника питания  $\underline{I} = \underline{I}_1 = \underline{I}_C + \underline{I}_{r1}$  построен суммированием двух векторов.

При сопротивлении  $r_2 = 2r_1$  ток  $\underline{I}_{r2} = U/2r_1$  становится в два раза меньше. Как видно из диаграммы рис. 10.19, модуль тока (длина вектора  $\underline{I} = \underline{I}_2 = \underline{I}_C + \underline{I}_{r2}$ ) уменьшается, но менее чем в два раза и, кроме того, становится другим сдвиг фаз между напряжением и общим током. Аналогичные изменения общего тока получаются и при других значениях сопротивления  $r$ , причем конец вектора  $\underline{I}$  при всех



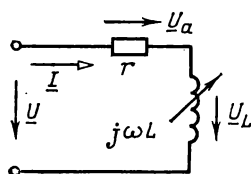


Рис. 10.20. Неразветвленная цепь с индуктивностью, которую можно изменять

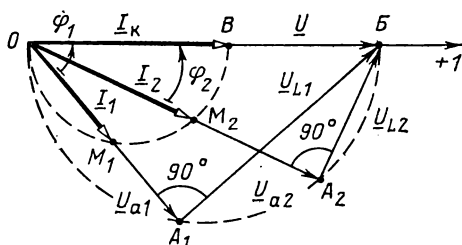


Рис. 10.21. Круговая диаграмма для схемы рис. 10.20

режимах находится на прямой  $AB$  (штриховая линия на рис. 10.19) — линейной диаграмме тока  $I$ .

Линейная диаграмма является частным случаем диаграмм, которые составляют части окружностей и поэтому называются **круговыми диаграммами**.

Рассмотрим построение круговой диаграммы для простой неразветвленной  $rL$ -цепи (рис. 10.20, на котором указано, что индуктивность можно изменять).

На рис. 10.21 при  $L=L_1$  построен треугольник напряжений  $OA_1B$  (нулевая начальная фаза у напряжения источника питания  $\underline{U}$ ). Для построения сначала надо определить ток  $\underline{I}_1 = \underline{U} / \underline{Z}_1 = \underline{U} / (r + j\omega L_1)$ , который отстает от напряжения по фазе на угол  $\varphi = \varphi_1$ , определяемый по (9.33):

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{U_{L1}}{U_{a1}} = \frac{\omega L_1 I_1}{r I_1} = \frac{\omega L_1}{r}.$$

Напряжение  $\underline{U}_{a1} = r \underline{I}_1$  совпадает по фазе с током, а  $\underline{U}_{L1} = j\omega L_1 \underline{I}_1$  опережает ток по фазе на  $90^\circ$ .

Так как ток и угол  $\varphi$  зависят от индуктивности  $L$ , то при  $L=L_2$  получим новое значение тока  $\underline{I} = \underline{I}_2$  и угла  $\varphi = \varphi_2$  и другой треугольник напряжений ( $O\bar{A}_2\bar{B}$ ). Треугольники напряжений для цепи рис. 10.20 прямоугольные (рис. 10.21). Поэтому согласно известной теореме геометрии вершина  $A$  ( $A_1, A_2 \dots$ ), т. е. конец вектора напряжений  $\underline{U}_a$ , находится на дуге окружности — круговой диаграмме, диаметром которой служит гипотенуза  $OB$ , т. е. вектор напряжения питания  $\underline{U}$ . Ток  $\underline{I} = \underline{U}_a / r$  *изменяется пропорционально напряжению  $\underline{U}_a$*  (коэффициент пропорциональности  $1/r$ ). Следовательно, и конец вектора тока  $\underline{I}$  находится на дуге окружности — круговой диаграмме (точки  $M_1, M_2 \dots$ ).

Определим диаметр  $OB$  круговой диаграммы тока или, как видно из рис. 10.21, наибольшее значение тока. Ток в цепи рис. 10.20 достигает наибольшего значения при  $L=0$  (коротком замыкании участка с индуктивностью), т. е.

$$I = I_K = U/r.$$

Чтобы найти ток графически при любом заданном значении индуктивности  $L$ , надо выполнить следующие построения (рис. 10.22, а). Отложим вдоль горизонтально направ-

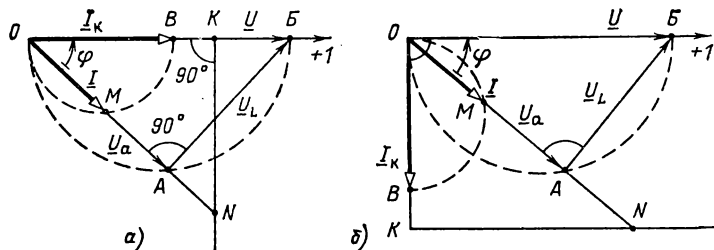


Рис. 10.22. Определение режима цепи по круговой диаграмме при изменении индуктивности (а) и сопротивления (б)

ленной действительной оси отрезок  $OB$ , представляющий в масштабе  $m_U$  напряжение питания  $U$ , и отрезок  $OB$ , равный в масштабе  $m_I$  току  $I_K$ . Построим дуги окружностей. Затем вдоль вектора тока  $I_K$  отложим отрезок  $OK$ , равный в некотором масштабе  $m_r$  сопротивлению  $r$ . Из точки  $K$  проведем линию переменного параметра  $x_L = \omega L$  перпендикулярно прямой  $OB$ , на которой отложим отрезок  $KN$ , равный заданному значению  $x_L$  в том же масштабе сопротивлений  $m_r$ . Соединив прямой линией точки  $O$  и  $N$ , получим на круговых диаграммах точки  $M$  и  $A$ , определяющие режим работы цепи при заданном  $x_L$ . Действительно, прямоугольные треугольники  $OKN$  и  $OAB$  подобные (равны соответствующие углы) и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{KN}{OK} = \frac{x_L}{r} = \frac{x_L I}{r I} = \frac{U_L}{U_a} = \frac{AB}{OA},$$

т. е. отрезки  $AB$  и  $OA$  в масштабе  $m_U$  равны напряжениям  $U_L$  и  $U_r$ . Отрезок  $OM$  в масштабе  $m_I$  равен искомому току  $I$ , а комплексное действующее значение тока  $\underline{I} = I e^{j\varphi}$ .

После определения тока нетрудно рассчитать активную, реактивную и полную мощности.

Если в цепи рис. 10.20 изменяется не индуктивность,

а сопротивление, то ток короткого замыкания

$$\underline{I}_K = \underline{U} / jx_L = \frac{U}{x_L} e^{-j90^\circ},$$

т. е. отстает по фазе от напряжения  $\underline{U} = U$  на угол  $90^\circ$  (рис. 10.22, б). Вдоль вектора тока  $\underline{I}_K$  отложим отрезок  $OK$ , равный в масштабе  $m$ , индуктивному сопротивлению  $x_L$ . Из точки  $K$  проведем перпендикулярно отрезку  $OK$  линию переменного параметра, на которой отложим отрезок  $KN$ , равный в масштабе  $m$ , заданному значению активного сопротивления  $r$ . Соединив прямой линией точки  $O$  и  $N$ , получим на круговых диаграммах точки  $M$  и  $A$ , определяющие режим работы цепи при заданном  $r$ .

Для неразветвленной цепи с активным сопротивлением и емкостью (рис. 9.20) при изменении емкости или сопротивления диаграммы строятся в той же последовательности, как и для цепи рис. 10.20. Отличие заключается в том, что ток опережает по фазе напряжение источника питания, т. е. дуги окружностей и линию переменного параметра надо построить по другую сторону гипотенузы  $OB$  по сравнению с рис. 10.21 и 10.22.

Дополнительные построения необходимы, чтобы получить круговую диаграмму общего тока разветвленной цепи. В качестве примера выберем цепь рис. 10.23, а. Для тока  $\underline{I}_L$

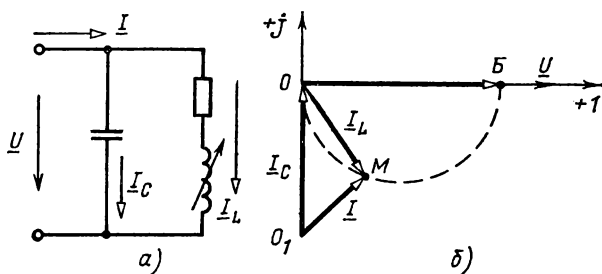


Рис. 10.23. Параллельный контур (а) и круговая диаграмма при изменении индуктивности (б)

этой цепи получается та же диаграмма, что и для тока  $\underline{I}$  цепи рис. 10.20. Общий ток  $\underline{I} = \underline{I}_L + \underline{I}_C$ , т. е. к вектору  $OM$ , изображающему изменяющийся ток  $\underline{I}_L$ , надо добавить постоянный вектор  $OO_1$ , изображающий ток  $\underline{I}_C$ , который опережает по фазе напряжение источника питания  $\underline{U}$  на  $90^\circ$  (рис. 10.23, б). Для тока  $\underline{I}$  получается та же круговая диаграмма,

что и для тока  $I_L$ , но начало вектора  $\underline{I}$  находится не в точке  $O$ , а в точке  $\bar{O}_1$ .

**Пример 10.14.** Построить качественно геометрическое место концов вектора тока в цепи рис. 10.24, а при изменении сопротивления  $r$ .

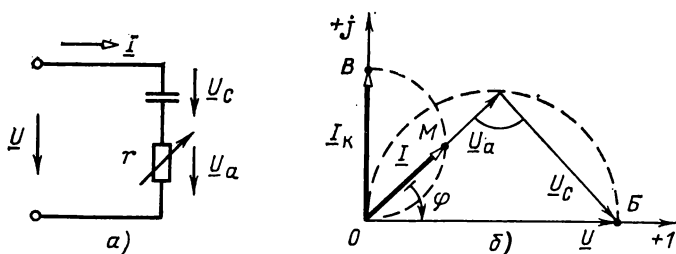


Рис. 10.24. Последовательное соединение конденсатора и переменного резистора (а), круговая диаграмма при изменении сопротивления (б)

**Решение.** Ток в цепи с сопротивлением и емкостью опережает по фазе напряжение (рис. 10.24, б). Так как для напряжений  $\underline{U}_a$  и  $\underline{U}_C$  при изменении сопротивления  $r$  получается круговая диаграмма, то и для тока  $\underline{I} = j\omega C \underline{U}_C$  геометрическим местом концов вектора является круговая диаграмма. При  $r=0$  наибольший ток  $I_K = U/(-jx_C) = j\omega C U$  опережает по фазе напряжение источника  $\underline{U}$  на  $90^\circ$ ,  $\underline{U}_a = 0$  и  $\underline{U}_C = \underline{U}$ .

## 10.8. ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ ДИАГРАММЫ

Напряжение на выводах цепи переменного тока или на любом из ее участков можно выразить комплексным числом — комплексным напряжением и изобразить на комплексной плоскости вектором. Напряжение между двумя точками электрической цепи представляет собой разность потенциалов между этими точками. Следовательно, потенциалы отдельных точек цепи также можно представить комплексными — комплексными потенциалами и изображать соответствующими векторами. Вектор, изображающий комплексный потенциал, начинается в начале координат; его конец обозначают той же буквой (или цифрой), что и точку цепи, потенциал которой изображает вектор. Например, на рис. 10.25 построены векторы комплексных потенциалов  $\underline{\varphi}_a = 10 + j20$  В и  $\underline{\varphi}_b = 30 - j15$  В и разность векторов или вектор напряжения  $\underline{U}_{ab} = \underline{\varphi}_a - \underline{\varphi}_b = 10 + j20 - 30 + j15 = -20 + j35$  В.

Напряжение  $\underline{U}_{a\delta}$  построено по правилу вычитания векторов, так что  $\varphi_a = \varphi_\delta + \underline{U}_{a\delta}$  (рис. 10.25). Поэтому напряжение  $\underline{U}_{a\delta}$  изображается вектором, направленным от точки  $\delta$  (второй индекс у напряжения  $\underline{U}_{a\delta}$ ) к точке  $a$  (первый индекс).

Напряжение  $\underline{U}_{\delta a} = \varphi_\delta - \varphi_a = 30 - j15 - 10 - j20 = 20 - j35$  В. Очевидно,  $\underline{U}_{\delta a} = -\underline{U}_{a\delta}$  и изображается вектором, направленным от точки  $a$  к точке  $\delta$  (штриховая линия на рис. 10.25).

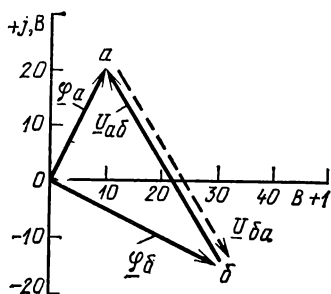


Рис. 10.25. Комплексные потенциалы

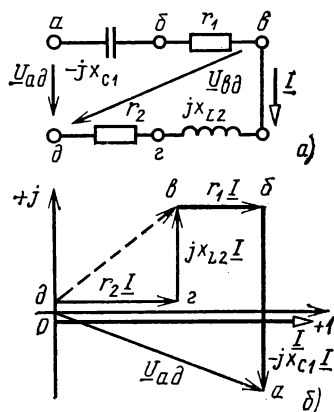


Рис. 10.26. Неразветвленная цепь (а) и ее топографическая диаграмма (б)

Такая векторная диаграмма называется топографической; она удовлетворяет двум условиям: 1) каждой точке электрической цепи соответствует определенная точка на векторной диаграмме и 2) вектор, проведенный из начала координат в какую-либо точку диаграммы, изображает комплексный потенциал соответствующей точки цепи.

При построении топографической диаграммы потенциал одной из точек цепи принимают равным нулю и на диаграмме точку нулевого потенциала совмещают с началом координат. На такой диаграмме отрезок, соединяющий любые две точки, также определяет комплексное напряжение между соответствующими точками цепи.

На рис. 10.26, а представлена неразветвленная цепь. Для построения топографической диаграммы (рис. 10.26, б)

примем, например, потенциал точки  $d$  равным нулю, т. е.  $\varphi_d = 0$ . Обходя контур в направлении, встречном току, определим потенциалы всех точек цепи. Начальную фазу общего тока примем равной нулю, т. е.  $I = I$ , поэтому вектор тока  $I$  направлен вдоль положительной полуоси действительных величин. Потенциал точки  $z$  или  $\varphi_z$  выше потенциала  $\varphi_d$  на падение напряжения в сопротивлении  $r_2$ , т. е. на  $r_2 I$  или  $\varphi_z = \varphi_d + r_2 I = 0 + r_2 I = r_2 I$ . Построив вектор  $r_2 I$ , получим на диаграмме точку  $z$ . Потенциал точки  $b$  или  $\varphi_b$  больше потенциала  $\varphi_z$  на падение напряжения на индуктивном сопротивлении  $x_{L2}$  или в комплексной форме на  $jx_{L2} I$ .

Построив вектор напряжения  $\underline{U}_{az} = \varphi_a - \varphi_z = jx_{L2} I$ , начинающийся в точке  $z$  и опережающий ток по фазе на  $90^\circ$ , получим точку  $b$ . Потенциал точки  $b$  или  $\varphi_b$  больше  $\varphi_a$  на падение напряжения  $r_1 I$ . Построив из точки  $b$  вектор напряжения  $\underline{U}_{bb} = \varphi_b - \varphi_a = r_1 I$ , параллельный току, находим точку  $b$ . Наконец, построив вектор падения напряжения  $\underline{U}_{ba} = \varphi_a - \varphi_b = -jx_C I$ , начинающийся в точке  $b$  и отстающий по фазе от тока на угол  $90^\circ$ , получим точку  $a$  (рис. 10.26, б). Вектор, соединяющий точки  $d$  и  $a$  и направленный от точки  $d$  к точке  $a$ , изображает напряжение  $\underline{U}_{ad}$  на выводах цепи.

Необходимо учесть, что векторы напряжений на топографической диаграмме имеют по отношению к точкам цепи направления, обратные положительным направлениям напряжений относительно тех же точек цепи.

Например, напряжение  $\underline{U}_{ad} = \varphi_a - \varphi_d$ , направленное на схеме (рис. 10.26, а) от точки  $b$  к точке  $d$  (по направлению тока), на топографической диаграмме имеет противоположное направление относительно этих точек, что согласуется с правилом вычитания векторов, согласно которому вектор разности всегда направлен в одну сторону с уменьшаемым вектором.

## 10.9. ПОЛУЧЕНИЕ УГЛА СДВИГА ФАЗ $90^\circ$

В ряде электрических цепей и, в частности, в некоторых измерительных приборах необходимо получить заданный угол сдвига фаз между напряжением на выводах цепи и током в одной из ветвей. Одна из подобных цепей для полу-

чения угла сдвига фаз  $90^\circ$  показана на рис. 10.27, где параллельно с катушкой с сопротивлением  $Z_0$  включен резистор, а на рис. 10.28 дана векторная диаграмма этой цепи. Нулевая начальная фаза выбрана у тока катушки  $\underline{I}_0$ .

На этой диаграмме (а также на последующих) оси координат не изображены. Изображение осей не обязательно

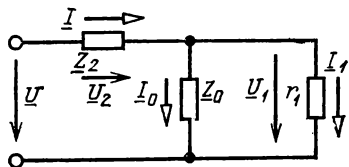
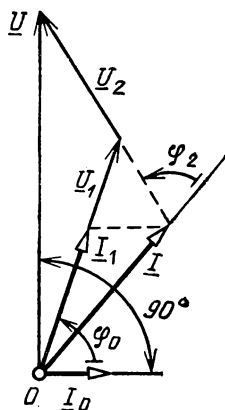


Рис. 10.27. Цепь для получения сдвига фаз  $90^\circ$  между напряжением и током

Рис. 10.28. Векторная диаграмма цепи, изображенной на рис. 10.27



но, так как важны сдвиги по фазе между отдельными величинами, и, как указывалось, начальная фаза любой из них может быть выбрана равной нулю.

Для решения вопроса о том, как получить угол сдвига  $90^\circ$  между напряжением цепи  $\underline{U}$  и током  $\underline{I}_0$  в ветви с сопротивлением  $\underline{Z}_0$ , сначала найдем зависимость между  $\underline{U}$  и  $\underline{I}_0$ .

Напряжение на параллельных ветвях одинаково, поэтому

$$\underline{U}_1 = r_1 \underline{I}_1 = \underline{Z}_0 \underline{I}_0,$$

откуда

$$\underline{I}_1 = \underline{Z}_0 \underline{I}_0 / r_1.$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$\underline{I} = \underline{I}_0 + \underline{I}_1 = \underline{I}_0 + \frac{\underline{Z}_0}{r_1} \underline{I}_0 = \frac{r_1 + \underline{Z}_0}{r_1} \underline{I}_0.$$

Напряжение на выводах цепи

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{Z}_0 \underline{I}_0 + \frac{r_1 + \underline{Z}_0}{r_1} \underline{Z}_2 \underline{I}_0 = \\ &= \left( \underline{Z}_0 + \frac{r_1 + \underline{Z}_0}{r_1} \underline{Z}_2 \right) \underline{I}_0, \end{aligned}$$

где  $\underline{Z}_0 = r_0 + jx_0$ ;  $\underline{Z}_2 = r_2 + jx_2$ .

Найдем отношение напряжения  $\underline{U}$  к току  $\underline{I}_0$ , представляющее собой комплексную величину:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{U}}{\underline{I}_0} &= \underline{Z}_0 + \frac{r_1 + \underline{Z}_0}{r_1} \underline{Z}_2 = r_0 + jx_0 + \frac{(r_1 + r_0 + jx_0)(r_2 + jx_2)}{r_1} = \\ &= \frac{r_0 r_1 + jx_0 r_1 + r_1 r_2 + r_0 r_2 + jx_0 r_2 + r_1 jx_2 + r_0 jx_2 - x_0 x_2}{r_1} = \\ &= \frac{r_0 r_1 + r_1 r_2 + r_0 r_2 - x_0 x_2}{r_1} + j \frac{x_0 r_1 + x_0 r_2 + r_1 x_2 + r_0 x_2}{r_1}.\end{aligned}$$

Для получения угла сдвига фаз между напряжением  $\underline{U}$  и током  $\underline{I}_0$  в  $90^\circ$  необходимо, чтобы эта комплексная величина имела только мнимую составляющую (как комплексное сопротивление индуктивности или емкости, на которых напряжение и ток сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ ).

Приравняв нулю действительную составляющую

$$\frac{r_0 r_1 + r_1 r_2 + r_0 r_2 - x_0 x_2}{r_1} = 0,$$

найдем, что

$$r_1(r_0 + r_2) = x_0 x_2 - r_0 r_2,$$

откуда

$$r_1 = \frac{x_0 x_2 - r_0 r_2}{r_0 + r_2}. \quad (10.41)$$

Если сопротивления  $r_0, x_0, r_2$  и  $x_2$  известны, то по (10.41) можно определить сопротивление  $r_1$ , которым необходимо шунтировать катушку с сопротивлением  $\underline{Z}_0$  для получения сдвига по фазе  $90^\circ$  между напряжением  $\underline{U}$  и током  $\underline{I}_0$ .

## 10.10. ЦЕПИ С ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

а) **Последовательное соединение.** Рассмотрим особенности расчета цепей, в которых есть индуктивно (магнитно) связанные катушки. Начнем с простейшей цепи, состоящей из двух последовательно соединенных катушек, представленных последовательными схемами замещения. В этом случае, как было показано в § 7.9, возможно их согласное или встречное включение.

При согласном включении (рис. 10.29, а) магнитный поток первой катушки  $\Phi_{11}$  и часть магнитного потока второй



катушки, пронизывающего первую  $\Phi_{21}$ , суммируются. Также суммируются потоки  $\Phi_{22}$  и  $\Phi_{12}$ , суммируются и возбуждаемые ими ЭДС индукции и взаимной индукции, соответственно равные (§ 7.9)

$$e_{L1} = -L_1 di_1/dt; \quad e_{L2} = -L_2 di_2/dt \quad (10.42)$$

и

$$e_{M1} = -M di_2/dt; \quad e_{M2} = -M di_1/dt, \quad (10.43)$$

где при последовательном соединении  $i_1 = i_2 = i$ .

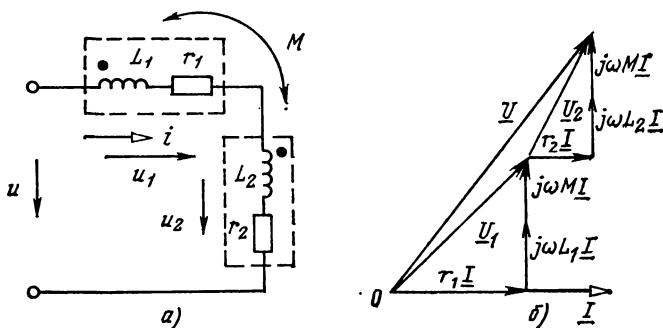


Рис. 10.29. Последовательное согласное соединение катушек (а) и векторная диаграмма (б)

Напряжение  $u_1$  на выводах первой катушки при согласном соединении состоит из трех слагающих:

$$u_1 = r_1 i + L_1 di/dt + M di/dt$$

или в комплексной форме

$$\underline{U}_1 = r_1 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} + j\omega M \underline{I}. \quad (10.44)$$

Уравнение (10.44) записано так же, как и уравнение по второму закону Кирхгофа в комплексной форме (10.37), только слева вместо ЭДС источника питания стоит напряжение на выводах (т.е. напряжение питания цепи из двух последовательно соединенных катушек), а справа дополнительно учтено падение напряжения, компенсирующее ЭДС взаимной индукции.

Аналогично напряжение на выводах второй катушки

$$u_2 = r_2 i + L_2 di/dt + M di/dt$$

или

$$\underline{U}_2 = r_2 \underline{I} + j\omega L_2 \underline{I} + j\omega M \underline{I}. \quad (10.45)$$

Напряжение на выводах цепи

$$u = u_1 + u_2 = (r_1 + r_2) i + M \frac{di}{dt} + (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}$$

или

$$\underline{U} = r_1 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} + j\omega M \underline{I} + r_2 \underline{I} + j\omega L_2 \underline{I} + j\omega M \underline{I}. \quad (10.46)$$

Векторная диаграмма цепи при последовательном согласном включении двух катушек показана на рис. 10.29, б.

Для того чтобы отличить на схемах согласное включение от встречного, один из выводов катушек называют началом, а другой — концом. У одной из катушек начало и конец могут быть выбраны произвольно. У второй катушки началом называют тот вывод, который надо присоединить к концу первой, чтобы получилось согласное соединение. Короче можно сказать, что при согласном включении катушки соединены друг с другом разноименными выводами или что при согласном соединении ток входит в одноименные выводы. Начало катушек отмечается каким-либо знаком, например точкой (рис. 10.29, а), звездочкой и т. д.

При встречном включении катушек ЭДС самоиндукции и взаимной индукции вычитаются. Поэтому напряжение на выводах первой катушки

$$u_1 = r_1 i + L_1 di/dt - M di/dt$$

или

$$\underline{U}_1 = r_1 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} - j\omega M \underline{I}. \quad (10.47)$$

Аналогично

$$\underline{U}_2 = r_2 \underline{I} + j\omega L_2 \underline{I} - j\omega M \underline{I} \quad (10.48)$$

и

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = r_1 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} - j\omega M \underline{I} + r_2 \underline{I} + j\omega L_2 \underline{I} - j\omega M \underline{I}. \quad (10.49)$$

Встречное включение получается, если катушки соединены друг с другом одноименными выводами (рис. 10.30, а). На рис. 10.30, б дана векторная диаграмма цепи при встречном включении катушек.

Суммарная (эквивалентная) индуктивность цепи и ее индуктивное сопротивление при согласном включении (10.46) больше, чем при встречном (10.49). При согласном

соединении

$$L_c = L_1 + L_2 + 2M,$$

что совпадает с (7.43), и

$$x_c = \omega L_c = \omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M; \quad (10.50)$$

при встречном соединении

$$L_b = L_1 + L_2 - 2M,$$

что совпадает с (7.44), и

$$x_b = \omega L_b = \omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M. \quad (10.51)$$

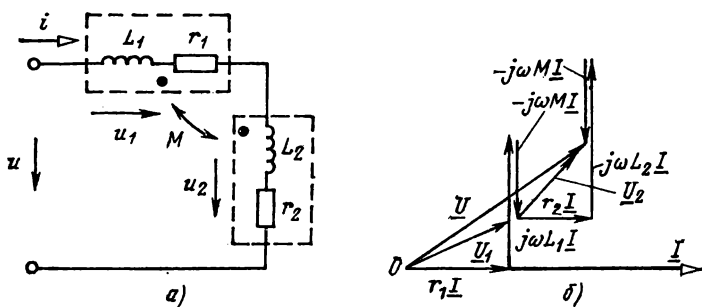


Рис. 10.30. Последовательное встречное соединение катушек (а) и векторная диаграмма (б)

Если одноименные выводы катушек неизвестны, то для расчета цепи необходимо предварительно провести разметку выводов. Один из способов разметки выводов заключается в следующем. Выберем у одной из катушек произвольно начало и конец. Присоединим к концу первой катушки любой из выводов второй катушки, подключим цепь к сети переменного тока и измерим напряжение  $U$  на выводах цепи и ток  $I = I_1$  в цепи. Затем к концу первой катушки присоединим другой вывод второй катушки и повторим измерения. При том же напряжении  $U$  на выводах цепи ток  $I$  в цепи изменится и будет равен  $I_2$ . Если  $I_1 < I_2$ , то первое соединение — согласное (к концу первой катушки присоединено начало второй), так как при согласном соединении суммарная индуктивность цепи больше и больше полное сопротивление цепи:

$$z_c = \sqrt{r^2 + x_c^2} > z_b = \sqrt{r^2 + x_b^2},$$

где  $r = r_1 + r_2$ .

Если  $I_1 > I_2$ , то второе соединение — согласное.

Отметим, что при проведении обоих опытов катушки нельзя перемещать в пространстве, так как взаимная индуктивность зависит от пространственного расположения катушек (§ 7.9).

Понятия об одноименных и разноименных выводах распространяются на любые индуктивно связанные катушки независимо от места их включения в электрической цепи. Если катушки соединены не последовательно, то для разметки выводов их надо отключить от цепи, соединить последовательно (не перемещая в пространстве) и провести описанные выше два опыта.

В качестве примеров расчета индуктивно связанных цепей рассмотрим воздушный трансформатор и параллельное соединение двух катушек.

**б) Воздушный трансформатор.** Схема воздушного трансформатора, состоящего из двух индуктивно связанных катушек (обмоток), одна из которых намотана на другую, показана на рис. 10.31. Обмотка трансформатора, присоеди-

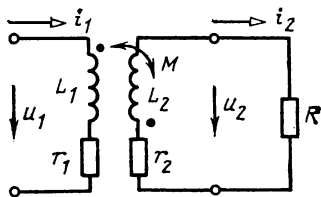


Рис. 10.31. Схема замещения воздушного трансформатора

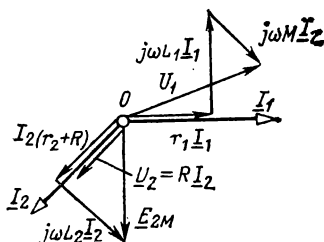


Рис. 10.32. Векторная диаграмма воздушного трансформатора при короткозамкнутой вторичной цепи

няемая к источнику питания с напряжением  $u_1$ , называется первичной, другая, к которой подключается приемник, например, с активным сопротивлением  $R$ , называется вторичной.

Положительные направления напряжения  $u_2$  на вторичной обмотке и тока  $i_2$  во вторичной цепи могут быть выбраны произвольно, например так, чтобы токи входили в одноименные выводы (рис. 10.31). В этом случае, как и при последовательном соединении, надо считать, что ЭДС самоиндукции и взаимной индукции суммируются и компен-

сирующие их напряжения записываются в уравнениях с одинаковыми знаками. Следовательно, напряжение на выводах первичной обмотки записывается аналогично (10.44):

$$\underline{U}_1 = r_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2. \quad (10.52)$$

Таким образом, напряжение  $\underline{U}_1$  состоит из активной составляющей  $r_1 \underline{I}_1$ , совпадающей по фазе с током  $\underline{I}_1$  (рис. 10.32), составляющей  $j\omega L_1 \underline{I}_1$ , опережающей по фазе ток  $\underline{I}_1$  на  $90^\circ$ , и согласно (10.43) составляющей  $j\omega M \underline{I}_2 = -\underline{E}_{1M}$ , опережающей по фазе ток  $\underline{I}_2$  на  $90^\circ$ .

Так как во вторичной цепи нет источника питания, то можно по второму закону Кирхгофа записать

$$0 = (R + r_2) \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 = \underline{U}_2 + r_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 = \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1, \quad (10.53)$$

где  $R \underline{I}_2 = \underline{U}_2$  — напряжение на приемнике и оно же (рис. 10.31) на выводах вторичной обмотки;  $\underline{Z}_{22} = R + r_2 + j\omega L_2$  — сопротивление вторичной цепи.

Электродвижущая сила взаимной индукции во вторичной обмотке согласно (10.43)

$$\underline{E}_{2M} = -j\omega M \underline{I}_1,$$

или из (10.53)

$$\underline{E}_{2M} = -j\omega M \underline{I}_1 = \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 = (R + r_2) \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2. \quad (10.54)$$

На диаграмме (рис. 10.32) показано, что ЭДС  $\underline{E}_{2M}$  отстает по фазе от тока  $\underline{I}_1$  на  $90^\circ$  и равна сумме падений напряжений на сопротивлениях  $R$  и  $r_2$  и на индуктивности  $L_2$ .

Из (10.54) определяется ток вторичной цепи

$$\underline{I}_2 = -j\omega M \underline{I}_1 / \underline{Z}_{22}. \quad (10.55)$$

Подставив это выражение тока  $\underline{I}_2$  в (10.52), для напряжения на первичной обмотке получим

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - j^2 \frac{(\omega M)^2 \underline{I}_1}{\underline{Z}_{22}} = \left( \underline{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\underline{Z}_{22}} \right) \underline{I}_1 = \underline{Z}_{вх} \underline{I}_1, \quad (10.56)$$

где  $\underline{Z}_{вх}$  — входное сопротивление нагруженного трансформатора.

Второе слагаемое входного сопротивления называется вносимым сопротивлением в первичную цепь:

$$\underline{Z}_{вн} = \omega^2 M^2 / \underline{Z}_{22} \quad (10.57)$$

и учитывает влияния вторичной цепи с сопротивлением  $\underline{Z}_{22}$  на ток  $\underline{I}_1$  первичной.

Для источника питания нагруженный трансформатор можно представить простой схемой замещения (рис. 10.33). Действительно, по закону Ома

$$\underline{U}_1 = (r_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 + \underline{Z}_{вн} \underline{I}_1 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{вн}) \underline{I}_1 = \underline{Z}_{вх} \underline{I}_1,$$

что совпадает с (10.56).

Рис. 10.33. Схема замещения воздушного трансформатора с устраненной вторичной цепью

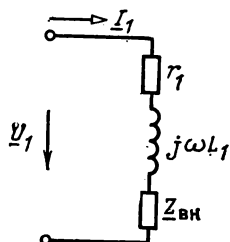
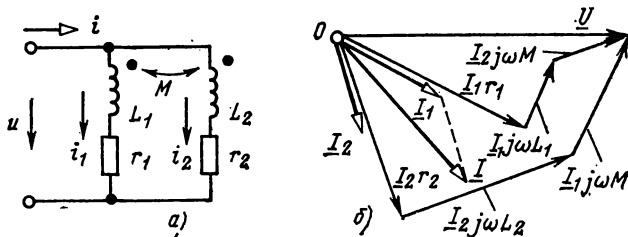


Рис. 10.34. Цепь с двумя параллельными индуктивно связанными ветвями при согласном соединении (а) и ее векторная диаграмма (б)



Из (10.56) определяется ток

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 / \underline{Z}_{вх}, \quad (10.58)$$

после чего ток  $\underline{I}_2$  рассчитывается по (10.55).

Итак, при заданных параметрах первичной и вторичной цепей и напряжении источника питания можно рассчитать токи  $\underline{I}_1$  (10.58), а затем  $\underline{I}_2$  (10.55), после чего построить векторную диаграмму.

В частном случае ненагруженного трансформатора, т. е. в режиме холостого хода,  $\underline{I}_2 = 0$ ,  $\underline{I}_1 = \underline{U}_1 / \underline{Z}_1$  и по (10.53) напряжение на вторичной обмотке

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{2х} = -j\omega M \underline{I}_1 = \underline{E}_{2М}. \quad (10.59)$$

в) Параллельное соединение индуктивно связанных ка-

**тушек.** Возможны два случая параллельного соединения катушек: одноименными и разноименными выводами к общему узлу.

На рис. 10.34, *а* показано присоединение катушек одноименными выводами — началами к общему верхнему узлу. Выбрав положительные направления токов так, как показано на рис. 10.34, *а*, будем считать такое соединение согласным (токи входят в одноименные выводы).

Напряжение на первой ветви

$$\underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2. \quad (10.60)$$

Напряжение на второй ветви

$$\underline{U} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1, \quad (10.61)$$

где  $\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1$  и  $\underline{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2$ .

Исключая из (10.60) и (10.61) ток  $\underline{I}_2$ , определяем ток в первой ветви:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U} \underline{Z}_2 - \underline{U} j\omega M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \omega^2 M^2} = \frac{\underline{U} (\underline{Z}_2 - j\omega M)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \omega^2 M^2}. \quad (10.62)$$

Аналогично, исключая ток  $\underline{I}_1$ , находим ток во второй ветви:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U} (\underline{Z}_1 - j\omega M)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \omega^2 M^2}. \quad (10.63)$$

Уравнения для напряжения  $\underline{U}$  при встречном соединении катушек отличаются от написанных для согласного соединения только знаком перед слагаемым с взаимной индуктивностью  $M$ .

Естественно, что ток в неразветвленной части цепи для любой из параллельных схем соединения катушек определяется по одной и той же формуле:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2. \quad (10.64)$$

На рис. 10.34, *б* показана векторная диаграмма для цепи при параллельном соединении катушек по рис. 10.34, *а*.

## 10.11. ИЗМЕРЕНИЕ ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ

Взаимную индуктивность двух катушек можно измерить, воспользовавшись схемой рис. 10.35.

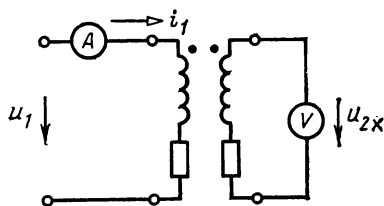
Так как при разомкнутой вторичной цепи ЭДС взаимной индукции равна напряжению, измеряемому вольтметром [см. (10.59)], т. е.

$$U_{2x} = E_{2M} = \omega M I_1,$$

то взаимная индуктивность

$$M = U_{2x} / \omega I_1,$$

Рис. 10.35. Схема для измерения взаимной индуктивности



где  $I_1$  — ток первичной цепи, измеряемый амперметром;  $U_{2x}$  — напряжение на разомкнутой вторичной катушке, измеряемое вольтметром.

## Глава одиннадцатая

### РЕЗОНАНС В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

#### 11.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

а) **Свободные и вынужденные колебания.** Электрические цепи, в которых могут происходить периодические изменения режима (токов, зарядов, напряжений, мощности), называются колебательными.

При подключении заряженного конденсатора к резистору (§ 4.15) происходит постепенная его разрядка и напряжение на конденсаторе непрерывно уменьшается. Если заряженный конденсатор подключить к катушке индуктивности, то при достаточно малых потерях в цепи наблюдается периодическая перезарядка обкладок конденсатора (знак заряда на каждой обкладке по окончании половины периода колебаний изменяется на обратный). Напряжение на конденсаторе тоже изменяется периодически, как показано на рис. 11.1, но его наибольшие значения из-за потерь в цепи уменьшаются (и заряда тоже).



Колебания происходят с частотой

$$f_{св} = 1/T_{св},$$

которая называется частотой свободных колебаний в цепи, так как цепь не подключена к источнику питания.

Колебания, которые возникают под действием внешних сил, называются вынужденными. В электрических це-

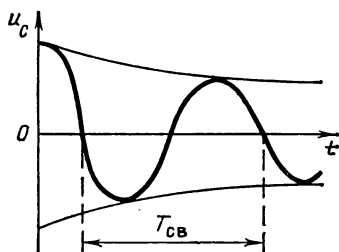


Рис. 11.1. Напряжение при колебательной разрядке конденсатора

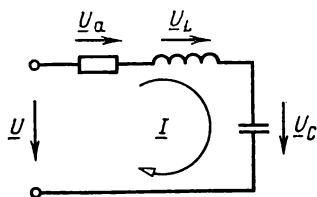


Рис. 11.2. Последовательный контур

пях к таким внешним силам относятся ЭДС (или токи) источников питания.

В этой главе рассматриваются вынужденные колебания, которые приводят к резонансным явлениям.

**б) Резонанс.** В электрической цепи резонансные явления могут возникнуть, если цепь содержит по крайней мере одну катушку индуктивности и один конденсатор. В теории колебаний **резонансом** (откликом) называют процесс вынужденных колебаний с такой частотой, при которой их интенсивность максимальна. Характеризовать интенсивность колебаний можно по различным проявлениям, например по наибольшему значению, которое может быть получено для амплитуды напряжения на конденсаторе. Такой критерий резонансного режима называется амплитудным.

Далее будем рассматривать только цепи с одним источником питания; предполагается, что цепь имеет два вывода для подключения к этому источнику. В качестве критерия режима резонанса примем совпадение по фазе напряжения и тока на выводах цепи. Это так называемый **фазовый резонанс**. Ток совпадает по фазе с напряжением, если реактивная составляющая входного сопротивления или входной проводимости цепи равна нулю.

Наиболее простые электрические цепи, в которых возможен резонанс, состоят из последовательно или параллельно соединенных катушки индуктивности и конденсатора.

## 11.2. РЕЗОНАНС В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

а) **Условие резонанса.** Последовательное соединение катушки индуктивности и конденсатора (см. также § 9.8) называют  $rLC$ -цепью или последовательным контуром (рис. 11.2). Как правило, потерями в конденсаторе можно пренебречь по сравнению с потерями в катушке, так как угол потерь  $\delta_C$  конденсатора (§ 9.13) много меньше угла потерь  $\delta_L$  катушки (§ 9.6). Поэтому можно считать, что активное сопротивление  $r$  контура получено из последовательной схемы замещения катушки индуктивности, а конденсатор идеальный ( $\delta_C=0$  и потерь нет).

Режим резонанса наступает при совпадении фаз тока  $\underline{I}$  и напряжения питания  $\underline{U}$ . Для получения резонанса надо иметь равное нулю реактивное сопротивление контура:

$$x = x_L - x_C = \omega L - 1/\omega C = 0,$$

т. е.

$$x_L = x_C \text{ или } \omega L = 1/\omega C. \quad (11.1)$$

Из (11.1) найдем частоту синусоидального напряжения источника питания, а значит, и тока в цепи, при которой наступает резонанс:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (11.2)$$

Эта частота называется резонансной угловой частотой. Так как частота  $f = \omega/2\pi$ , то резонансная частота

$$f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}, \quad (11.3)$$

чему соответствует период  $T_0 = 1/f_0$ .

При резонансе сопротивление

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{L/C} = \rho \quad (11.4)$$

и называется характеристическим сопротивлением последовательного контура.

При резонансе  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x_L - x_C}{r} = 0$  и  $\varphi = 0$ , ток  $\underline{I}_0 = \underline{U}/r$ , напряжения  $\underline{U}_a = r\underline{I}_0 = \underline{U}$ ;  $\underline{U}_L = j\rho\underline{I}_0$ ;  $\underline{U}_C = -j\rho\underline{I}_0$ .

Векторная диаграмма для режима резонанса построена на рис. 11.3. Действующие значения двух напряжений  $U_L$  и  $U_C$  получаются одинаковыми (длины векторов  $\underline{U}_L$  и  $\underline{U}_C$  на диаграмме одинаковые). Начальная фаза напряжения выбрана равной нулю, т. е. принято  $u = U_m \sin \omega_0 t$ , у тока по-

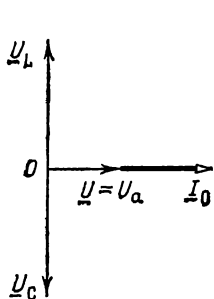


Рис. 11.3. Векторная диаграмма последовательного контура в режиме резонанса

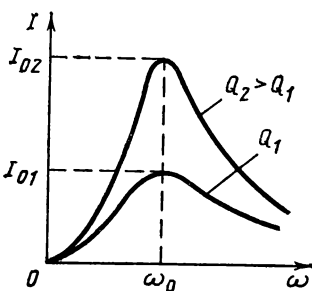


Рис. 11.4. Резонансные кривые тока в последовательном контуре при изменении частоты

лучается такая же начальная фаза  $i_0 = I_m \sin \omega_0 t$ , так как  $x=0$  и  $\varphi=0$ . Напряжение на индуктивном элементе контура опережает по фазе ток на угол  $\pi/2$ , а на емкостном отстает на тот же угол, т. е.  $u_L = U_{Lm} \sin(\omega_0 t + \pi/2)$ ,  $u_C = U_{Cm} \sin(\omega_0 t - \pi/2)$ .

Отношение действующих значений напряжений  $U_L$  или  $U_C$  при резонансе к напряжению питания называется добротностью контура:

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\rho I_0}{r I_0} = \frac{\rho}{r} = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1}{\omega_0 C r}. \quad (11.5)$$

б) **Мощность и энергия.** Активная мощность (9.61)  $P = = U_a I = r I^2 = U^2 / r$ . Реактивная мощность (9.62)  $Q = = U I \sin \varphi = 0$ , так как  $\varphi=0$ , т. е. нет обмена энергией между последовательным контуром и источником питания.

Энергия, запасаемая в любой момент времени в электрическом поле конденсатора, находится аналогично (4.45):  $w_s = C u_C^2 / 2$ , в магнитном поле катушки — аналогично (7.27):  $w_m = L i^2 / 2$ . Соответственно максимальные значения запасемой энергии

$$W_{smax} = C U_{Cm}^2 / 2; \quad W_{mmax} = L I_m^2 / 2.$$

Так как

$$U_{Cm} = \left( \frac{1}{\omega_0 C} \right) I_m, \text{ то } W_{\text{max}} = \left( \frac{1}{\omega_0^2 C} \right) I_m^2 / 2$$

и после подстановки (11.2) получаем

$$W_{\text{max}} = \frac{LI_m^2}{2} = W_{\text{max}}. \quad (11.6)$$

Запасаемая в любой момент времени в контуре суммарная энергия (мгновенное значение)

$$\begin{aligned} w = w_{\text{э}} + w_{\text{м}} &= \frac{Cu_C^2}{2} + \frac{Li^2}{2} = \frac{CU_{Cm}^2}{2} \sin^2(\omega_0 t - \pi/2) + \\ &+ \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega_0 t = W_{\text{max}} \cos^2 \omega_0 t + W_{\text{max}} \sin^2 \omega_0 t = \\ &= W_{\text{max}} = W_{\text{max}} \end{aligned}$$

(здесь учтено, что  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ).

Таким образом, в любой момент времени суммарная энергия, запасенная в контуре, одна и та же, что еще раз подтверждает отсутствие обмена энергией с источником питания. В контуре происходит только перераспределение запасенной энергии между конденсатором и катушкой. В частности, в момент времени, когда энергия, запасенная в магнитном поле, максимальная (ток  $i = I_m$ ), энергия электрического поля равна нулю (напряжение  $u_C = 0$ ) и наоборот. Это следует из отставания по фазе напряжения  $\bar{U}_C$  от тока  $\bar{I}$  на угол  $\pi/2$ . Источник обеспечивает только преобразование электромагнитной энергии в тепло (компенсация потерь в активном сопротивлении).

в) **Резонансные кривые и частотные характеристики.** Построим зависимости тока и напряжений от частоты.

Комплекс тока

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{U}}{r + jx} = \frac{\bar{U}}{r + j(x_L - x_C)}. \quad (11.7)$$

Действующее значение тока

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \quad (11.8)$$

По (11.8) на рис. 11.4 построены зависимости тока от частоты при двух значениях добротности  $Q_1$  и  $Q_2 > Q_1$ . Постоянный ток не может проходить в ветви с идеальным конден-

сатором. Поэтому при  $\omega=0$  получаем  $I=0$ . При очень больших частотах для тока получаются все меньшие значения, так как с ростом частоты неограниченно увеличивается индуктивное сопротивление  $x_L=\omega L$  контура.

Как видно из (11.8), наибольшего резонансного значения ток достигает при  $\omega L - 1/\omega C = 0$ , т. е. при резонансной частоте  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

У контура с заданными значениями  $L$  и  $C$  при уменьшении сопротивления  $r$ , т. е. с ростом добротности  $Q = \frac{\rho}{r} = \frac{\sqrt{L/C}}{r}$ , резонансное значение тока  $I_0$  увеличивается ( $I_{02} > I_{01}$ ).

Напряжение на сопротивлении  $U_a = rI$ , т. е. кривая изменения напряжения  $U_a$ , повторяет график тока  $I$  (конечно, в другом масштабе), как показано на рис. 11.5. При ре-

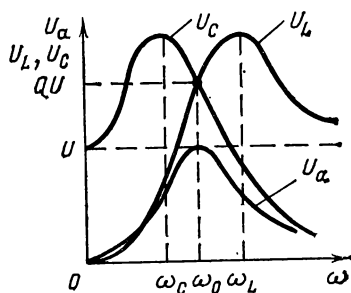


Рис. 11.5. Резонансные кривые напряжений в последовательном контуре при изменении частоты

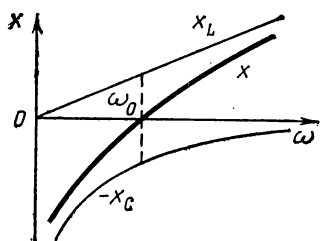


Рис. 11.6. Частотные характеристики последовательного контура

зонансе  $U_a = rU/r = U$ . Напряжение на индуктивности  $U_L = \omega LI$  равно нулю при  $\omega=0$ . В режиме резонанса

$$U_L = \omega_0 LI_0 = \rho \frac{U}{r} = QU.$$

При очень больших частотах  $\omega L \gg 1/\omega C$  и  $\omega L \gg r$ . Поэтому падениями напряжения на емкости и сопротивлении можно пренебречь и считать, что  $U_L \approx U$  (рис. 11.5). При  $\omega=0$  напряжение на емкости  $U_C$  равно напряжению  $U$  источника питания, так как в цепи постоянного тока конденсатор заряжается до напряжения источника. В режиме ре-

$$U_C = \frac{1}{\omega_0 C} I_0 = r \frac{U}{r} = QU,$$

$$\text{т. е. } U_C = U_L.$$

Следовательно, добротность  $Q$  показывает, во сколько раз при резонансе напряжения на индуктивности и емкости больше напряжения источника питания.

При очень больших частотах, как указывалось, падением напряжения на емкости можно пренебречь, т. е.  $U_C$  стремится к нулю (рис. 11.5). Исследования на максимум показывают, что максимальные значения  $U_L$  и  $U_C$  получаются не при  $\omega = \omega_0$ , а соответственно при частотах  $\omega_L > \omega_0$  и  $\omega_C < \omega_0$ .

Построенные на рис. 11.4 и 11.5 зависимости называются резонансными кривыми.

Равенство напряжений на индуктивности и емкости при резонансе послужило основанием называть этот режим резонансом напряжений.

При изменении частоты изменяется и реактивное сопротивление контура. На рис. 11.6 построены зависимости от частоты сопротивлений  $x_L = \omega L$ ;  $-x_C = -1/\omega C$  и  $x = x_L - x_C = \omega L - 1/\omega C$ , которые называются частотными характеристиками последовательного контура. Увеличением активного сопротивления, например, из-за поверхностного эффекта в ограниченном интервале частот часто пренебрегают и считают, что сопротивление  $r$  остается постоянным.

Получить резонанс можно не только изменением частоты напряжения источника питания, но и при регулировании индуктивности или емкости контура. Практически чаще добиваются режима резонанса при помощи конденсатора переменной емкости.

При изменении емкости  $C$  ток рассчитывается по (11.8). Зависимость  $I(C)$  показана на рис. 11.7. Ток максимален при резонансе  $I_0 = U/r$ , что получается, если  $\omega L = 1/\omega C_0$ , или

$$C_0 = 1/\omega^2 L. \quad (11.9)$$

Добротность контура, как и при изменении частоты, равна отношению индуктивного или равного ему емкостного сопротивления при резонансе к активному сопротивлению:

$$Q = \omega L/r = 1/(\omega C_0 r). \quad (11.10)$$

Квадрат реактивного сопротивления  $x^2 = (\omega L - 1/\omega C)^2$  растет и при  $C < C_0$ , и при  $C > C_0$ . Поэтому, как следует из (11.8), ток уменьшается. При  $C=0$  (разрыв цепи)  $I=0$ . При очень больших значениях  $C$  емкостное сопротивление

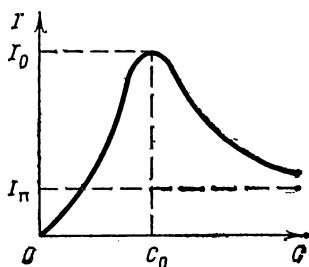


Рис. 11.7. Резонансная кривая тока в последовательном контуре при изменении емкости

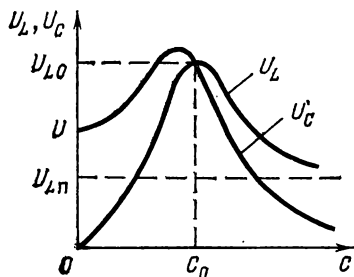


Рис. 11.8. Резонансные кривые напряжений в последовательном контуре при изменении емкости

$x_C = 1/\omega C$  стремится к нулю, а ток, согласно (11.8), к предельному значению

$$I_{\pi} = U / \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}.$$

Напряжение на индуктивности  $U_L = \omega L I$ , т.е. изменяется так же, как и ток, и достигает значения  $U_{L0} = \omega L I_0 = \omega L (U/r) = QU$  при  $C=C_0$  (рис. 11.8). Предельное значение  $U_{L\pi} = \omega L I_{\pi}$ .

На рис. 11.8 показано и изменение напряжения на емкости  $U_C = (1/\omega C) I$ . При резонансе  $U_{C0} = (1/\omega C_0) (U/r) = QU$ , т.е. равно  $U_{L0}$ . При очень больших значениях емкости, как указывалось,  $x_C = 1/\omega C$  стремится к нулю, поэтому и напряжение  $U_C$  стремится к нулю. При малых значениях емкости сопротивление  $x_C$  все больше превосходит постоянные величины  $r$  и  $x_L$ . Поэтому напряжение  $U_C$  становится все больше по сравнению с  $U_a$  и  $U_L$  и в пределе при  $C=0$  напряжение  $U_C=U$  (рис. 11.8). У контура с  $Q>1$  зависимость  $U_C(C)$  имеет максимум при  $C < C_0$  (рис. 11.8). При  $Q>10$  с погрешностью менее 1 % можно считать, что максимальное значение напряжения на емкости не отличается от  $U_{C0}=QU$  и получается при  $C=C_0$ .

Построенные на рис. 11.7 и 11.8 зависимости тоже называются резонансными кривыми.

Напряжение на активном сопротивлении  $U_a = rI$ , т.е. изменяется так же, как и ток.

**Пример 11.1.** Для последовательного контура с напряжением источника питания  $U=2$  мВ, сопротивлением  $r=20$  Ом и индуктивностью  $L=10$  мГн найти значение резонансной емкости и добротность при частоте  $\omega=10^5$  рад/с. Определить ток в режиме резонанса и при уменьшении частоты напряжения источника питания на 5 %.

**Решение.** По (11.9) резонансное значение емкости

$$C_0 = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{10^{10} \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 10^{-8} \text{ Ф} = 0,01 \text{ мкФ}.$$

Добротность по (11.10)

$$Q = \frac{1}{\omega C_0 r} = \frac{1}{10^5 \cdot 10^{-8} \cdot 20} = 50.$$

Ток при резонансе

$$I_0 = U/r = 2 \cdot 10^{-3} / 20 = 10^{-4} \text{ А} = 0,1 \text{ мА}.$$

Новое значение частоты

$$\omega' = \omega - 0,05\omega = 0,95\omega = 9,5 \cdot 10^4 \text{ рад/с}.$$

Сопротивления

$$x_L = \omega' L = 9,5 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 950,0 \text{ Ом};$$

$$x_C = \frac{1}{\omega' C_0} = \frac{1}{9,5 \cdot 10^4 \cdot 10^{-8}} = \frac{10^4}{9,5} = 1052,6 \text{ Ом};$$

$$x = x_L - x_C = -102,6 \text{ Ом}.$$

По (11.8) ток

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{20,0^2 + 102,6^2}} \approx 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 0,02 \text{ мА}$$

(уменьшился по сравнению с резонансным значением примерно в пять раз).

### 11.3. РЕЗОНАНС В ПАРАЛЛЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

**а) Идеальный контур.** Параллельное соединение катушки и конденсатора, потерями в которых можно пренебречь, показано на рис. 11.9. Такой контур называется идеальным параллельным. У реального параллельного контура, конечно, есть потери. Поэтому контур рис. 11.9 следует рассматривать как упрощенную модель реального контура.

При резонансной частоте  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  в идеальном параллельном контуре действующие значения токов в индуктивном элементе

$$I_L = \frac{1}{\omega_0 L} U \quad (11.11)$$



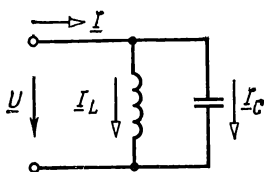


Рис. 11.9. Идеальный параллельный контур

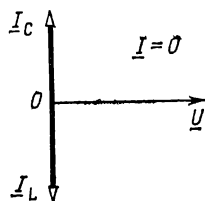


Рис. 11.10. Векторная диаграмма идеального параллельного контура в режиме резонанса

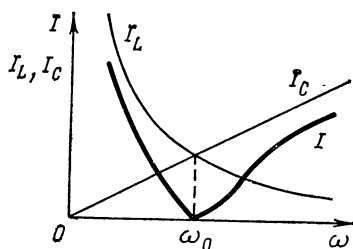


Рис. 11.11. Резонансные кривые токов в идеальном параллельном контуре при изменении частоты

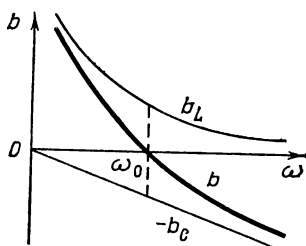


Рис. 11.12. Частотные характеристики идеального параллельного контура

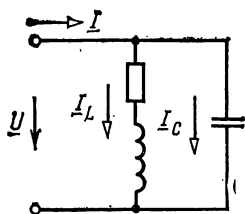


Рис. 11.13. Параллельный контур с потерями

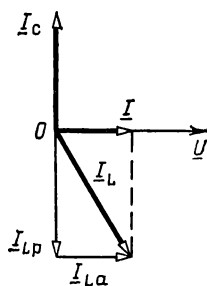


Рис. 11.14. Векторная диаграмма параллельного контура с потерями при резонансе

и в емкостном элементе

$$I_C = \omega_0 C U \quad (11.12)$$

равны, так как  $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$ .

Поэтому такой режим называется резонансом токов.

Построим векторную диаграмму для режима резонанса (рис. 11.10). Как видно из диаграммы, общий ток  $I = I_L + I_C$  в режиме резонанса равен нулю (наименьший, а не наибольший, как при резонансе напряжений). Действующее значение общего тока

$$I = |I_L - I_C|. \quad (11.13)$$

Резонансные кривые на рис. 11.11 построены по зависимостям  $I_L = \frac{1}{\omega L} U$ ,  $I_C = \omega C U$  и (11.13). Общая проводимость контура реактивная (потерь нет)

$$\underline{Y} = -jb,$$

где  $b = b_L - b_C = 1/\omega L - \omega C$ .

Частотные характеристики проводимостей показаны на рис. 11.12.

б) **Реальный контур.** Параллельное соединение катушки с потерями и конденсатора представлено на рис. 11.13. Для того чтобы общий ток  $I$  совпадал по фазе с напряжением источника питания  $\underline{U}$  (фазовый резонанс), общая проводимость  $\underline{Y}$  параллельного контура не должна иметь реактивной составляющей  $b$ , т. е. сопротивление контура должно быть активным.

При параллельном соединении проводимости суммируются, т. е.

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{r + j\omega L} + j\omega C.$$

У первого слагаемого выделим действительную и мнимую части, умножив числитель и знаменатель на комплекс, сопряженный делителю, т. е.  $r - j\omega L$ , по правилу, приведенному в § 10.3:

$$\underline{Y} = ye^{-j\varphi} = g - jb = \frac{r - j\omega L}{r^2 + (\omega L)^2} + j\omega C,$$

$$\text{где } g = \frac{r}{r^2 + (\omega L)^2} \text{ и } b = \frac{\omega L}{r^2 + (\omega L)^2} - \omega C.$$

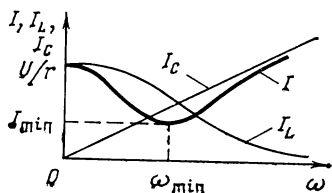


Рис. 11.15. Резонансные кривые токов в параллельном контуре с потерями

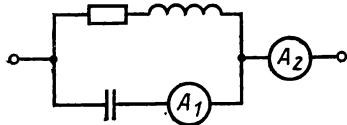


Рис. 11.16. Схема к примеру 11.2

Из условия резонанса  $b=0$  определим резонансную частоту:

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - r^2/\rho^2}, \quad (11.14)$$

где по-прежнему  $\rho = \sqrt{L/C}$  — характеристическое сопротивление контура. Резонансная частота параллельного контура с потерями  $\omega'_0$  не равна резонансной частоте последовательного контура  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Совпадение частот получается только при  $r=0$ , т. е. в случае идеального контура, как и было принято выше.

Резонанс в параллельном контуре возможен не при любых его параметрах. Из (11.14) следует, что должно быть  $r < \rho$ , т. е. потери не слишком велики (иначе  $\omega'_0$  — мнимая величина).

На рис. 11.14 показана векторная диаграмма в режиме резонанса. Ток  $I_L$  из-за потерь в катушке отстает по фазе от напряжения не на  $90^\circ$ , а на угол, меньший чем  $90^\circ$ . На рис. 11.14 он разложен на активную  $I_{La}$  и реактивную  $I_{Lp}$  составляющие. Как видно из диаграммы, общий ток  $I$  совпадает по фазе с напряжением  $U$  (условие резонанса) при равенстве действующего значения тока  $I_C$  и реактивной составляющей  $I_{Lp}$  тока катушки.

На рис. 11.15 построены резонансные кривые токов

$$I_L = U/\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}, \quad I_C = \omega C U \quad \text{и} \quad I = y U = \sqrt{g^2 + b^2} U.$$

Из-за потерь минимальное значение тока не равно нулю, как у идеального параллельного контура, и оно получается при частоте  $\omega_{min}$ , которая в общем случае отличается от

резонансной  $\omega'_0$ , но при достаточно малых потерях практически совпадает с ней.

**Пример 11.2.** Амперметры  $A_1$ ,  $A_2$  измеряют ток конденсатора и общий ток параллельного контура (рис. 11.16). По известным показаниям двух амперметров в режиме резонанса  $I_1 = I_2 = 10$  мА найти ток катушки.

**Решение.** Векторная диаграмма в режиме резонанса построена на рис. 11.14. Из диаграммы следует, что ток  $I_1 = I_C = I_{Lp}$ , ток  $I_2 = I = I_{La}$ , а токи  $I_{Lp}$ ,  $I_{La}$  и ток катушки  $I_L$  составляют стороны прямоугольного треугольника с гипотенузой:

$$I_L = \sqrt{I_{La}^2 + I_{Lp}^2} = \sqrt{I_2^2 + I_1^2} = \sqrt{20} \text{ мА}.$$

Резонансные явления широко применяются во многих областях техники, особенно в радиотехнике и электронике, для выделения и усиления сигналов. С другой стороны, возникновение режимов, близких к резонансу, но не предусмотренных для данного устройства, может привести к нарушению нормальной работы и даже к аварии, как, например, было показано в § 9.8, в.

## Глава двенадцатая

### ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

#### 12.1. ТРЕХФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

Многофазной системой электрических цепей называется система, состоящая из нескольких электрических цепей переменного тока одной частоты, ЭДС которых имеют разные фазы.

Отдельные части многофазной системы сокращенно называются фазами. Таким образом, термину «фаза» соответствуют два понятия: 1) угол, определяющий изменение синусоидальной величины; 2) одна из составных частей многофазной системы. Многофазную систему электрических цепей, соединенных друг с другом, называют обычно многофазной цепью.

Совокупность ЭДС, напряжений или токов в фазах многофазной цепи называют многофазной системой ЭДС, напряжений или токов.

В настоящее время из всех многофазных систем наиболее широкое распространение получила трехфазная

система, т. е. система, состоящая из трех электрических цепей переменного тока одной частоты, ЭДС которых имеют разные начальные фазы.

Трехфазная система переменного тока, разработанная выдающимся русским инженером М. О. Доливо-Добровольским в 1891 г., получила распространение во всем мире как система, обеспечивающая наиболее экономичную передачу электрической энергии и позволяющая создать надежные, простые и дешевые электродвигатели, генераторы и трансформаторы.

Простейший трехфазный генератор (рис. 12.1) имеет устройство, аналогичное однофазному генератору с той

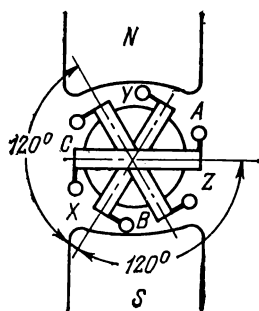
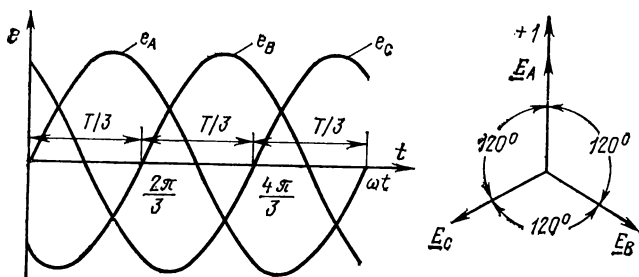


Рис. 12.1. Устройство простейшего генератора

Рис. 12.2. График и векторная диаграмма симметричных ЭДС трехфазного генератора



лишь разницей, что у его якоря не одна, а три одинаковые обмотки (фазы), начала и концы которых обозначают соответственно буквами A, B, C и X, Y, Z и которые сдвинуты в пространстве относительно друг друга на равные углы  $2\pi/3 = 120^\circ$ . При вращении якоря в обмотках генератора индуцируются ЭДС одинаковой частоты и равной амплитуды, сдвинутые по фазе относительно друг друга на одинаковые углы  $2\pi/3 = 120^\circ$ , или на  $1/3$  периода. Такая система

трех ЭДС называется симметричной. Наоборот, если амплитуды ЭДС не равны друг другу или углы сдвига фаз не равны  $2\pi/3$ , то система ЭДС называется несимметричной.

Приняв за начало отсчета времени ( $t=0$ ) начало периода ЭДС в первой обмотке, называемой фазой  $A$ , напомним ее выражение:

$$e_A = E_m \sin \omega t. \quad (12.1)$$

В симметричной трехфазной системе ЭДС второй фазы  $B$  отстает по фазе от ЭДС  $e_A$  первой на  $1/3$  периода, следовательно,

$$e_B = E_m \sin [\omega (t - T/3)] = E_m \sin (\omega t - 2\pi/3). \quad (12.2)$$

Электродвижущая сила третьей фазы  $C$  отстает по фазе от ЭДС  $e_A$  на  $2/3$  периода, или, что то же, опережает по фазе ЭДС  $e_A$  на  $1/3$  периода; следовательно,

$$e_C = E_m \sin [\omega (t + T/3)] = E_m \sin (\omega t + 2\pi/3). \quad (12.3)$$

На рис. 12.2 показаны соответствующие синусоиды ЭДС и векторная диаграмма ЭДС.

При построении диаграмм трехфазных цепей часто предполагается, что для положительной полуоси действительных величин на комплексной плоскости выбрано направление вертикально вверх, а не направо, как в предыдущих главах; поэтому вектор ЭДС первой фазы  $e_A$ , имеющей нулевую начальную фазу, направлен вертикально вверх. При этом комплекс ЭДС первой фазы  $\underline{E}_A = E$ , а комплексы ЭДС остальных двух фаз

$$\underline{E}_B = \underline{E}_A e^{-j2\pi/3} = E e^{-j2\pi/3} = E e^{-j120^\circ};$$

$$\underline{E}_C = \underline{E}_A e^{+j2\pi/3} = E e^{+j2\pi/3} = E e^{+j120^\circ}.$$

Положительные направления ЭДС в обмотках генератора выбираются от концов обмоток  $X, Y, Z$  к началам  $A, B, C$ .

Последовательность прохождения ЭДС через амплитудные (или нулевые) значения называют последовательностью фаз; например, последовательность фаз ЭДС, изображенных на рис. 12.2, будет  $A, B, C$  и называется прямой последовательностью фаз.

Каждую обмотку трехфазного генератора можно соединить с отдельным приемником энергии (рис. 12.3). В этом случае получается несвязанная трехфазная система

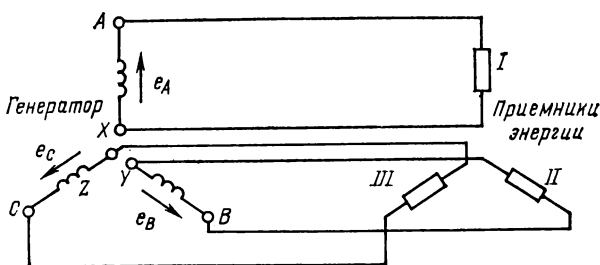


Рис. 12.3. Несвязанная трехфазная система

с тремя самостоятельными цепями и шестью проводами — неэкономичная и поэтому не нашедшая применения.

## 12.2. СОЕДИНЕНИЕ ОБМОТОК ГЕНЕРАТОРА ЗВЕЗДОЙ

Соединение обмоток генератора звездой или треугольником позволяет уменьшить число проводов, соединяющих генератор с приемником, с шести при несвязанной системе до четырех или до трех.

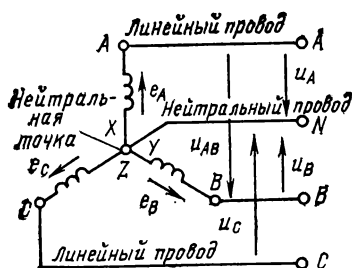


Рис. 12.4. Схема соединения обмоток генератора звездой

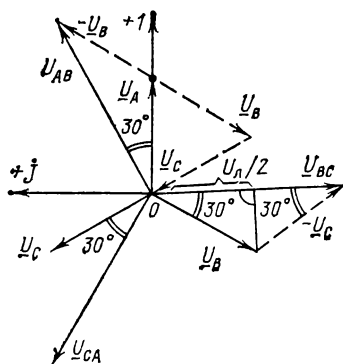


Рис. 12.5. Векторная диаграмма фазных и линейных напряжений при соединении обмоток генератора звездой

При соединении звездой (рис. 12.4) к началам обмоток генератора  $A, B, C$  присоединяют три линейных провода, идущих к приемнику. Концы обмоток  $X, Y, Z$

объединяют в узел, называемый нейтралью генератора или его нейтральной точкой  $N$ . В четырехпроводной системе к нейтрали генератора присоединяется нейтральный провод. В трехпроводной системе он отсутствует.

Напряжения между линейными и нейтральным проводами называются фазными напряжениями:  $u_A$ ,  $u_B$  и  $u_C$ . Фазное напряжение отличается от фазной ЭДС на падение напряжения в обмотке генератора.

В дальнейшем будем считать, что падениями напряжения в фазах генератора можно пренебречь, т. е. принять  $u_A = e_A$ ,  $u_B = e_B$ ,  $u_C = e_C$ , или считать, что заданы напряжения  $u_A$ ,  $u_B$ ,  $u_C$ . Напряжения между линейными проводами называются линейными:  $u_{AB}$ ,  $u_{BC}$  и  $u_{CA}$ . Положительное направление напряжения указывается порядком записи индексов, например, положительное направление напряжения  $u_{AB}$  от точки  $A$  к точке  $B$  (рис. 12.4).

Мгновенные значения фазных напряжений равны разностям мгновенных значений потенциалов начал и концов соответствующих обмоток:

$$u_A = \varphi_A - \varphi_X; \quad u_B = \varphi_B - \varphi_Y; \quad u_C = \varphi_C - \varphi_Z. \quad (12.4)$$

Мгновенные значения линейных напряжений равны разностям мгновенных значений потенциалов начал соответствующих обмоток, т. е.

$$u_{AB} = \varphi_A - \varphi_B; \quad u_{BC} = \varphi_B - \varphi_C; \quad u_{CA} = \varphi_C - \varphi_A. \quad (12.5)$$

Концы обмоток соединены в узел, поэтому потенциалы их одинаковы:  $\varphi_X = \varphi_Y = \varphi_Z$ .

Мгновенное значение линейного напряжения между проводами  $A$  и  $B$

$$u_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = (\varphi_X + u_A) - (\varphi_Y + u_B) = u_A - u_B. \quad (12.6)$$

По аналогии для двух других линейных напряжений можем написать

$$u_{BC} = u_B - u_C; \quad u_{CA} = u_C - u_A. \quad (12.7)$$

Следовательно, можно утверждать, что мгновенное значение любого линейного напряжения равно алгебраической разности мгновенных значений соответствующих фазных напряжений. Аналогично при символической записи любое комплексное линейное напряжение равно разности соответствующих фазных комплексных напряжений, т. е.

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C; \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A. \quad (12.8)$$



На векторной диаграмме (рис. 12.5) изображены три вектора фазных напряжений  $\underline{U}_A = \underline{E}_A$ ,  $\underline{U}_B = \underline{E}_B$ ,  $\underline{U}_C = \underline{E}_C$ . Вектор любого линейного напряжения равен разности соответствующих векторов фазных напряжений. Из векторной диаграммы (рис. 12.5) видно, что векторы двух смежных фазных напряжений и вектор соответствующего линейного напряжения, например векторы  $\underline{U}_B$ ,  $-\underline{U}_C$  и  $\underline{U}_{BC}$ , образуют замкнутый треугольник. При симметричной системе напряжений действующие значения фазных напряжений равны друг другу, т. е.  $U_A = U_B = U_C = U_\phi$ , и действующие значения линейных напряжений одинаковы, т. е.  $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_\lambda$ . Поэтому треугольник равнобедренный и имеет углы  $30^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $120^\circ$ . Из треугольника находим, что

$$\frac{1}{2} U_\lambda = U_\phi \cos 30^\circ,$$

или

$$U_\lambda = 2U_\phi \cos 30^\circ = \frac{2U_\phi \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} U_\phi = 1,73 U_\phi, \quad (12.9)$$

т. е. *линейное напряжение в  $\sqrt{3}$  раз больше фазного напряжения.*

Кроме того, из рис. 12.5 следует, что *звезда векторов линейных напряжений повернута на  $30^\circ$  в сторону вращения векторов относительно звезды векторов фазных напряжений.*

Алгебраическая сумма линейных напряжений всегда равна нулю. Действительно, приняв во внимание выражение (12.5), можно написать

$$u_{AB} + u_{BC} + u_{CA} = \varphi_A - \varphi_B + \varphi_B - \varphi_C + \varphi_C - \varphi_A = 0$$

или

$$\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA} = 0. \quad (12.10)$$

У симметричной трехфазной системы равна нулю и сумма фазных напряжений:

$$\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C = 0, \quad (12.11)$$

как и сумма фазных ЭДС (рис. 12.2):

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0. \quad (12.12)$$

В этом можно убедиться, сложив соответствующие векторы, как это показано для фазных напряжений на рис. 12.5.

**Пример 12.1.** Определить линейное напряжение симметричного генератора, если фазное напряжение равно 127 В.

**Решение.** Линейное напряжение  $U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{\text{ф}} = 1,73 \cdot 127 = 220 \text{ В}$ .

**Пример 12.2.** Определить фазное напряжение симметричной системы, если линейное напряжение равно 380 В.

**Решение.** Фазное напряжение  $U_{\text{ф}} = U_{\text{л}} / \sqrt{3} = 380 / 1,73 = 220 \text{ В}$ .

### 12.3. СОЕДИНЕНИЕ ОБМОТОК ГЕНЕРАТОРА ТРЕУГОЛЬНИКОМ

Если конец первой обмотки  $X$  трехфазного генератора (рис. 12.6) соединен с началом второй обмотки  $B$ , конец второй обмотки  $Y$  — с началом третьей  $C$  и конец третьей  $Z$  — с началом первой  $A$ , то говорят, что обмотки генератора соединены треугольником.

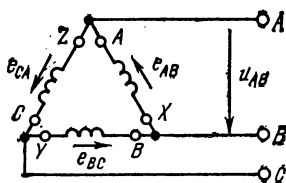


Рис. 12.6. Схема соединения обмоток генератора треугольником

Линейные провода, идущие к приемнику, присоединяются к началам обмоток генератора  $A, B, C$ , т.е. и к концам соответствующих соседних обмоток  $Z, X, Y$  (рис. 12.6). Вследствие этого фазные напряжения на обмотках генератора одновременно являются и линейными напряжениями.

Обмотки генератора, соединенные треугольником, образуют замкнутый контур с малым сопротивлением, в котором действует сумма трех ЭДС  $e_{AB}, e_{BC}$  и  $e_{CA}$ . Чтобы в контуре при отсутствии нагрузки не возник ток, сумма этих ЭДС в любой момент времени должна быть равна нулю. Этому требованию удовлетворяет симметричная система трех ЭДС, у которых одинаковые действующие значения  $E$  и сдвиг фаз между каждой парой ЭДС равен  $120^\circ$ , как и у ЭДС на рис. 12.2 и напряжений на диаграмме рис. 12.5. Линейные напряжения  $u_{AB} = e_{AB}, u_{BC} = e_{BC}, u_{CA} = e_{CA}$  (если пренебречь падениями напряжения в обмотках генератора).

### 12.4. СИММЕТРИЧНЫЙ РЕЖИМ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ

а) **Соединение звездой.** При соединении обмоток генератора звездой и при трехфазном приемнике (у которого, как и у генератора, три части называются фазами) или трех

приемниках, соединенных звездой, можно, как указывалось, получить четырехпроводную (рис. 12.7) или трехпроводную трехфазную систему. Четырехпроводная система получается после замены трех обратных проводов несвязанной трехфазной системы (рис. 12.3) одним общим нейтральным проводом.

Начала обмоток (фаз) генератора обозначены прописными буквами  $A, B, C$ , соответствующие выводы приемника или трех приемников, соединенных звездой, строчными буквами  $a, b, c$ . Один конец нейтрального провода присоединен к нейтральной (общей) точке  $N$  фаз генератора, другой к нейтрали  $n$  приемника. Положительные направления токов в линейных проводах или линейных токах  $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$  выбирают от генератора к приемнику, тока  $\underline{I}_N$  в нейтральном проводе в обратном направлении, так что по первому закону Кирхгофа

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C. \quad (12.13)$$

При достаточно малом сопротивлении нейтрального и линейных проводов разность потенциалов между ней-

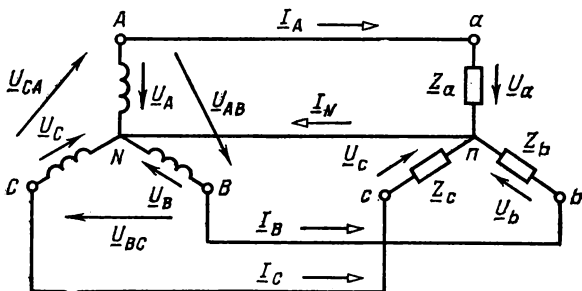


Рис. 12.7. Схема четырехпроводной трехфазной цепи

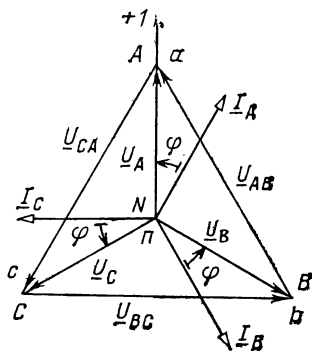


Рис. 12.8. Топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов при соединении звездой

тральными точками  $N$  и  $n$  равна нулю. Поэтому образуются три самостоятельных контура, и вследствие малых сопротивлений нейтрального и линейных проводов фазные напряжения приемника равны соответствующим фазным напряжениям генератора:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A; \quad \underline{U}_b = \underline{U}_B; \quad \underline{U}_c = \underline{U}_C.$$

Топографическая диаграмма напряжений цепи рис. 12.7 показана на рис. 12.8. Равным нулю принят потенциал нейтральной точки  $N$  генератора, и так как падения напряжения в нейтральном проводе нет, то и потенциал нейтральной точки  $n$  приемника равен нулю. Отложив из точки  $N$  векторы фазных напряжений

$$\underline{U}_A = \underline{U}_a = U_\phi; \quad \underline{U}_B = \underline{U}_b = U_\phi e^{-j120^\circ}; \\ \underline{U}_C = \underline{U}_c = U_\phi e^{+j120^\circ},$$

получим точки  $A, B, C$  (или  $a, b, c$ ) диаграммы, соответствующие точкам цепи, обозначенным теми же буквами.

Векторы линейных напряжений  $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$  (рис. 12.5) на топографической диаграмме соединяют, как и должно быть (см. § 10.8), соответственно точки  $A$  и  $B$ ,  $B$  и  $C$ ,  $C$  и  $A$ .

В § 12.2 было найдено, что разность фаз между линейным напряжением  $\underline{U}_{AB}$  и фазным  $\underline{U}_A$  равна  $30^\circ$  (рис. 12.5), т. е.

$$\underline{U}_{AB} = U_\phi e^{j30^\circ}.$$

Такой же угол сдвига фаз между напряжениями  $\underline{U}_{BC}$  и  $\underline{U}_B$  и между напряжениями  $\underline{U}_{CA}$  и  $\underline{U}_C$ . Поэтому

$$\underline{U}_{BC} = U_\phi e^{j30^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = U_\phi e^{-j90^\circ}; \\ \underline{U}_{CA} = U_\phi e^{j30^\circ} \cdot e^{+j120^\circ} = U_\phi e^{j150^\circ},$$

причем, как найдено выше (12.9),  $U_\phi = \sqrt{3} U_\phi$ .

При заданных фазных напряжениях и известных сопротивлениях  $\underline{Z}_a, \underline{Z}_b, \underline{Z}_c$  фаз приемника ток в каждом контуре определяется по закону Ома:

$$\underline{I}_A = \underline{U}_A / \underline{Z}_a; \quad \underline{I}_B = \underline{U}_B / \underline{Z}_b; \quad \underline{I}_C = \underline{U}_C / \underline{Z}_c. \quad (12.14)$$

У симметричного трехфазного приемника или у трех одинаковых приемников, соединенных звездой,

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z} = ze^{j\varphi}.$$

Поэтому линейные токи и равные им токи в фазах приемника, т. е. фазные токи,

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{ze^{j\varphi}} = I_\Phi e^{-j\varphi}; \quad (12.15a)$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_A e^{-j120^\circ}}{ze^{j\varphi}} = I_\Phi e^{-j\varphi} e^{-j120^\circ}; \quad (12.15б)$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_A e^{j120^\circ}}{ze^{j\varphi}} = I_\Phi e^{-j\varphi} e^{j120^\circ}, \quad (12.15в)$$

где

$$I_\Phi = I_\pi = \frac{U_\Phi}{z} = \frac{U_\pi/\sqrt{3}}{z}. \quad (12.16)$$

Таким образом, линейные или фазные токи численно одинаковы (равны действующие значения) и сдвинуты по фазе относительно друг друга на равные углы  $120^\circ$ . Векторная диаграмма токов для случая приемника с  $\varphi > 0$  дана на том же рис. 12.8. Каждый из фазных (линейных) токов отстает по фазе от соответствующего фазного напряжения на угол  $\varphi$ .

Сумма векторов трех токов, образующих симметричную тройку, как видно из рис. 12.8, равна нулю, как и трех векторов фазных напряжений (рис. 12.5). Поэтому тока в нейтральном проводе нет

$$I_N = 0$$

и нейтральный провод не нужен. Такую четырехпроводную систему можно заменить трехпроводной по схеме звезда — звезда без изменения режима (рис. 12.9).

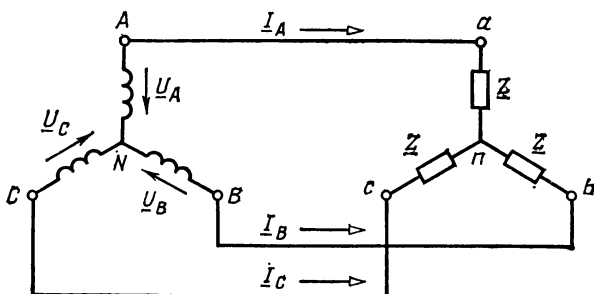


Рис. 12.9. Схемы трехфазной трехпроводной цепи

Режим остается симметричным с равным нулю током в нейтральном проводе четырехпроводной цепи и при конечном сопротивлении нейтрального провода.

При заданных фазных  $U_\phi$  или линейных  $U_\lambda$  напряжениях генератора и сопротивлениях  $Z$  приемников угол сдвига фаз  $\varphi$  между фазным напряжением и фазным (линейным) током можно определить через его тангенс или синус:

$$\operatorname{tg} \varphi = x/r \text{ или } \sin \varphi = x/z. \quad (12.17)$$

Активная мощность каждой фазы

$$P_\phi = U_\phi I_\phi \cos \varphi.$$

Активная мощность, отдаваемая генератором и получаемая приемниками,

$$P = 3P_\phi = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3} U_\lambda I_\lambda \cos \varphi, \quad (12.18)$$

так как  $U_\phi I_\phi = (U_\lambda / \sqrt{3}) I_\phi$  и  $I_\phi = I_\lambda$ .

Реактивная мощность фазы

$$Q_\phi = U_\phi I_\phi \sin \varphi.$$

Реактивная мощность, отдаваемая генератором и получаемая приемниками,

$$Q = 3Q_\phi = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi = \sqrt{3} U_\lambda I_\lambda \sin \varphi. \quad (12.19)$$

Полная мощность генератора или приемников

$$S = 3S_\phi = 3U_\phi I_\phi = \sqrt{3} U_\lambda I_\lambda. \quad (12.20)$$

**Пример 12.3.** Симметричный трехфазный приемник, фазы которого соединены звездой, подключен к сети с линейным напряжением 380 В. Активное сопротивление фазы  $r=4$  Ом, реактивное  $x_L=\omega L=3$  Ом. Определить фазные и линейные токи и активную мощность приемника.

**Решение.** Сопротивление фазы приемника  $Z=ze^{j\varphi}$ , где по (9.36) полное сопротивление фазы

$$z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ Ом}$$

и угол  $\varphi$ , определяемый через тангенс или синус по (12.17),

$$\sin \varphi = x/z = x_L/z = 3/5 = 0,6,$$

откуда  $\varphi=36^\circ 50'$ .

Фазный и равный ему линейный ток (12.16)

$$I_\phi = I_\lambda = \frac{U_\lambda / \sqrt{3}}{z} = \frac{380 / \sqrt{3}}{5} = \frac{220}{5} = 44 \text{ А.}$$

Активная мощность по (12.18)

$$P = \sqrt{3} \underline{U}_л I_л \cos \varphi = \sqrt{3} 380 \cdot 44 \cos 36^\circ 50' = 23\,230 \text{ Вт} = 23,23 \text{ кВт}.$$

**б) Соединение треугольником.** Схему соединения обмоток генератора треугольником (§ 12.3) и такую же схему соединения фаз трехфазного приемника или трех приемников (рис. 12.10, а) можно получить из несвязанной трех-

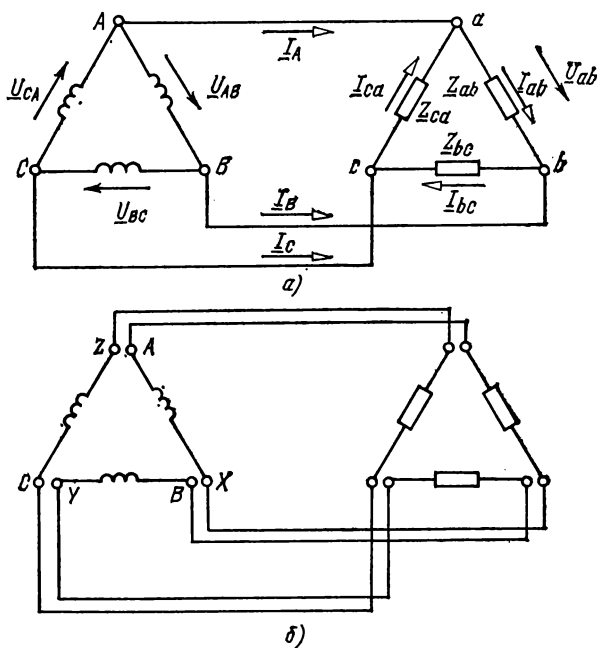


Рис. 12.10. Трехфазные цепи:  
а — связанная; б — несвязанная

фазной цепи с шестью проводами (рис. 12.10, б) путем замены каждой пары смежных проводов на рис. 12.10, б одним проводом.

При соединении треугольником фаз приемника или трех приемников с сопротивлениями  $\underline{Z}_{ab}$ ,  $\underline{Z}_{bc}$ ,  $\underline{Z}_{ca}$  эти приемники подключаются непосредственно к линейным проводам. Если сопротивлениями линейных проводов можно пренебречь, то линейные напряжения цепи  $\underline{U}_{AB}$ ,  $\underline{U}_{BC}$ ,  $\underline{U}_{CA}$  являются и фазными напряжениями приемников  $\underline{U}_{ab}$ ,  $\underline{U}_{bc}$ ,  $\underline{U}_{ca}$ .

Положительные направления линейных токов, как и при соединении звездой, выбираются от генератора к приемникам. За положительное направление фазных токов в приемниках принимаются направления от  $a$  к  $b$ , от  $b$  к  $c$ , от  $c$  к  $a$ , что указывается порядком букв в индексах, например  $I_{ab}$  — это ток в фазе  $ab$ , направленный от узла  $a$  к узлу  $b$ .

Ток в каждом линейном проводе равен разности токов двух фаз, которые соединены в один узел с этим проводом (рис. 12.10,  $a$ ), что следует из первого закона Кирхгофа. Для узла  $a$  (рис. 12.10,  $a$ )  $\underline{I}_A + \underline{I}_{ca} = \underline{I}_{ab}$  или

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}. \quad (12.21a)$$

Аналогично для узлов  $b$  и  $c$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} \quad (12.21b)$$

и

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}. \quad (12.21b)$$

Фазные токи приемников определяются по закону Ома:

$$\underline{I}_{ab} = \underline{U}_{ab} / \underline{Z}_{ab}; \quad \underline{I}_{bc} = \underline{U}_{bc} / \underline{Z}_{bc}; \quad \underline{I}_{ca} = \underline{U}_{ca} / \underline{Z}_{ca}. \quad (12.22)$$

Симметричный режим трехфазной цепи характеризуется симметричной системой напряжений  $\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{bc} = \underline{U}_{ca}$  или

$$\underline{U}_\pi = U_\phi \quad (12.23)$$

и симметричной системой токов, что возможно только при симметричном трехфазном приемнике, у которого комплексные сопротивления всех фаз одинаковые:

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z} = ze^{j\varphi}.$$

Таким образом, при симметричной системе напряжений (рис. 12.11)

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= U_\pi e^{j30^\circ} = U_\phi e^{j30^\circ}; \\ \underline{U}_{bc} &= U_\phi e^{j30^\circ} e^{-j120^\circ} = U_\phi e^{-j90^\circ}; \\ \underline{U}_{ca} &= U_\phi e^{j30^\circ} e^{+j120^\circ} = U_\phi e^{j150^\circ} \end{aligned}$$

и одинаковых сопротивлениях фаз приемника фазные токи

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}} = \frac{U_\phi e^{j30^\circ}}{ze^{j\varphi}} = I_\phi e^{j(30^\circ - \varphi)}; \quad (12.24a)$$



$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}} = \frac{U_{\phi} e^{-j90^\circ}}{ze^{j\varphi}} = I_{\phi} e^{-j(90^\circ + \varphi)} = I_{\phi} e^{j(30^\circ - \varphi - 120^\circ)}; \quad (12.24б)$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}} = \frac{U_{\phi} e^{j150^\circ}}{ze^{j\varphi}} = I_{\phi} e^{j(150^\circ - \varphi)} = I_{\phi} e^{j(30^\circ - \varphi + 120^\circ)}; \quad (12.24в)$$

т.е. образуют симметричную систему. Действующие значения токов одинаковы:  $I_{\phi} = U_{\phi}/z$ , а по фазе токи сдвинуты относительно друг друга на равные углы  $120^\circ$ .

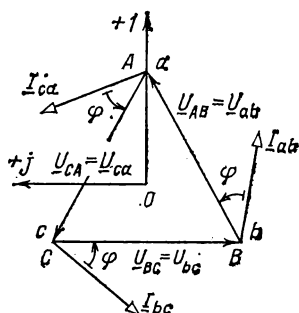


Рис. 12.11. Топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов при соединении треугольником

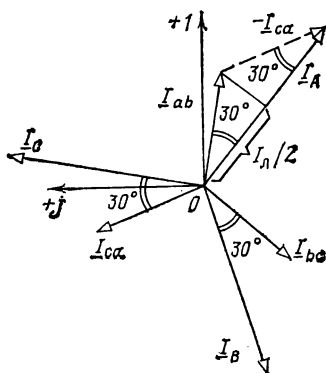


Рис. 12.12. Векторная диаграмма симметричной цепи при соединении треугольником

Чтобы показать на диаграмме сдвиги фаз между напряжениями и токами, векторы токов проведены (рис. 12.11) не из начала координат, а построены в точках  $A, B, C$ . Линейные токи равны разностям соответствующих фазных токов (рис. 12.12), их действующие значения одинаковые и сдвиги по фазе между ними, как и между фазными токами, равны  $120^\circ$ , что и показано на векторной диаграмме рис. 12.12, где линейные и фазные токи построены из начала координат. Из диаграммы видно, что векторы фазных токов смежных фаз вместе с вектором соответствующего линейного тока образуют равнобедренный треугольник с углами  $30^\circ, 30^\circ$  и  $120^\circ$ . Из треугольника получаем  $I_{\phi}/2 =$

$$= I_{\phi} \cos 30^{\circ} = I_{\phi} \sqrt{3}/2 \text{ или}$$

$$I_{\pi} = 2I_{\phi} \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}I_{\phi}, \quad (12.25)$$

т. е. линейный ток больше фазного в  $\sqrt{3}$  раз. Из диаграммы также следует, что каждый линейный ток отстает по фазе от соответствующего фазного тока на угол  $30^{\circ}$ .

При заданных напряжениях  $U_{\pi} = U_{\phi}$  и сопротивлениях  $Z$  приемника угол сдвига фаз между фазным напряжением и током можно определить, как и при соединении звездой, по (12.17).

Активная и реактивная мощности одной фазы

$$P_{\phi} = U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi; \quad Q_{\phi} = U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi.$$

Активная мощность, отдаваемая генератором и получаемая приемником,

$$P = 3P_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi = \sqrt{3}U_{\pi} I_{\pi} \cos \varphi, \quad (12.26)$$

так как по (12.23) и (12.25)  $U_{\phi} I_{\phi} = U_{\pi} I_{\pi} / \sqrt{3}$ .

Реактивная мощность, отдаваемая генератором и получаемая приемником,

$$Q = 3Q_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi = \sqrt{3}U_{\pi} I_{\pi} \sin \varphi. \quad (12.27)$$

Полная мощность генератора или приемника

$$S = 3S_{\phi} = 3U_{\phi} I_{\phi} = \sqrt{3}U_{\pi} I_{\pi}. \quad (12.28)$$

**Пример 12.4.** Асинхронный двигатель, фазы которого соединены треугольником, подключен к сети с линейным напряжением 380 В. Определить токи в фазах двигателя и проводах питающей сети при мощности двигателя 8 кВт и коэффициенте мощности 0,8.

**Решение.** При  $\cos \varphi = 0,8$  по (12.26) ток в проводах сети, т. е. линейный ток,

$$I_{\pi} = \frac{P}{\sqrt{3} U_{\pi} \cos \varphi} = \frac{8000}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,8} = 15,2 \text{ А.}$$

Токи в фазах двигателя

$$I_{\phi} = I_{\pi} / \sqrt{3} \approx 8,8 \text{ А.}$$

## 12.5. НЕСИММЕТРИЧНЫЙ РЕЖИМ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ

а) Соединение звездой с нейтральным проводом, сопротивлением которого можно пренебречь. Четырехпроводная система с симметричной, как обычно бывает в реальных

цепях, системой фазных напряжений генератора или сети питания

$$\underline{U}_A = \underline{U}_a = U_\phi; \quad \underline{U}_B = \underline{U}_b = U_\phi e^{-j120^\circ}; \quad \underline{U}_C = \underline{U}_c = U_\phi e^{+j120^\circ}$$

и несимметричном трехфазном приемнике или тремя различными приемниками, соединенными звездой, показана на рис. 12.7.

Ток в нейтральном проводе обуславливается неодинаковой (неравномерной) нагрузкой фаз. В частном случае при одинаковой нагрузке фаз, как было показано в § 12.4, он равен нулю. Практически ток в нейтральном проводе в большинстве случаев значительно меньше линейных токов. Поэтому в трехфазных системах нейтральный провод имеет сечение, в 2—3 раза меньшее сечения линейных проводов.

Обрыв нейтрального провода при неодинаковой нагрузке фаз приемника вызывает изменение фазных напряжений: повышение на одних фазах приемников и понижение на других. Такое изменение напряжения недопустимо; например, при осветительной нагрузке понижение напряжения на части ламп накаливания вызывает недостаточный накал их, а на других повышение напряжения приводит к перекалу и быстрому перегоранию ламп. Ввиду изложенного в нейтральных проводах предохранители не устанавливают.

Мощность в отдельных фазах в трехфазной цепи с нейтральным проводом определяется по тем же формулам, которые применялись для цепей переменного тока, т. е. комплексные мощности

$$\underline{S}_a = \underline{U}_a \underline{I}_a^* = P_a + jQ_a; \quad \underline{S}_b = \underline{U}_b \underline{I}_b^* = P_b + jQ_b; \\ \underline{S}_c = \underline{U}_c \underline{I}_c^* = P_c + jQ_c. \quad (12.29)$$

Активные мощности отдельных фаз можно определить и по формулам

$$P_a = U_a I_a \cos \varphi_a; \quad P_b = U_b I_b \cos \varphi_b; \quad P_c = U_c I_c \cos \varphi_c, \quad (12.30)$$

а активная мощность всей цепи равна сумме активных мощностей отдельных фаз:

$$P = P_a + P_b + P_c.$$

Реактивные мощности отдельных фаз

$$Q_a = U_a I_a \sin \varphi_a; \quad Q_b = U_b I_b \sin \varphi_b; \quad Q_c = U_c I_c \sin \varphi_c \quad (12.31)$$

и реактивная мощность всей цепи

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c.$$

Поэтому по (12.29) и

$$\underline{S} = \underline{S}_a + \underline{S}_b + \underline{S}_c \quad (12.32)$$

(но суммировать полные мощности, т.е.  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$ , а не комплексные, нельзя). Полная мощность  $S$  (или  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$ ) равна модулю соответствующей комплексной  $\underline{S}$  (или  $\underline{S}_a$ ,  $\underline{S}_b$ ,  $\underline{S}_c$ ).

Приемники электрической энергии можно разделить на две группы. К одной из них относятся электрические лампы, нагревательные приборы и другие однофазные приемники, которые не могут обеспечить равномерной нагрузки фаз. В четырехпроводной трехфазной системе эти приемники включаются между нейтральным проводом и каждым из линейных проводов (рис. 12.13), причем их номинальное напряжение должно быть равно фазному напряжению сети.

К другой группе относятся, например, трехфазные электродвигатели, которые имеют три одинаковые (симметричные) обмотки, обеспечивающие равномерную нагрузку трех фаз. Для таких приемников нейтральный провод не нужен (ток в нем равен нулю), и их включают в трехфазную сеть без нейтрального провода; их номинальное линейное напряжение должно быть равно линейному напряжению трехфазной сети, в которую они включаются.

**Пример 12.5.** Фазные напряжения генератора  $U_\phi = 240$  В, сопротивления фаз приемника (рис. 12.7)  $z_a = r_a = 20$  Ом,  $z_b = r_b = 8$  Ом,  $z_c = r_c = 50$  Ом. Сопротивлением линейных и нейтрального проводов можно пренебречь. Определить токи во всех участках цепи.

**Решение.** Направим вектор  $\underline{U}_A = \underline{U}_a$  вдоль действительной положительной полуоси, т.е. выберем у этого напряжения нулевую начальную фазу:  $U_a = U_\phi = 240$  В, напряжение

$$\underline{U}_b = U_\phi e^{-j120^\circ} = 240 (\cos 120^\circ - j \sin 120^\circ) = (-120 - j208) \text{ В},$$

аналогично напряжение

$$\underline{U}_c = U_\phi e^{j120^\circ} = (-120 + j208) \text{ В}.$$

Токи в участках (рис. 12.7)

$$\underline{I}_A = \underline{U}_a / r_a = 240 / 20 = 12 \text{ А}; \quad \underline{I}_A = 12 \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = \underline{U}_b / r_b = (-120 - j208) / 8 = (-15 - j26) \text{ А};$$

$$I_B = \sqrt{15^2 + 26^2} = 30 \text{ A};$$

$$\underline{I}_C = \underline{U}_c / r_c = (-120 + j 208) / 50 = (-2,4 + j 4,16) \text{ A};$$

$$I_C = \sqrt{2,4^2 + 4,16^2} = 4,8 \text{ A};$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 12 - 15 - j 26 - 2,4 + j 4,16 =$$

$$= (-5,4 - j 21,8) \text{ A};$$

$$I_N = \sqrt{5,4^2 + 21,8^2} = 22 \text{ A}.$$

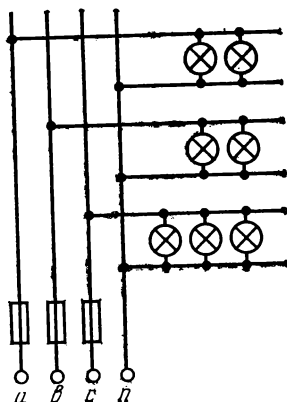


Рис. 12.13. Схема включения однофазных приемников энергии в четырехпроводную цепь

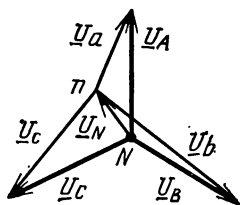


Рис. 12.15. Векторная диаграмма ЭДС генератора и напряжений на фазах приемника

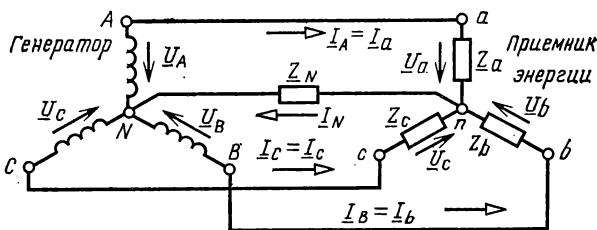


Рис. 12.14. Схема четырехпроводной трехфазной цепи при учете сопротивления нейтрального провода

б) **Трехфазная цепь с нейтральным проводом, обладающим сопротивлением.** Если сопротивлением нейтрального провода  $\underline{Z}_N$  пренебречь нельзя (рис. 12.14), то при неодинаковых сопротивлениях фаз приемника через нейтральный провод проходит ток  $\underline{I}_N$  и между нейтральями приемни-

ка  $n$  и генератора  $N$  возникает разность потенциалов — смещение нейтрали:  $\underline{U}_{nN} = \underline{U}_N = \underline{Z}_N \underline{I}_N$ .

Пренебрегая сопротивлением фаз генератора и линейных проводов, напряжения на фазах приемника определим как разности соответствующих напряжений фаз генератора и напряжения нейтрали, т. е.

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_N; \quad (12.33a)$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_N; \quad (12.33б)$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_N. \quad (12.33в)$$

При симметричной системе фазных напряжений генератора фазные напряжения приемника отличаются друг от друга тем больше, чем больше смещение нейтрали. На рис. 12.15 построены векторы фазных напряжений приемника  $\underline{U}_a, \underline{U}_b, \underline{U}_c$  при некотором смещении нейтрали  $\underline{U}_N$ .

Применив метод узлового напряжения (§ 2.9), смещение нейтрали определим по формуле

$$\underline{U}_{nN} = \underline{U}_N = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_a + \underline{U}_B \underline{Y}_b + \underline{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_N}, \quad (12.34)$$

где  $\underline{U}_A = \underline{E}_A$ ;  $\underline{U}_B = \underline{E}_B$ ;  $\underline{U}_C = \underline{E}_C$ ;  $\underline{Y}_a = 1/\underline{Z}_a$ ;  $\underline{Y}_b = 1/\underline{Z}_b$ ;  $\underline{Y}_c = 1/\underline{Z}_c$ ;  $\underline{Y}_N = 1/\underline{Z}_N$ , так как сопротивления фаз генератора не учитываются.

Если сопротивлениями линейных проводов пренебречь нельзя, то их следует учесть соответствующим увеличением сопротивлений фаз приемника.

Таким образом, расчет рассматриваемой цепи сводится к определению напряжения смещения нейтрали (12.34), после чего по формулам (12.33) находятся фазные напряжения приемника и по закону Ома фазные и равные им линейные токи цепи:

$$\begin{aligned} \underline{I}_a &= \underline{I}_A = \underline{Y}_a \underline{U}_a; & \underline{I}_b &= \underline{I}_B = \underline{Y}_b \underline{U}_b; \\ \underline{I}_c &= \underline{I}_C = \underline{Y}_c \underline{U}_c; & \underline{I}_N &= \underline{Y}_N \underline{U}_N, \end{aligned} \quad (12.35)$$

причем по первому закону Кирхгофа

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c.$$

Мощности в фазах приемника можно определить по комплексам напряжений и сопряженным комплексам токов:

$$\underline{S}_a = \underline{U}_a \dot{\underline{I}}_a = P_a + jQ_a; \quad \underline{S}_b = \underline{U}_b \dot{\underline{I}}_b = P_b + jQ_b;$$

$$\underline{S}_c = \underline{U}_c \dot{\underline{I}}_c = P_c + jQ_c$$

или по формулам, аналогичным (12.30)—(12.33).

Рассмотренный метод расчета применим и для трехпроводной цепи, если принять  $Z_N = \infty$ ,  $Y_N = 0$  и  $I_N = 0$ .

При расчете токов приемников, соединенных звездой и подключенных к сети с заданной симметричной системой линейных напряжений  $U_\Delta$ , можно допустить, что эти напряжения  $U_\Delta$  создаются замещающим генератором (на рис. 12.16 показан штриховой линией). Фазные напряжения такого генератора  $U_A = U_B = U_C = E_A = E_B = E_C = U_\Delta / \sqrt{3}$ . После этого полученная цепь рассчитывается рассмотренным выше методом.

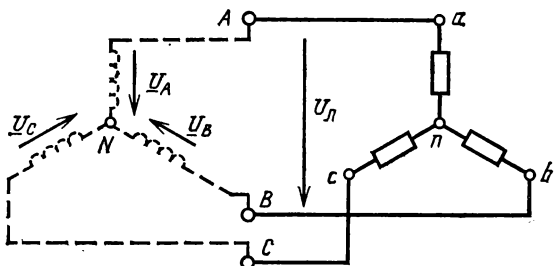


Рис. 12.16. Приемник энергии, фазы которого соединены звездой

**Пример 12.6.** К симметричному генератору, фазы которого соединены звездой с фазными ЭДС  $E_A = E_B = E_C = 120$  В, присоединен приемник, фазы которого тоже соединены звездой (рис. 12.14). Сопротивления фаз приемника:  $z_a = r_a = 1$  Ом,  $z_b = r_b = 0,4$  Ом;  $z_c = r_c = 2,5$  Ом. Сопротивление нейтрального провода  $\underline{Z}_N = 0,3 + j0,4$  Ом. Определить фазные напряжения приемника.

**Решение.** Комплексные фазные ЭДС или напряжения генератора (в вольтах)

$$\underline{U}_A = U_\phi = 120; \quad \underline{U}_B = U_\phi e^{-j120^\circ} = -60 - j104;$$

$$\underline{U}_C = U_\phi e^{j120^\circ} = -60 + j104.$$

Проводимости отдельных участков цепи (в сименсах)

$$\underline{Y}_a = 1/r_a = 1; \quad \underline{Y}_b = 1/r_b = 2,5; \quad \underline{Y}_c = 1/r_c = 0,4;$$

$$\underline{Y}_N = 1/\underline{Z}_N = 1/(0,3 + j0,4) = 1,2 - j1,6.$$

Узловое напряжение по (12.34)

$$\underline{U}_{nN} = \frac{120 \cdot 1 + (-60 - j104) \cdot 2,5 + (-60 + j104) \cdot 0,4}{1 + 2,5 + 0,4 + j1,6} = (2,6 - j42) \text{ В.}$$

Напряжения на фазах приемника (в вольтах) по (12.33)

$$\underline{U}_a = 120 - (2,6 - j42) = 117,4 + j42;$$

$$U_a = \sqrt{117^2 + 42^2} = 122;$$

$$\underline{U}_b = -60 - j104 - (2,6 - j42) = -62,6 - j62; \quad U_b = 84,4;$$

$$\underline{U}_c = -60 + j104 - (2,6 - j42) = -62,6 + j146,2; \quad U_c = 159.$$

**в) Топографическая диаграмма.** Напряжения между отдельными точками трехфазной цепи можно найти графически, построив топографическую диаграмму.

Построим диаграмму для цепи по рис. 12.14. Будем считать, что точка  $N$ , расположенная в начале координат (рис. 12.17), соответствует нейтральной точке генератора, потенциал которой принят за нулевой:  $\varphi_N = 0$ . Откладывая из точки  $N$  векторы фазных напряжений  $\underline{U}_A$ ,  $\underline{U}_B$  и  $\underline{U}_C$ , получаем точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , соответствующие точкам цепи, обозначенным теми же буквами. Вектор  $\underline{U}_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$ , равный разности векторов  $\underline{U}_A - \underline{U}_B$ , изображает линейное напряжение. Аналогично и векторы  $\underline{U}_{BC}$  и  $\underline{U}_{CA}$  изображают линейные напряжения.

Отложив из точки  $N$  вектор  $\underline{U}_N = \underline{U}_{nN} = \varphi_n - \varphi_N = \varphi_n$ , изображающий смещение нейтрали, получим точку  $n$  — потенциал нейтральной точки приемника, а векторы  $\underline{U}_a$ ,  $\underline{U}_b$  и  $\underline{U}_c$  изображают соответствующие фазные напряжения приемника.

Если смещение нейтрали отсутствует, т. е.  $\underline{U}_N = \underline{U}_{nN} = 0$ , то точка  $n$  совпадает с точкой  $N$ .

**г) Соединение треугольником.** Схема соединения обмоток генератора и несимметричного трехфазного приемника или трех различных приемников треугольником была дана на рис. 12.10, а. Если можно пренебречь сопротивлением проводов, то линейные и фазные напряжения приемника равны, как и для симметричной цепи, соответствующим напряжениям генератора:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{AB} = U_\phi e^{j30^\circ}; \quad \underline{U}_{bc} = \underline{U}_{BC} = U_\phi e^{-j90^\circ};$$

$$\underline{U}_{ca} = \underline{U}_{CA} = U_\phi e^{j150^\circ}.$$



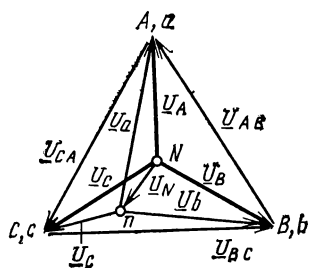


Рис. 12.17. Топографическая диаграмма цепи, изображенной на рис. 12.14

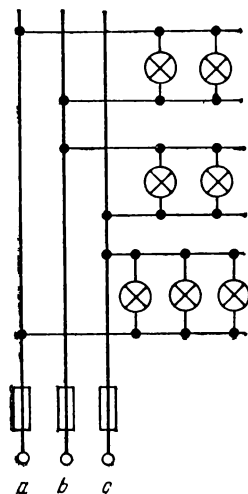


Рис. 12.18. Схема включения однофазных приемников трехугольником

Фазные токи определяются по закону Ома (12.22) и линейные по первому закону Кирхгофа (12.21).

Векторная диаграмма токов строится аналогично показанной на рис. 12.12, но ни фазные, ни линейные токи не образуют симметричную тройку векторов. Применять множитель  $\sqrt{3}$  для несимметричной системы токов нельзя.

При несимметричном режиме работы комплексные мощности в отдельных фазах

$$\underline{S}_{ab} = \underline{U}_{ab} \dot{\underline{I}}_{ab} = P_{ab} + jQ_{ab};$$

$$\underline{S}_{bc} = \underline{U}_{bc} \dot{\underline{I}}_{bc} = P_{bc} + jQ_{bc};$$

$$\underline{S}_{ca} = \underline{U}_{ca} \dot{\underline{I}}_{ca} = P_{ca} + jQ_{ca}.$$

Комплексная, активная и реактивная (но не полная) мощности трехфазной цепи определяются суммированием соответствующих мощностей всех фаз.

**Пример 12.7.** К сети с симметричными линейными напряжениями  $U_L = 220$  В подключен приемник, фазы которого соединены треугольником. Сопротивления фаз приемника (в омах)  $\underline{Z}_{ab} = 3 + j4$ ;  $\underline{Z}_{bc} = 10$ ;  $\underline{Z}_{ca} = 8 + j6$ . Определить фазные токи и линейный ток  $I_A$ .

**Решение.** Представим линейные напряжения комплексными числами. Так как начальную фазу одной из синусоидальных величин можно выбрать произвольно, то для упрощения расчетов в отличие от рис.

12.11 будем считать вектор  $\underline{U}_{ab}$  направленным по действительной оси, т. е. примем  $\underline{U}_{ab} = U_{ab} = 220 \text{ В}$ . В этом случае напряжения (в вольтах)

$$\underline{U}_{bc} = 220e^{-j120^\circ} = -110 - j190; \quad \underline{U}_{ca} = 220e^{j120^\circ} = -110 + j190.$$

Фазные токи (в амперах)

$$\underline{I}_{ab} = \underline{U}_{ab} / \underline{Z}_{ab} = 220 / (3 + j4) = 26,4 - j35,2;$$

$$I_{ab} = \sqrt{26,4^2 + 35,2^2} = 44;$$

$$\underline{I}_{bc} = \underline{U}_{bc} / \underline{Z}_{bc} = (-110 - j190) / 10 = -11 - j19;$$

$$I_{bc} = \sqrt{11^2 + 19^2} = 22;$$

$$\underline{I}_{ca} = \underline{U}_{ca} / \underline{Z}_{ca} = (-110 + j190) / (8 + j6) = 2,6 + j21,8;$$

$$I_{ca} = \sqrt{2,6^2 + 21,8^2} = 22.$$

Линейный ток (в амперах)

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 26,4 - j35,2 - 2,6 - j21,8 = 23,8 - j57,0;$$

$$I_A = \sqrt{23,8^2 + 57,0^2} = 61,8.$$

д) **Смешанные схемы соединения.** Схемы соединения приемников энергии не зависят от схемы соединения обмоток генератора. Основным условием, определяющим схему соединения приемников, является соотношение между напряжением сети и номинальным напряжением приемника. Приемник должен включаться так, чтобы на выводах однофазного приемника или на выводах каждой фазы трехфазного приемника было напряжение, равное их номинальному фазному напряжению. Например, лампы накаливания с номинальным напряжением 127 В включаются по схеме звезда с нейтральным проводом (рис. 12.7) при линейном напряжении сети  $220 \text{ В} = \sqrt{3} \cdot 127 \text{ В}$  или по схеме треугольника при напряжении сети 127 В (рис. 12.18). Лампы с номинальным напряжением 220 В включаются в сеть с напряжением 380 В  $= \sqrt{3} \cdot 220 \text{ В}$  по схеме звезда с нейтральным проводом (рис. 12.7) и по схеме треугольник (рис. 12.18) — в сеть с линейным напряжением 220 В; электродвигатель с номинальными напряжениями 127/220 В включается в сеть с напряжением 127 В по схеме треугольник, а в сеть с напряжением 220 В — по схеме звезда; аналогично при напряжениях электродвигателя 220/380 В он включается треугольником в сеть с напряжением 220 В или звездой — в сеть с напряжением 380 В.

## 12.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СХЕМ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ

а) Преобразование треугольника в эквивалентную звезду и обратное преобразование звезды в эквивалентный треугольник. Расчет трехфазной цепи с приемниками, соединенными треугольником, если сопротивлениями подводящих проводов нельзя пренебречь (рис. 12.19), значительно

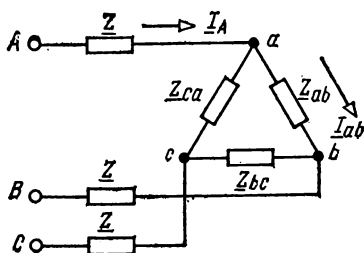


Рис. 12.19. Трехпроводная линия с приемниками, фазы которых соединены треугольником

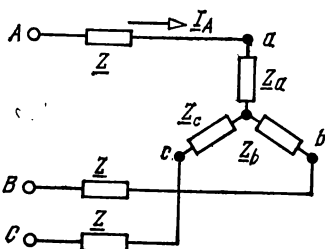


Рис. 12.20. Трехпроводная линия с приемниками, фазы которых соединены звездой

упрощается, если треугольник заменить эквивалентной звездой.

Из § 2.5 известно, что сопротивления лучей эквивалентной звезды можно определить через сопротивление сторон треугольника по формулам

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_a &= \frac{\underline{Z}_{ab} \underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \\ \underline{Z}_b &= \frac{\underline{Z}_{bc} \underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \\ \underline{Z}_c &= \frac{\underline{Z}_{ca} \underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}. \end{aligned} \right\} \quad (12.36)$$

При симметричной (равномерной) нагрузке, т.е. при  $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}_{\Delta}$ , сопротивление луча эквивалентной звезды

$$\underline{Z}_{\lambda} = \underline{Z}_{\Delta} / 3 \quad (12.36a)$$

или сопротивление луча эквивалентной звезды в 3 раза меньше сопротивления стороны треугольника.

После замены треугольника звездой получается цепь (рис. 12.20), расчет которой дан в § 12.5, б.

Сначала надо определить  $\underline{U}_N = \underline{U}_{nN}$  по (12.34), где  $\underline{Y}_a = 1/(\underline{Z} + \underline{Z}_a)$ ;  $\underline{Y}_b = 1/(\underline{Z} + \underline{Z}_b)$ ;  $\underline{Y}_c = 1/(\underline{Z} + \underline{Z}_c)$ ;  $\underline{Y}_N = 0$ .

Затем рассчитываются фазные напряжения аналогично (12.33)

$$\underline{U}_{An} = \underline{U}_A - \underline{U}_N; \quad \underline{U}_{Bn} = \underline{U}_B - \underline{U}_N; \quad \underline{U}_{Cn} = \underline{U}_C - \underline{U}_N$$

и аналогично (12.35) линейные токи

$$\underline{I}_A = \underline{Y}_a \underline{U}_{An}; \quad \underline{I}_B = \underline{Y}_b \underline{U}_{Bn}; \quad \underline{I}_C = \underline{Y}_c \underline{U}_{Cn}.$$

Напряжения на приемнике, фазы которого соединены звездой, по закону Ома

$$\underline{U}_a = \underline{Z}_a \underline{I}_A; \quad \underline{U}_b = \underline{Z}_b \underline{I}_B; \quad \underline{U}_c = \underline{Z}_c \underline{I}_C.$$

Линейные напряжения приемника по определению

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_a - \underline{U}_b; \quad \underline{U}_{bc} = \underline{U}_b - \underline{U}_c; \quad \underline{U}_{ca} = \underline{U}_c - \underline{U}_a.$$

Токи приемника, фазы которого соединены треугольником (рис. 12.19),

$$\underline{I}_{ab} = \underline{U}_{ab}/\underline{Z}_{ab}; \quad \underline{I}_{bc} = \underline{U}_{bc}/\underline{Z}_{bc}; \quad \underline{I}_{ca} = \underline{U}_{ca}/\underline{Z}_{ca}.$$

Из § 2.5 известно, что сопротивление сторон эквивалентного треугольника можно определить через сопротивления лучей звезды по формулам

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{ab} &= \underline{Z}_a + \underline{Z}_b + \underline{Z}_a \underline{Z}_b / \underline{Z}_c; \\ \underline{Z}_{bc} &= \underline{Z}_b + \underline{Z}_c + \underline{Z}_b \underline{Z}_c / \underline{Z}_a; \\ \underline{Z}_{ca} &= \underline{Z}_c + \underline{Z}_a + \underline{Z}_c \underline{Z}_a / \underline{Z}_b. \end{aligned} \right\} \quad (12.37)$$

При симметричной нагрузке, т. е. при  $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}_\Delta$ , сопротивление сторон эквивалентного треугольника в 3 раза больше сопротивления луча звезды, т. е.

$$\underline{Z}_\Delta = 3\underline{Z}_\Delta. \quad (12.37a)$$

**б) Преобразование схем с несколькими приемниками.** Если два или несколько несимметричных приемников соединены звездой (рис. 12.21), то при симметричной системе линейных напряжений фазные напряжения будут несимметричны и напряжение между нейтральными точками приемников  $n'$  и  $n''$  не равно нулю. Следовательно, одноименные фазы приемников нельзя считать соединенными па-

параллельно и проводимости одноименных фаз складывать нельзя. Режим работы каждого приемника рассчитывается независимо от другого, аналогично расчету в § 12.5, 6, так как напряжения питания каждого приемника заданы.

При заданной системе линейных напряжений режим

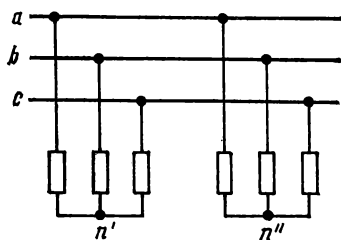


Рис. 12.21. Два приемника, фазы каждого из которых соединены звездой

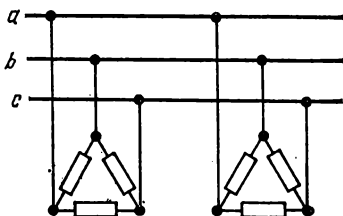


Рис. 12.22. Два приемника, фазы каждого из которых соединены треугольником

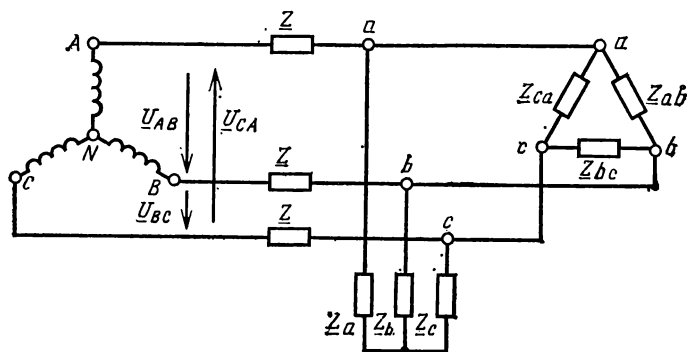


Рис. 12.23. Схема трехфазной цепи с приемниками, фазы которых соединены звездой и треугольником.

работы приемников, показанных на рис. 12.22, также рассчитывается независимо друг от друга аналогично расчету в § 12.5, в.

Для расчета режима цепи по рис. 12.23 необходимо выполнить ряд преобразований. Сначала следует приемник с фазами, соединенными звездой, преобразовать по формулам (12.37) в приемник с фазами, соединенными треугольником. Два треугольника заменяются одним, так как соответствующие стороны оказываются включенными параллельно. В результате получается цепь, представленная на рис. 12.19, расчет режима которой был уже рассмотрен.

## 12.7. МОЩНОСТИ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Мгновенная мощность трехфазной цепи равна сумме мгновенных мощностей трех фаз:

$$p = p_A + p_B + p_C = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C. \quad (12.38)$$

При симметричном режиме сдвиг фаз  $\varphi$  между соответствующими фазным напряжением и фазным током один и тот же и мгновенная мощность

$$p_A = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin (\omega t - \varphi) = U_\phi I_\phi \cos \varphi - \\ - U_\phi I_\phi \cos (2\omega t - \varphi);$$

$$p_B = U_m \sin (\omega t - 120^\circ) \cdot I_m \sin (\omega t - 120^\circ - \varphi) = \\ = U_\phi I_\phi \cos \varphi - U_\phi I_\phi \cos (2\omega t - 240^\circ - \varphi);$$

$$p_C = U_m \sin (\omega t + 120^\circ) \cdot I_m \sin (\omega t + 120^\circ - \varphi) = \\ = U_\phi I_\phi \cos \varphi - U_\phi I_\phi \cos (2\omega t + 240^\circ - \varphi),$$

где принято во внимание, что  $U_\phi I_\phi = U_m I_m / 2$ .

Учитывая, что

$$U_\phi I_\phi \cos (2\omega t - \varphi) + U_\phi I_\phi \cos (2\omega t - 240^\circ - \varphi) + \\ + U_\phi I_\phi \cos (2\omega t + 240^\circ - \varphi) = 0,$$

получаем

$$p = p_A + p_B + p_C = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi.$$

Таким образом, при симметричном режиме мгновенная мощность трехфазной цепи не зависит от времени и равна активной мощности цепи:

$$p = P = 3P_\phi. \quad (12.38a)$$

Трехфазная цепь, мгновенная мощность которой постоянна, называется уравновешенной. Таким образом, трехфазный электродвигатель развивает на валу постоянную мощность, чем он выгодно отличается от однофазного, мощность которого в течение периода изменяется.

Активная мощность трехфазной цепи равна сумме активных мощностей всех трех фаз:

$$P = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C. \quad (12.39)$$

При симметричном режиме работы  $U_A = U_B = U_C = U_\phi$ ;

$$I_A = I_B = I_C = I_\phi \text{ и } \varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi.$$

Таким образом,

$$P = 3P_{\Phi} = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi, \quad (12.40)$$

так как при соединении приемников звездой

$$I_{\Phi} = I_{\text{л}} \text{ и } U_{\Phi} = U_{\text{л}}/\sqrt{3},$$

а при соединении треугольником

$$I_{\Phi} = I_{\text{л}}/\sqrt{3} \text{ и } U_{\Phi} = U_{\text{л}}.$$

Следует помнить, что у линейных токов и напряжений индексы «л» часто не пишут, также не пишут индексы у углов сдвига фаз  $\varphi$  между фазными напряжением и током.

Реактивная мощность трехфазной цепи равна алгебраической сумме реактивных мощностей трех фаз:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = I_A U_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C. \quad (12.41)$$

При симметричном режиме работы реактивная мощность цепи

$$Q = 3Q_{\Phi} = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \sin \varphi = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi. \quad (12.42)$$

При симметричном режиме работы полная мощность трехфазной цепи

$$S = 3S_{\Phi} = 3U_{\Phi} I_{\Phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}}. \quad (12.43)$$

Из написанных соотношений (12.40), (12.42) и (12.43) следует, что при симметричном режиме

$$\cos \varphi = P/S; \quad \sin \varphi = Q/S \text{ и } \operatorname{tg} \varphi = Q/P.$$

**Пример 12.8.** В сеть с напряжением  $U_{\text{л}}=220$  В включен симметричный приемник, фазы которого соединены звездой. При сопротивлении фазы приемника  $z=10$  Ом ее активное сопротивление  $r=8$  Ом. Определить активную мощность приемника.

**Решение.** Коэффициент мощности

$$\cos \varphi = r/z = 8/10 = 0,8.$$

Фазные напряжения и токи

$$U_{\Phi} = U_{\text{л}}/\sqrt{3} = 220/\sqrt{3} = 127 \text{ В};$$

$$I_{\Phi} = U_{\Phi}/z = 127/10 = 12,7 \text{ А}.$$

Активная мощность.

$$P = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi = 3 \cdot 127 \cdot 12,7 \cdot 0,8 = 3870 \text{ Вт} = 3,87 \text{ кВт}.$$

**Пример 12.9.** Активная мощность трехфазной цепи 40 кВт, а реактивная мощность 30 квар. Определить коэффициент мощности.

**Решение.**

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ кВ} \cdot \text{А};$$

$$\cos \varphi = P/S = 40/50 = 0,8.$$

## 12.8. ИЗМЕРЕНИЕ МОЩНОСТИ В ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ

При симметричном режиме работы трехфазной цепи, измерив мощность одной фазы и умножив ее на 3, получим мощность всей цепи.

На рис. 12.24, *а* и *б* даны схемы включения однофазного ваттметра для измерения активной мощности одной фазы при соединении фаз приемника звездой и треугольником. В обеих схемах токовая обмотка ваттметра включена

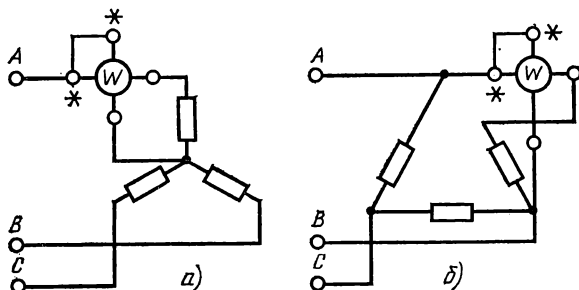


Рис. 12.24. Схема включения ваттметра для измерения мощности трехфазной цепи при равномерной нагрузке и доступной нейтральной точке (*а*), при соединении фаз приемника треугольником и равномерной нагрузке (*б*)

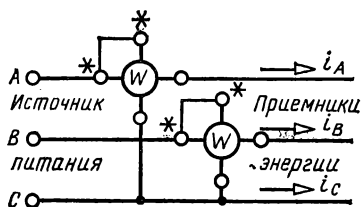


Рис. 12.25. Схема включения двух ваттметров для измерения мощности трехфазной цепи методом двух ваттметров

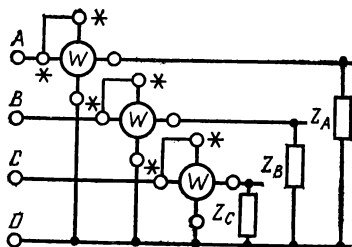


Рис. 12.26. Схема измерения мощности в четырехпроводной трехфазной цепи



последовательно с одной фазой приемника, параллельно которой включена цепь напряжения ваттметра.

При возможном асимметричном режиме работы трехфазной трехпроводной цепи измерение мощности производится двумя ваттметрами (рис. 12.25). Покажем, что достаточно двух ваттметров для измерения активной мощности. Мгновенная мощность трехфазной цепи (12.38)

$$p = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C.$$

Если фазы приемника соединены звездой, то  $i_A + i_B + i_C = 0$ , откуда  $i_C = -i_A - i_B$ . Подставив это выражение тока в формулу мощности, получим

$$p = u_A i_A + u_B i_B - u_C i_A - u_C i_B$$

или

$$p = (u_A - u_C) i_A + (u_B - u_C) i_B.$$

Так как при соединении звездой разность двух фазных напряжений равна линейному напряжению  $u_A - u_C = u_{AC}$  и  $u_B - u_C = u_{BC}$ , то

$$p = u_{AC} i_A + u_{BC} i_B = p_1 + p_2, \quad (12.44)$$

т. е. мгновенная мощность трехфазной цепи может быть представлена суммой двух слагающих  $p_1$  и  $p_2$ .

Следовательно, если включить один ваттметр так, чтобы по его последовательной обмотке проходил ток  $i_A$  и на параллельной цепи было напряжение  $u_{AC}$  (рис. 12.25), то этот ваттметр измеряет величину

$$P_1 = U_{AC} I_A \cos \psi_1,$$

где  $\psi_1$  — угол сдвига фаз между  $\underline{U}_{AC}$  и  $\underline{I}_A$ .

Второй ваттметр (рис. 12.25) при токе  $i_B$  в его последовательной обмотке и напряжении  $u_{BC}$  на его параллельной цепи измерит величину

$$P_2 = U_{BC} I_B \cos \psi_2,$$

где  $\psi_2$  — угол сдвига фаз между  $\underline{U}_{BC}$  и  $\underline{I}_B$ .

Но если сумма слагающих  $p_1$  и  $p_2$  равна мгновенной мощности трехфазной цепи, то сумма величин  $P_1$  и  $P_2$  равна средней за период мощности трехфазной цепи, т. е.

$$P = P_1 + P_2 = U_{AC} I_A \cos \psi_1 + U_{BC} I_B \cos \psi_2. \quad (12.45)$$

Таким образом, складывая (алгебраически) показания двух ваттметров, включенных по схеме рис. 12.25, по-

лучаем мощность трехфазной цепи. При этом каждая из величин  $P_1$  и  $P_2$  отдельно никакой реальной мощности не выражает.

Полученные выводы справедливы и для случая соединения приемников треугольником, так как соединение треугольником всегда можно заменить эквивалентной звездой.

Вместо двух ваттметров чаще применяют двухэлементный ваттметр, по показанию которого непосредственно определяется мощность трехфазной цепи.

Активная мощность четырехпроводной трехфазной цепи определяется суммой показаний трех ваттметров, каждый из которых измеряет мощность одной фазы (рис. 12.36). Вместо трех ваттметров часто применяется один трехэлементный ваттметр, схема включения которого ничем не отличается от схемы включения трех ваттметров.

## 12.9. ВРАЩАЮЩЕЕСЯ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

а) **Получение вращающегося поля.** Большим достоинством трехфазной системы является возможность получения вращающегося магнитного поля, которое находит широкое применение в электрических машинах. Рассмотрим принцип получения вращающегося магнитного поля.

На внутренней поверхности стального цилиндра — статора трехфазного электродвигателя (рис. 12.27) укреплены три одинаковые катушки  $AX$ ,  $BY$  и  $CZ$ , соединенные звездой. Оси катушек сдвинуты в пространстве на углы  $120^\circ$  относительно друг друга. По катушкам проходят токи

$$\begin{aligned} i_A &= I_m \sin \omega t; & i_B &= I_m \sin (\omega t - 2\pi/3); \\ i_C &= I_m \sin (\omega t + 2\pi/3), \end{aligned}$$

изображенные на рис. 12.28.

Направление тока от начала каждой катушки к ее концу (рис. 12.27) примем за положительное. На рис. 12.29 катушки изображены упрощенно, каждая в виде одного витка, и для моментов времени  $a, б, в, г, д, е, ж$  (рис. 12.28) показаны направления токов. Например, в момент  $a$  ток в первой катушке равен нулю; ток в третьей катушке имеет положительное направление и поэтому в начале катушки ( $C$ ) изображен крестиком (т. е. направлен за плоскость рисунка); ток во второй катушке имеет отрицательное направление и в начале катушки ( $B$ ) изображен точкой.

Построив магнитные линии, охватывающие одинаково

направленные токи, для всех выбранных моментов времени, увидим, что направление суммарного магнитного потока в роторе (показано стрелкой) изменяется. Суммарный магнитный поток вращается по направлению движения часовой стрелки и совершает в течение периода один оборот.

Направление вращения потока можно определить и следующим образом: когда ток в катушке достигает положи-

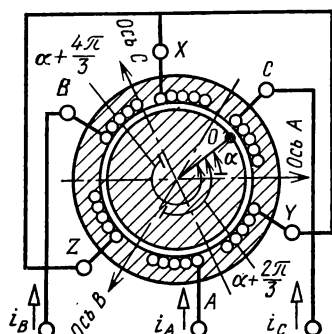


Рис. 12.27. Расположение обмоток на статоре трехфазного двигателя

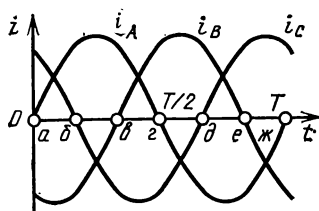


Рис. 12.28. Токи трехфазной системы

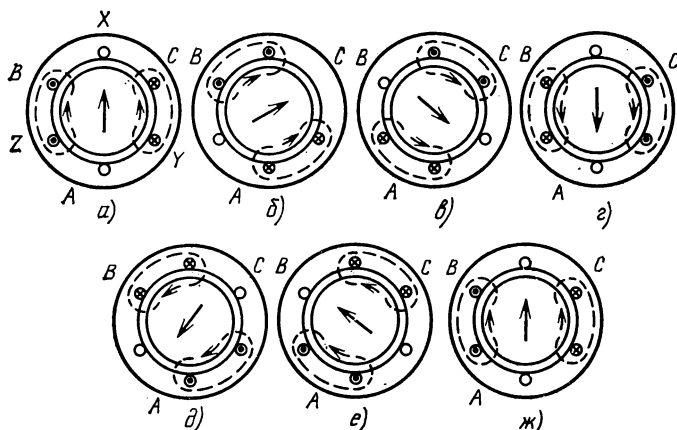


Рис. 12.29. Вращающийся магнитный поток трехфазной системы токов

тельного максимального значения, направление вращающегося потока совпадает с положительным направлением оси этой катушки. Положительные направления осей *A*, *B* и *C* указаны на рис. 12.29 стрелками, они найдены по правилу буравчика; поэтому, определив порядок чередования ам-

плитуд тока в катушках, можно легко установить направление вращения потока.

Для изменения направления вращения магнитного потока достаточно изменить последовательность фаз, т. е. поменять токи в двух катушках, например вторую катушку присоединить к фазе *С*, третью — к фазе *В*. В этом нетрудно убедиться, выполнив построения, аналогичные рассмотренным.

б) **Уравнение вращающегося магнитного поля.** Допустим, что на внутренней поверхности статора (рис. 12.30, *а*) уло-

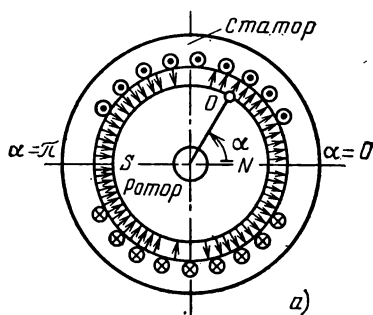
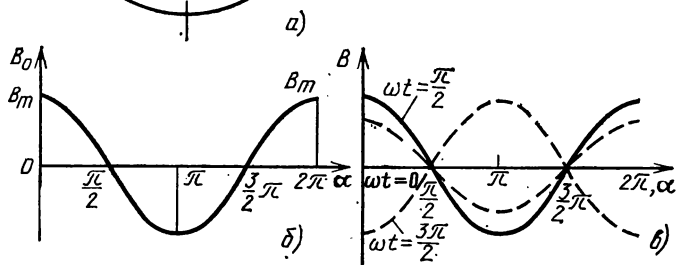


Рис. 12.30. Магнитный поток с косинусоидальным распределением индукции в воздушном зазоре (*а, б*) и изменение магнитной индукции во времени — пульсирующий поток (*в*)



жен ряд витков, по которым проходит постоянный ток. Магнитные линии охватывают токи, проходящие по виткам, но на рис. 12.30, *а* они показаны только в воздушном зазоре.

Соответствующим неравномерным размещением витков на поверхности статора можно получить магнитную индукцию в воздушном зазоре, изменяющуюся по закону

$$B_0 = B_m \cos \alpha. \quad (12.46)$$

Здесь  $B_0$  — индукция в произвольной точке зазора  $O$ ;  $\alpha$  — угол, образованный осью катушки и радиусом, соединяющим точку  $O$  с центром катушки;  $B_m$  — наибольшее значение индукции в зазоре на оси катушки, т. е. в точках, где

угол  $\alpha$  равен нулю и  $\pi$ ; там, где этот угол равен  $\pi/2$  и  $3\pi/2$ , магнитная индукция равна нулю (рис. 12.30, б). Условимся считать в соответствии с законом  $B_0 = B_m \cos \alpha$  магнитную индукцию положительной там, где магнитные линии входят в статор, и отрицательной там, где они из него выходят.

При постоянном токе индукция в зазоре с течением времени не изменяется, но в точках, смещенных относительно оси катушки на разные углы  $\alpha$ , имеет различные значения  $B_0$ .

При переменном токе  $i = I_m \sin \omega t$  форма магнитных линий остается прежней, но магнитная индукция в каждой точке зазора изменяется во времени пропорционально току (рис. 12.30, в). Изменение направления тока означает изменение направления магнитных линий на противоположное. Такой магнитный поток называется пульсирующим. Закон изменения его индукции в произвольной точке зазора

$$B = B_0 \sin \omega t = B_m \sin \omega t \cdot \cos \alpha, \quad (12.47)$$

и после преобразования по формуле тригонометрии

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \sin (x - y) + \frac{1}{2} \sin (x + y) \quad (12.48)$$

находим магнитную индукцию

$$B = \frac{1}{2} B_m \sin (\omega t - \alpha) + \frac{1}{2} B_m \sin (\omega t + \alpha).$$

Выразим теперь магнитную индукцию поля  $B$  в произвольной точке зазора трехфазной машины. Магнитный поток в этом случае возбуждается тремя токами, которые проходят по трем катушкам (обмоткам), расположенным на статоре и сдвинутым в пространстве (рис. 12.27) на углы  $2\pi/3$ ; между токами обмоток сдвиг по фазе также равен  $2\pi/3$ .

Ток в обмотке  $AХ$  создает составляющую магнитной индукции, определяемую по (12.47):

$$B_A = B_m \sin \omega t \cdot \cos \alpha.$$

Составляющие магнитной индукции, создаваемые токами в двух других обмотках, сдвинуты по фазе на углы  $-2\pi/3$  (в фазе  $B$ ) и  $+2\pi/3$  (в фазе  $C$ ), так как токи сдвинуты по фазе, и смещены в пространстве на углы  $2\pi/3$  и  $4\pi/3$  из-за смещения осей обмоток. Следовательно,

$$B_B = B_m \sin (\omega t - 2\pi/3) \cos (\alpha + 2\pi/3);$$

$$B_C = B_m \sin(\omega t + 2\pi/3) \cos(\alpha + 4\pi/3).$$

причем каждая составляющая  $B_A$ ,  $B_B$ ,  $B_C$  — это индукция пульсирующего поля. Результирующая магнитная индукция в произвольной точке

$$B = B_A + B_B + B_C.$$

После разложения каждой из составляющих индукции на два слагаемых по формуле (12.48) получим

$$B_A = \frac{1}{2} B_m \sin(\omega t - \alpha) + \frac{1}{2} B_m \sin(\omega t + \alpha); \quad (12.48a)$$

$$B_B = \frac{1}{2} B_m \sin(\omega t - \alpha - 4\pi/3) + \frac{1}{2} B_m \sin(\omega t + \alpha); \quad (12.48б)$$

$$B_C = \frac{1}{2} B_m \sin(\omega t - \alpha - 2\pi/3) + \frac{1}{2} B_m \sin(\omega t + \alpha). \quad (12.48в)$$

Сумма первых слагаемых трех составляющих равна нулю. Поэтому результирующая магнитная индукция  $B$  равна сумме вторых слагаемых, т. е.

$$B = \frac{3}{2} B_m \sin(\omega t + \alpha). \quad (12.49)$$

Выясним физический смысл выражения (12.49).

Аргумент синуса составляет сумма  $\omega t + \alpha$ . Если бы эта сумма не зависела от времени, то индукция в любой точке зазора была бы постоянной. Но при  $\alpha = \text{const}$ , т. е. в любой выбранной точке  $O$ , аргумент  $\omega t + \alpha$  не остается постоянным, поэтому индукция в любой выбранной точке изменяется в зависимости от времени пропорционально  $\sin(\omega t + \alpha)$ .

Предположим, что выбранная точка  $O$  в магнитном поле между статором и ротором (рис. 12.30, а) смещается так, что  $\omega t + \alpha$  остается постоянным; для этого точка  $O$  должна перемещаться по направлению движения часовой стрелки, т. е. в сторону уменьшающегося угла  $\alpha$ , так как  $\omega t$  с течением времени только увеличивается. Известное соотношение  $\omega T = 2\pi$  позволяет заключить, что одному периоду  $T$  переменного тока соответствует изменение угла  $\alpha$  на  $2\pi$ , т. е. один оборот точки  $O$ , и что угловая скорость точки, в которой индукция неизменна, равна  $\omega$ . Таким образом, можно сделать важный вывод: формула (12.49) выражает индукцию магнитного потока, неизменного по абсолютному значению и вращающегося по направлению движения часовой стрелки, — вращающегося магнитного по-

тока. Амплитуда результирующей магнитной индукции в 1,5 раза больше амплитуды магнитной индукции поля одной катушки.

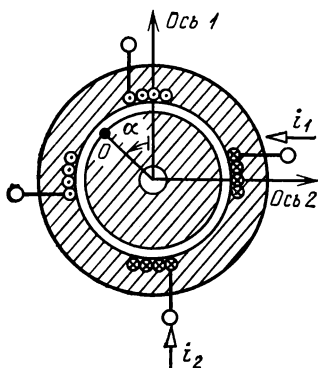


Рис. 12.31. Две катушки статора для получения вращающегося магнитного потока

индукции  $B_1$  и  $B_2$  пропорциональны соответствующим токам, совпадают с ними по фазе и определяются выражениями

$$B_1 = B_m \sin \omega t \cdot \cos \alpha;$$

$$B_2 = B_m \sin (\omega t - \pi/2) \cdot \cos (\alpha + \pi/2) = B_m \cos \omega t \cdot \sin \alpha.$$

Суммарная индукция

$$\begin{aligned} B &= B_1 + B_2 = B_m (\sin \omega t \cdot \cos \alpha + \cos \omega t \cdot \sin \alpha) = \\ &= B_m \sin (\omega t + \alpha), \end{aligned} \quad (12.50)$$

т. е. амплитуда результирующей индукции постоянна и равна амплитуде индукции одной катушки. При этом магнитный поток вращается по направлению движения часовой стрелки с угловой скоростью, равной угловой частоте тока  $\omega$ , и за период совершает один оборот.

## 12.10. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ АСИНХРОННЫХ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕЙ

Принцип действия трехфазных электродвигателей основан на получении вращающегося магнитного потока.

В асинхронных трехфазных двигателях обмотка состоит из трех катушек, расположенных на неподвижной стани-

в) **Вращающееся магнитное поле двухфазной системы.** В некоторых измерительных приборах получают вращающийся магнитный поток, создаваемый двухфазной системой переменных токов в двух перпендикулярно расположенных катушках (рис. 12.31).

Двухфазную систему образуют два переменных тока, один из которых опережает другой по фазе на  $90^\circ$ :

$$i_1 = I_m \sin \omega t;$$

$$i_2 = I_m \sin (\omega t - \pi/2).$$

В воздушном зазоре прибора (рис. 12.31) магнитные ин-

не—статоре, внутри которого помещен стальной барабан—ротор; в пазах ротора уложены провода, соединенные между собой на обоих торцах кольцами (беличья клетка).

Вращающийся магнитный поток, пересекая провода обмотки ротора, наводит в них ЭДС, и в проводах возникает ток. Ток, взаимодействуя с вращающимся потоком, вызывает силу, увлекающую ротор вслед за вращающимся потоком. С ростом частоты вращения ротора уменьшается скорость, с которой магнитные линии пересекают проводники ротора; если бы ротор достиг той же частоты вращения, что и магнитный поток, то пересечения проводников не происходило бы и ток в роторе стал бы равен нулю; следовательно, при наличии тормозного момента магнитный поток и ротор не могут вращаться с одинаковой частотой (синхронно); частота ротора всегда несколько меньше. Поэтому двигатели такого типа и называются асинхронными (т. е. несинхронными).

## 12.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФАЗ

Различают прямую последовательность фаз, когда положительный максимум тока, напряжения и ЭДС наступает сначала в фазе *A*, затем в фазе *B*, в фазе *C*, снова в фазе *A* и т. д., и обратную последовательность фаз, когда положительный максимум тока, напряжения и ЭДС наступает сначала в фазе *A*, затем в фазе *C*, в фазе *B*, снова в фазе *A* и т. д.

Часто необходимо знать последовательность фаз в трехфазной цепи, например, чтобы определить направление вращения асинхронного двигателя, который будет включен в сеть. Для определения последовательности фаз можно пользоваться фазоуказателем, работа которого основана на применении вращающегося магнитного потока.

Фазоуказатель состоит из трех катушек, выведенные зажимы которых помечены буквами *A*, *B* и *C* (или цифрами 1, 2 и 3). Эти зажимы присоединяются к проводам трехфазной цепи, причем катушка *A* присоединяется к любому из трех проводов. Этот провод в дальнейшем считается проводом фазы *A*. Катушки *B* и *C* присоединяются к двум другим проводам (рис. 12.32).

Над катушками на острие насажен легкий алюминиевый диск, который вращается в направлении вращения магнитного потока. Причина вращения та же, что и ротора асинхронного двигателя. На диске нарисована стрелка



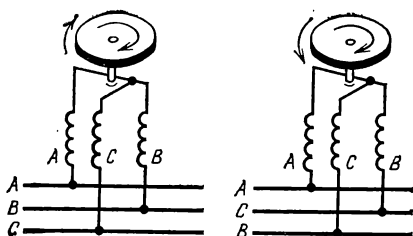


Рис. 12.32. Устройство фазоуказателя с вращающимся диском

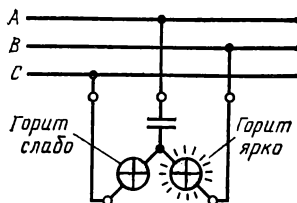


Рис. 12.33. Схема включения фазоуказателя с конденсатором

(рис. 12.32). Если диск вращается в направлении стрелки, последовательность фаз прямая, т. е. катушка  $B$  присоединена в фазе  $B$ , а катушка  $C$  к фазе  $C$ , если в обратную сторону, — обратная, т. е. катушка  $B$  присоединена к фазе  $C$ , а катушка  $C$  — к фазе  $B$ .

Применяются фазоуказатели и другого типа. Присоединим к проводам трехфазной цепи две лампы и конденсатор, соединенные звездой (рис. 12.33), приняв за фазу  $A$  ту, в которую включен конденсатор.

Предположим для упрощения вычислений, что полные проводимости каждой лампы и конденсатора одинаковые ( $y_A = y_B = y_C = y$ ) и представим проводимости фаз комплексными числами:

$$\underline{Y}_A = jy; \quad \underline{Y}_B = \underline{Y}_C = y.$$

Считая систему линейных напряжений симметричной и  $\underline{U}_A = U_A = U_\phi$ , выразим фазные напряжения комплексными числами и определим смещение нейтрали по (12.34). В результате расчета получается

$$\underline{U}_N = -0,2U_\phi + j0,6U_\phi.$$

Напряжение на лампе, включенной в фазу  $B$ ,

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_N = -0,3U_\phi - j1,47U_\phi;$$

$$U_b = \sqrt{(0,3U_\phi)^2 + (1,47U_\phi)^2} = 1,49U_\phi;$$

напряжение на лампе, включенной в фазу  $C$ ,

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_N = -0,3U_\phi + j0,27U_\phi;$$

$$U_c = \sqrt{(0,3U_\phi)^2 + (0,27U_\phi)^2} = 0,4U_\phi.$$

По яркому накалу лампы в фазе  $B$  ( $U_b > U_c$ ) легко определить фазу  $B$ .

## 12.12. СИММЕТРИЧНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТРЕХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ

Метод симметричных составляющих упрощает расчет несимметричных режимов в трехфазных цепях и, в частности, аварийных режимов, например, возникающих при обрыве фазы, при коротких замыканиях фаз, замыкании фазы на землю и др. При расчете методом симметричных составляющих применяется принцип наложения: несимметричный режим работы цепи рассматривается как результат наложения трех симметричных режимов.

Если нагрузка трехфазной цепи неравномерна, т. е. токи в линейных проводах неодинаковы, то различны и падения напряжения в них. Векторы фазных и линейных напряжений приемника также неодинаковы по модулю и сдвинуты между собой по фазе на различные углы. (Причиной асимметрии напряжений и токов может быть не только неравномерность нагрузки фаз, но и несимметрия ЭДС генератора, питающего трехфазную цепь, что, однако, на практике встречается редко.)

Всякую несимметричную систему трех векторов можно разложить на три системы: 1) симметричную систему трех равных по модулю векторов, в которой вектор фазы  $B$  (или  $BC$ ) отстает на  $120^\circ$  от вектора фазы  $A$  (или  $AB$ ), а вектор фазы  $C$  (или  $CA$ ) опережает на  $120^\circ$  вектор фазы  $A$  (или  $AB$ ); 2) симметричную систему трех равных по модулю векторов, в которой векторы фаз  $B$  (или  $BC$ ) и  $C$  (или  $CA$ ) сдвинуты по отношению к вектору фазы  $A$  (или  $AB$ ) на  $120^\circ$  в обратную первому случаю сторону; 3) систему трех равных и совпадающих по направлению векторов (рис. 12.34). Первая из этих систем называется системой прямой последовательности фаз, вторая — системой обратной последовательности фаз, а третья — системой нулевой последовательности фаз. У векторов прямой последовательности ставится индекс 1, обратной — 2 и нулевой — индекс 0.

Введем для краткости обозначение

$$e^{+j2\pi/3} = e^{j120^\circ} = a. \quad (12.51)$$

Умножение какого-либо вектора на фазный множитель  $a$  соответствует повороту вектора на  $120^\circ$  вперед (по направлению вращения векторов, т. е. против направления вращения часовой стрелки). Так как поворот назад на  $120^\circ$  равносильен двукратному повороту вперед

на те же  $120^\circ$ , то

$$e^{-j2\pi/3} = e^{j4\pi/3} = e^{j240^\circ} = a^2. \quad (12.52)$$

Заметим еще, что умножение векторов на  $a^3$ , соответствует трехкратному повороту на  $120^\circ$ , в результате чего

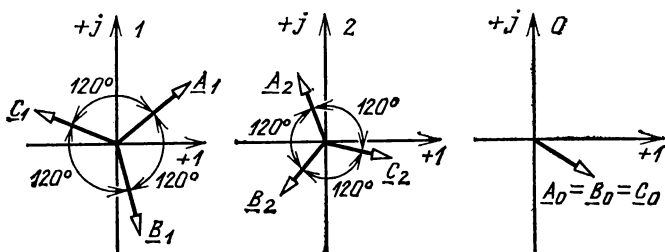


Рис. 12.34. Векторы прямой (1), обратной (2) и нулевой (0) последовательностей

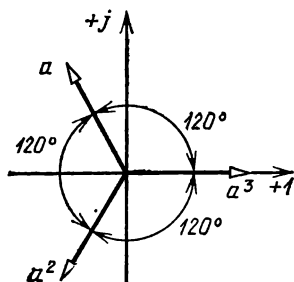


Рис. 12.35. Векторы — операторы симметричной трехфазной системы

вектор возвращается в первоначальное положение. Поэтому

$$a^3 = 1; \quad (12.53)$$

$$a^4 = a^3 a = a. \quad (12.54)$$

Наконец, так как сумма трех векторов, образующих симметричную звезду с углами на  $120^\circ$ , равна нулю (рис. 12.35), то

$$1 + a + a^2 = 0. \quad (12.55)$$

Чтобы доказать возможность разложения любой несимметричной системы на симметричные составляющие и одновременно получить необходимые для этого разложения формулы, предположим, что разложение уже выполнено и три несимметричных вектора (комплекса)  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  и  $\underline{C}$

следующим образом выражены через свои симметричные составляющие:

$$\underline{A} = \underline{A}_0 + \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \quad (12.56a)$$

$$\underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}_1 + \underline{B}_2; \quad (12.56b)$$

$$\underline{C} = \underline{C}_0 + \underline{C}_1 + \underline{C}_2, \quad (12.56b)$$

где  $\underline{A}_1, \underline{B}_1 = a^2 \underline{A}_1$  и  $\underline{C}_1 = a \underline{A}_1$  обозначают симметричные векторы прямой последовательности;  $\underline{A}_2, \underline{B}_2 = a \underline{A}_2$  и  $\underline{C}_2 = a^2 \underline{A}_2$  — симметричные векторы обратной последовательности и  $\underline{A}_0 = \underline{B}_0 = \underline{C}_0$  — одинаковые векторы нулевой последовательности фаз.

Пользуясь этими соотношениями, придаем последней системе уравнений следующий вид:

$$\underline{A} = \underline{A}_0 + \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \quad (12.57a)$$

$$\underline{B} = \underline{A}_0 + a^2 \underline{A}_1 + a \underline{A}_2; \quad (12.57b)$$

$$\underline{C} = \underline{A}_0 + a \underline{A}_1 + a^2 \underline{A}_2. \quad (12.57b)$$

После решения этой системы трех уравнений относительно неизвестных векторов  $\underline{A}_0, \underline{A}_1$  и  $\underline{A}_2$  и получаются искомые формулы, при помощи которых можно произвести разложение; тем самым и доказывается возможность разложения трех векторов  $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$  на симметричные составляющие.

Решив совместно три уравнения (12.57) с тремя неизвестными  $\underline{A}_0, \underline{A}_1$  и  $\underline{A}_2$ , получим

$$\underline{A}_0 = (\underline{A} + \underline{B} + \underline{C})/3; \quad (12.58)$$

$$\underline{A}_1 = (\underline{A} + a \underline{B} + a^2 \underline{C})/3; \quad (12.59)$$

$$\underline{A}_2 = (\underline{A} + a^2 \underline{B} + a \underline{C})/3. \quad (12.60)$$

**Пример 12.10.** Определить симметричные составляющие линейных напряжений

$$\underline{U}_{AB} = (-120 + j90) \text{ В}; \quad \underline{U}_{BC} = 120 \text{ В и } \underline{U}_{CA} = -j90 \text{ В.}$$

**Решение.** Составляющая нулевой последовательности по (12.58)

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA}}{3} = \frac{-120 + j90 + 120 - j90}{3} = 0.$$

Составляющая прямой последовательности по (12.59)

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_{AB} + a \underline{U}_{BC} + a^2 \underline{U}_{CA}}{3};$$

имея в виду, что

$$a = e^{j120^\circ} = -0,5 + j0,866; \quad a^2 = e^{-j120^\circ} = -0,5 - j0,866,$$

получаем

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \frac{-120 + j90 + (-0,5 + j0,866)120 + (-0,5 - j0,866)(-j90)}{3} = \\ &= (-86 + j79,6) \text{ В.} \end{aligned}$$

Составляющая обратной последовательности по (12.60)

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \frac{\underline{U}_{AB} + a^2 \underline{U}_{BC} + a \underline{U}_{CA}}{3} = \\ &= \frac{-120 + j90 + (-0,5 - j0,866)120 + (-0,5 + j0,866)(-j90)}{3} = \\ &= (-34 + j10,4) \text{ В.} \end{aligned}$$

Так как сумма трех линейных напряжений трехфазной цепи во всех случаях равна нулю, то всегда

$$\underline{U}_{0л} = \frac{\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA}}{3} = 0.$$

т. е. линейные напряжения ни при каких условиях не имеют составляющих нулевой последовательности. Чем более несимметрична система линейных напряжений, тем большие слагающие обратной последовательности она имеет. Поэтому процентное отношение слагающих обратной и прямой последовательностей в системе линейных напряжений

$$\frac{U_{2л}}{U_{1л}} 100 \%$$

является мерой несимметрии этой системы и называется ее степенью асимметрии. Согласно электротехническим правилам и нормам степень асимметрии не должна превышать 5 %.

**Пример 12.11.** Линейное напряжение имеет симметричные составляющие  $U_1=220$  В и  $U_2=8$  В. Определить ее степень асимметрии.

**Решение.** Степень асимметрии

$$\frac{U_2}{U_1} 100\% = \frac{8 \cdot 100}{200} = 4\%.$$

Разложим несимметричную систему трехфазных токов на симметричные составляющие прямой, обратной и нулевой последовательностей. Сумма трех симметричных токов прямой последовательности равна нулю, также равна нулю

сумма токов обратной последовательности. Поэтому ток в нейтральном проводе, равный сумме трех линейных токов, определяется как сумма токов нулевой последовательности, деленная на три (12.58).

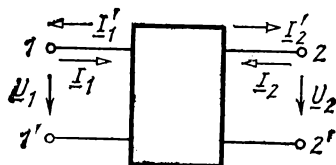
## Глава тринадцатая ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

### 13.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Различные устройства электротехники и радиотехники, автоматики и электроники, телеуправления и телеизмерения при передаче сигналов или, как говорят, информации, кроме двухполюсников, т. е. элементов с двумя выводами (резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, аккумуляторы и т. д.), часто содержат элементы с двумя парами выводов.

Условное изображение такого элемента, который называется **проходным четырехполюсником**, показано на рис. 13.1. Выводы  $1$  и  $1'$  называются первичными,

Рис. 13.1. Обозначение проходного четырехполюсника



выводы  $2$  и  $2'$  — вторичными. Четырехполюсники служат, например, в качестве фильтров, при помощи которых из многих сигналов, поступающих на одну пару выводов (входные), выделяются только необходимые для дальнейшей передачи информации. Эти сигналы и поступают на вторую пару выводов (выходные). При помощи четырехполюсников снижают мощность или, как говорят, уровень сигналов (аттенюаторы или ослабители), повышают уровень сигналов (усилители), получают необходимый сдвиг фаз (фазовращатели), устраняют искажения сигналов (корректирующие контуры), моделируют цепи с распределенными параметрами и т. д. Трансформатор с двумя обмотками (рис. 10.31), т. е. и с двумя парами выводов, тоже можно рассматривать как четырехполюсник.

Теория четырехполюсников дает возможность применять один и тот же метод анализа работы самых различных по структуре и применению устройств.

К проходному четырехполюснику другие элементы цепи могут присоединяться только к одноименным выводам  $1$  и  $1'$  или  $2$  и  $2'$ .

Все четырехполюсники, как и двухполюсники, можно разделить на две группы: пассивные и активные. В пассивных четырехполюсниках нет источников ЭДС и тока. Это прежде всего аттенюаторы, фазовращающие контуры, трансформаторы. К активным четырехполюсникам относятся усилители с полупроводниковыми триодами, а в настоящее время все чаще с микросхемами, каждая из которых заменяет большое число резисторов, конденсаторов, транзисторов. Фильтры могут быть пассивными и активными.

Режим четырехполюсника характеризуется *четырьмя величинами* — напряжениями и токами на первичных и вторичных выводах, обозначения и положительные направления которых даны на рис. 13.1. Зависимости между двумя напряжениями и двумя токами могут быть записаны в различной форме. Если считать две из этих величин заданными, то у четырехполюсника, который считается линейным, две другие величины будут связаны с ними системой двух уравнений, которые называются уравнениями четырехполюсника.

Положительные направления напряжений и токов, как и для других электрических цепей, могут выбираться произвольно. На рис. 13.1 показаны выбранные положительные направления напряжений и токов. Последние при решении различных задач часто выбираются не одинаковыми, но, конечно,

$$I'_1 = -I_1; \quad I'_2 = -I_2.$$

### 13.2. УРАВНЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Предположим, что к вторичным выводам четырехполюсника подключен приемник с сопротивлением нагрузки  $Z_{2н}$ , а к первичным — источник ЭДС  $E_1$ , внутренним сопротивлением которого можно пренебречь (рис. 13.2).

При заданном напряжении  $\underline{U}_2$  на выводах приемника, например при номинальном для приемника, а значит, при известном токе  $\underline{I}_2 = \underline{U}_2 / Z_{2н}$  можно определить необходимое

напряжение источника  $\underline{U}_1$  и ток  $\underline{I}_1$  по линейным уравнениям типа  $A$ :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2'; \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2'. \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

Здесь предполагается, что известны коэффициенты уравнений типа  $A$ , значение которых зависит от схемы четырехполюсника и параметров элементов, из которых собран четырехполюсник. Как видно из (13.1), размерность коэффици-

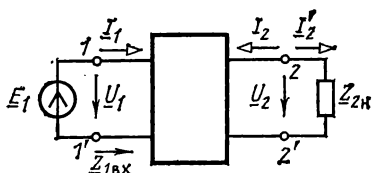


Рис. 13.2. Питание четырехполюсника со стороны первичных выводов

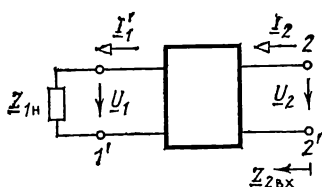


Рис. 13.3. Питание четырехполюсника со стороны вторичных выводов

циентов различная:  $\underline{A}_{11}$  и  $\underline{A}_{22}$  — безразмерные коэффициенты, у  $\underline{A}_{12}$  размерность сопротивления, у  $\underline{A}_{21}$  — проводимости.

Рассматривая уравнения (13.1) как два уравнения с двумя неизвестными токами, т. е. после совместного решения этих уравнений относительно токов  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$ , получим уравнения типа  $Y$ :

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2, \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

где все коэффициенты — проводимости. Ясно, что коэффициенты  $Y$  после совместного решения окажутся выраженными через коэффициенты уравнения типа  $A$ .

Решением уравнений (13.1) относительно другой выбранной пары величин можно получить еще четыре системы уравнений, а именно типа  $Z$ :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2; \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2, \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$



где все коэффициенты — сопротивления типа  $H$ :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{H}_{11} \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \underline{U}_2; \\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21} \underline{I}_1 + \underline{H}_{22} \underline{U}_2, \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

которые особенно часто применяются при расчете режимов четырехполюсников с транзисторами, типа  $G$ :

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{G}_{11} \underline{U}_1 + \underline{G}_{12} \underline{I}_2; \\ \underline{U}_2 &= \underline{G}_{21} \underline{U}_1 + \underline{G}_{22} \underline{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

При обратном питании четырехполюсника, например передаче сигналов в обратном направлении (рис. 13.3), применяется обычно система уравнений типа  $B$ :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{B}_{11} \underline{U}_1 + \underline{B}_{12} \underline{I}'_1; \\ \underline{I}_2 &= \underline{B}_{21} \underline{U}_1 + \underline{B}_{22} \underline{I}'_1, \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

в которой напряжение и ток на вторичных выводах выражены через напряжение  $\underline{U}_1$  и ток  $\underline{I}'_1$  на первичных, причем  $\underline{I}'_1 = \underline{U}_1 / \underline{Z}_{1в}$ .

При обратном питании справедливы и другие системы уравнений, так как коэффициенты уравнений типа  $B$  можно выразить через коэффициенты любой пары уравнений другого типа.

Все шесть систем уравнений четырехполюсника равноценны и коэффициенты уравнений любого типа можно выразить через коэффициенты уравнений другого типа.

**Пример 13.1.** Считая известными коэффициенты уравнений типа  $A$ , определить коэффициенты  $\underline{Y}_{11}$ ,  $\underline{G}_{21}$  и  $\underline{Z}_{22}$ .

**Решение.** Из (13.2) следует, что  $\underline{Y}_{11} = \underline{I}_1 / \underline{U}_1$  при  $\underline{U}_2 = 0$ , т. е. при короткозамкнутых вторичных выводах (рис. 13.2). Поэтому положим и в (13.1)  $\underline{U}_2 = 0$  и разделим первое уравнение на второе:  $\underline{U}_1 / \underline{I}_1 = \underline{A}_{12} / \underline{A}_{22}$ . Сравним с формулой для  $\underline{Y}_{11}$ , находим, что  $\underline{Y}_{11} = \underline{A}_{22} / \underline{A}_{12}$ .

Из (13.5) следует, что  $\underline{G}_{21} = \underline{U}_2 / \underline{U}_1$  при  $\underline{I}_2 = 0$ , т. е. при разомкнутых вторичных выводах (рис. 13.2). Положив в (13.1)  $\underline{I}_2 = 0$ , получаем  $\underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2$  и  $\underline{U}_2 / \underline{U}_1 = 1 / \underline{A}_{11}$ . Следовательно,  $\underline{G}_{21} = 1 / \underline{A}_{11}$ .

Из (13.3) следует, что  $\underline{Z}_{22} = \underline{U}_2 / \underline{I}_2$  при  $\underline{I}_1 = 0$ , т. е. при обратном питании (рис. 13.3) разомкнуты первичные выводы. Положив в (13.1)  $\underline{I}_1 = 0$ , получаем  $0 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}'_2 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 - \underline{A}_{22} \underline{I}_2$ , откуда  $\underline{U}_2 / \underline{I}_2 = \underline{A}_{22} / \underline{A}_{21}$ . Следовательно,  $\underline{Z}_{22} = \underline{A}_{22} / \underline{A}_{21}$ .

Мощности источника питания и приемника вычисляются, как и для любой цепи переменного тока, по (10.33).

### 13.3. СОПРОТИВЛЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

При питании четырехполюсника со стороны первичных выводов и при сопротивлении нагрузки  $\underline{Z}_{2н}$  на вторичных (рис. 13.2) получаются напряжения и токи рабочего режима. Отношение напряжения  $\underline{U}_1$  к току  $\underline{I}_1$  составляет входное сопротивление четырехполюсника со стороны первичных выводов  $\underline{Z}_{1вх}$ .

Для определения входного сопротивления  $\underline{Z}_{1вх}$  можно воспользоваться любым типом уравнений, но более простое выражение получается из уравнений типа А:

$$\underline{Z}_{1вх} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2'}{\underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2'}$$

или после подстановки соотношения  $\underline{U}_2 = \underline{Z}_{2н} \underline{I}_2'$  (рис. 13.2) и сокращения  $\underline{I}_2'$ :

$$\underline{Z}_{1вх} = \frac{\underline{A}_{11} \underline{Z}_{2н} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \underline{Z}_{2н} + \underline{A}_{22}}. \quad (13.7)$$

Входное сопротивление со стороны вторичных выводов  $\underline{Z}_{2вх}$ , т. е. при обратном питании (рис. 13.3), проще определяется из уравнений типа В:

$$\underline{Z}_{2вх} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{B}_{11} \underline{U}_1 + \underline{B}_{12} \underline{I}_1'}{\underline{B}_{21} \underline{U}_1 + \underline{B}_{22} \underline{I}_1'}$$

или, так как  $\underline{U}_1 = \underline{Z}_{1н} \underline{I}_1'$ , то

$$\underline{Z}_{2вх} = \frac{\underline{B}_{11} \underline{Z}_{1н} + \underline{B}_{12}}{\underline{B}_{21} \underline{Z}_{1н} + \underline{B}_{22}}. \quad (13.8)$$

В частном случае короткого замыкания вторичных выводов (рис. 13.2), т. е. при  $\underline{Z}_{2н} = 0$ , входное сопротивление со стороны первичных по (13.7)

$$\underline{Z}_{1к} = \underline{U}_{1к} / \underline{I}_{1к} = \underline{A}_{12} / \underline{A}_{22}. \quad (13.9а)$$

Сопротивление  $\underline{Z}_{1к}$  не зависит от сопротивления нагрузки, т. е. является параметром самого четырехполюсника,

как и коэффициенты системы уравнений любого типа. В примере 13.1 было найдено, что  $\underline{Y}_{11} = \underline{A}_{22}/\underline{A}_{12}$ . Поэтому

$$\underline{Z}_{1к} = 1/\underline{Y}_{11}. \quad (13.9б)$$

Аналогично можно выразить  $\underline{Z}_{1к}$  и через коэффициенты других систем уравнений; например, после вычислений получается

$$\underline{Z}_{1к} = \underline{H}_{11} = \underline{B}_{12}/\underline{B}_{11}. \quad (13.9в)$$

Чтобы найти входное сопротивление в режиме холостого хода  $\underline{Z}_{1х}$ , представим  $\underline{Z}_{1вх}$  (13.7) в виде

$$\underline{Z}_{1вх} = \frac{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}/\underline{Z}_{2н}}{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{22}/\underline{Z}_{2н}}. \quad (13.7а)$$

Так как режим холостого хода получается при бесконечно большом значении сопротивления нагрузки  $\underline{Z}_{2н} = \infty$  (вторичные выводы разомкнуты), то из (13.7а) получим

$$\underline{Z}_{1х} = \underline{U}_{1х}/\underline{I}_{1х} = \underline{A}_{11}/\underline{A}_{21} \quad (13.10а)$$

или при замене  $\underline{A}_{11}$  и  $\underline{A}_{21}$  коэффициентами других систем уравнений

$$\underline{Z}_{1х} = \underline{Z}_{11} = 1/\underline{G}_{11} = \underline{B}_{22}/\underline{B}_{21}. \quad (13.10б)$$

При коротком замыкании первичных выводов (рис. 13.3), т. е. при  $\underline{Z}_{1н} = 0$ , входное сопротивление со стороны вторичных выводов по (13.8)

$$\underline{Z}_{2к} = \underline{U}_{2к}/\underline{I}_{2к} = \underline{B}_{12}/\underline{B}_{22} = \underline{A}_{12}/\underline{A}_{11} \quad (13.11а)$$

или при замене  $\underline{A}_{12}$  и  $\underline{A}_{11}$  коэффициентами других систем уравнений

$$\underline{Z}_{2к} = 1/\underline{Y}_{22} = \underline{G}_{22}. \quad (13.11б)$$

При разомкнутых первичных выводах (рис. 13.3) из (13.8) находим входное сопротивление со стороны вторичных выводов:

$$\underline{Z}_{2х} = \underline{U}_{2х}/\underline{I}_{2х} = \underline{B}_{11}/\underline{B}_{21} \quad (13.12а)$$

или после замены коэффициентов  $\underline{B}_{11}$  и  $\underline{B}_{21}$

$$\underline{Z}_{2х} = \underline{A}_{22}/\underline{A}_{21} = \underline{Z}_{22}. \quad (13.12б)$$

Между четырьмя сопротивлениями короткого замыкания и холостого хода получается простая зависимость:

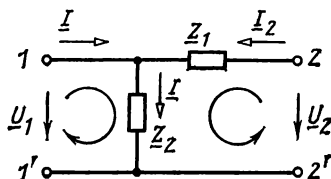
$$\underline{Z}_{1к}/\underline{Z}_{1х} = \underline{Z}_{2к}/\underline{Z}_{2х}, \quad (13.13)$$

что легко проверить подстановкой значений сопротивлений, выраженных через коэффициенты уравнений типа  $A$ .

Если известны схема четырехполюсника и значения составляющих его элементов, то любое из сопротивлений и коэффициенты каждой системы уравнений можно рассчитать.

**Пример 13.2.** На рис. 13.4 представлена так называемая Г-образная схема четырехполюсника. Определить входные сопротивления этого че-

Рис. 13.4. Г-образный четырехполюсник



тырехполюсника в режимах короткого замыкания и холостого хода. Найти значения коэффициентов уравнений типа  $Z$ .

**Решение.** При коротком замыкании вторичных выводов  $2$  и  $2'$  сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$  оказываются соединенными параллельно и для двух параллельно соединенных сопротивлений по (10,40)

$$\underline{Z}_{1к} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2).$$

При разомкнутых вторичных выводах сопротивление  $\underline{Z}_1$  не включено в цепь, поэтому

$$\underline{Z}_{1х} = \underline{Z}_2.$$

При коротком замыкании первичных выводов сопротивление  $\underline{Z}_2$  закорочено. Поэтому сопротивление, измеренное на вторичных выводах,

$$\underline{Z}_{2к} = \underline{Z}_1.$$

При разомкнутых первичных выводах сопротивления  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  при измерении на вторичных выводах оказываются соединенными последовательно, т. е.

$$\underline{Z}_{2х} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2.$$

Условие (13.13), как и должно быть, выполняется.

Из уравнения (13.3) при разомкнутых вторичных выводах, т. е. при  $I_2 = 0$ , получаем

$$\underline{U}_{1х} = \underline{Z}_{11} I_{1х} \text{ и } \underline{U}_{2х} = \underline{Z}_{21} I_{1х},$$

т. е.,

$$\underline{Z}_{11} = \underline{U}_{1х} / I_{1х} \text{ и } \underline{Z}_{21} = \underline{U}_{2х} / I_{1х}. \quad (a)$$

Так как при разомкнутых вторичных выводах ток  $I_2=0$ , то ток  $I_{1x}$  замыкается через сопротивление  $\underline{Z}_2$  и нет падения напряжения на сопротивлении  $\underline{Z}_1$ . Поэтому

$$I_{1x} = \underline{U}_{1x} / \underline{Z}_2 \text{ и } \underline{U}_{2x} = \underline{U}_{1x}.$$

Сравнение с выражениями (а) показывает, что

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_2.$$

Из уравнения (13.3) при короткозамкнутых вторичных выводах, т. е. при  $\underline{U}_2=0$ , получаем

$$\underline{U}_{1x} = \underline{Z}_{11} I_{1x} + \underline{Z}_{12} I_{2x} \text{ и } 0 = \underline{Z}_{21} I_{1x} + \underline{Z}_{22} I_{2x}. \quad (6)$$

Составим еще уравнения по законам Кирхгофа. По первому закону Кирхгофа ток в сопротивлении  $\underline{Z}_2$

$$I_K = I_{1K} + I_{2K}$$

и по второму закону Кирхгофа для левого контура

$$\underline{U}_{1K} = \underline{Z}_2 I_K = \underline{Z}_2 (I_{1K} + I_{2K}).$$

Сравнивая с первым уравнением (6), получаем  $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_2$  (что уже было найдено) и  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_2$ .

По второму закону Кирхгофа для правого контура (с учетом равенства  $\underline{U}_2=0$ )

$$0 = \underline{Z}_1 I_{2K} + \underline{Z}_2 I_K = \underline{Z}_1 I_{2K} + \underline{Z}_2 I_{1K} + \underline{Z}_2 I_{2K}.$$

Сравнивая с вторым уравнением (6), получаем  $\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_2$  (что уже было найдено) и

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2.$$

Коэффициенты четырехполюсника могут быть определены экспериментально после измерения напряжений и токов на первичных и вторичных выводах. Например, при разомкнутых вторичных выводах из (13.1) получается

$$\underline{A}_{11} = \underline{U}_{1x} / \underline{U}_{2x}; \quad \underline{A}_{21} = I_{1x} / \underline{U}_{2x}, \quad (13.14a)$$

а при коротком замыкании вторичных выводов

$$\underline{A}_{12} = \underline{U}_{1x} / I'_{2x}; \quad \underline{A}_{22} = I_{1x} / I'_{2x}. \quad (13.14b)$$

Чтобы выполнить расчет коэффициентов по (13.14), необходимо измерить не только действующие значения напряжений и токов, но и сдвиг фаз между ними (см. § 9.15), так как, например,  $\underline{U}_{1x} / \underline{U}_{2x} = \underline{U}_{1x} e^{j\psi_{1x}} / \underline{U}_{2x} e^{j\psi_{2x}} = (U_{1x} / U_{2x}) e^{j(\psi_{1x} - \psi_{2x})}$ , т. е. необходимо измерить не только

два напряжения (вольтметром), но и угол сдвига фаз между ними  $\psi_{1x} - \psi_{2x}$  при помощи фазометра.

Аналогично экспериментально можно определить и коэффициенты других типов уравнений. Например, из (13.2) следует, что  $\underline{Y}_{11} = \underline{I}_{1k} / \underline{U}_{1k}$ ;  $\underline{Y}_{21} = \underline{I}_{2k} / \underline{U}_{1k}$  и т. д.

С ростом частоты (по сравнению с 50 Гц) измерения напряжений, токов и особенно сдвигов фаз усложняются.

#### 13.4. ПАССИВНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Можно показать, что у пассивных четырехполюсников из четырех коэффициентов каждой системы уравнений только три независимые. Между четверкой коэффициентов есть следующие дополнительные связи:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} &= 1; \quad \underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{12}; \quad \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12}; \\ \underline{H}_{21} &= -\underline{H}_{12}; \quad \underline{G}_{21} = -\underline{G}_{12}; \quad \underline{B}_{11} \underline{B}_{22} - \underline{B}_{12} \underline{B}_{21} = 1. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Три независимых коэффициента можно обеспечить, если составлять четырехполюсник не менее чем из трех элементов — ветвей. Это значит, что при трех независимых коэффициентах, которые следует задать, чтобы получить пассивный четырехполюсник с необходимыми свойствами, нельзя выбрать схему, например, с двумя элементами — ветвями, как на рис. 13.4, и тем более с одним. Действительно, например, у Г-образного четырехполюсника при холостом ходе на вторичных выводах ( $I_2 = 0$ ), как видно из схемы рис. 13.4, напряжения  $\underline{U}_{2x} = \underline{U}_{1x}$ . Из уравнений (13.1) при  $I_2 = 0$  получается  $\underline{U}_{1x} = \underline{A}_{11} \underline{U}_{2x}$ . Следовательно, у любого Г-образного четырехполюсника коэффициент  $\underline{A}_{11} = 1$ , т. е. не может принимать другое требуемое или задаваемое значение.

У симметричного четырехполюсника можно поменять местами первичные и вторичные выводы. После такого переключения режимы работы источника питания и приемника не изменяются. К пассивным симметричным четырехполюсникам относятся прежде всего две типовые (канонические) схемы: Т-образная (рис. 13.5, а) и П-образная (рис. 13.5, б). Обозначения элементов выбраны так, чтобы суммарное продольное сопротивление равнялось  $\underline{Z}_1$ , а суммарное поперечное равнялось  $\underline{Z}_2$ . Так как выводы 1' и 2' образуют один узел, то Т-образная схема — это звезда сопротивлений, а П-образная — треугольник сопротивлений.

Определим коэффициенты уравнений типа  $A$  для Т-образной схемы.

При разомкнутых вторичных выводах ( $I'_2=0$ ) из рис. 13.5, а находим по законам Кирхгофа

$$\underline{I}_{1x} = \frac{\underline{U}_{1x}}{(\underline{Z}_1/2) + \underline{Z}_2} \text{ и } \underline{U}_{2x} = \underline{Z}_2 \underline{I}_{1x} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{U}_{1x}}{(\underline{Z}_1/2) + \underline{Z}_2}.$$

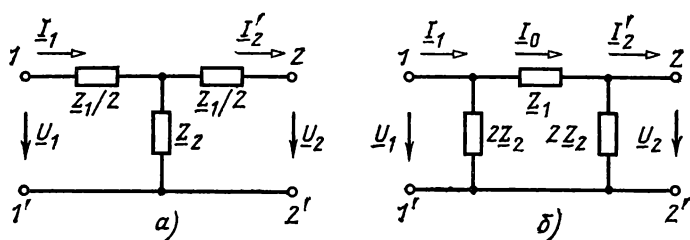


Рис. 13.5. Т-образный (а) и П-образный (б) четырехполюсники

Сравнив второе выражение с уравнениями (13.1) при холостом ходе, т. е. с уравнениями

$$\underline{U}_{1x} = \underline{A}_{11} \underline{U}_{2x}; \quad \underline{I}_{1x} = \underline{A}_{21} \underline{U}_{2x},$$

находим коэффициенты

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{U}_{2x}} = \frac{(\underline{Z}_1/2) + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}; \quad (13.16)$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{U}_{2x}}{\underline{I}_{1x}} = \frac{1}{\underline{Z}_2}. \quad (13.17)$$

При коротком замыкании вторичных выводов ( $U_2=0$ ) сопротивления  $\underline{Z}_2$  и  $\underline{Z}_1/2$  соединены параллельно. В § 2.3 была получена формула (2.13) для тока в одной из двух параллельных ветвей при известном общем токе (формула «разброса»). По аналогичной формуле

$$\underline{I}'_{2к} = \underline{I}_{1к} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1/2},$$

откуда

$$\underline{I}_{1к} = [1 + (\underline{Z}_1/2\underline{Z}_2)] \underline{I}'_{2к}. \quad (13.18)$$

По второму закону Кирхгофа для внешнего контура,

учитывая, что  $U_2=0$ , получим

$$\underline{U}_{1к} = -\frac{\underline{Z}_1}{2} \underline{I}_{1к} + \frac{\underline{Z}_1}{2} \underline{I}'_{2к}$$

и после подстановки тока  $\underline{I}_{1к}$  из (13.18)

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1к} &= \frac{\underline{Z}_1}{2} \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \right) \underline{I}'_{2к} + \frac{\underline{Z}_1}{2} \underline{I}'_{2к} = \\ &= \left( \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1^2}{4\underline{Z}_2} \right) \underline{I}'_{2к}. \end{aligned} \quad (13.19)$$

Сравнив (13.19) и (13.18) с уравнениями (13.1) при коротком замыкании, т. е. с уравнениями

$$\underline{U}_{1к} = \underline{A}_{12} \underline{I}'_{2к}; \quad \underline{I}_{1к} = \underline{A}_{22} \underline{I}'_{2к},$$

находим коэффициенты

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 \left[ 1 + (\underline{Z}_1/4\underline{Z}_2) \right]; \quad \underline{A}_{22} = 1 + (\underline{Z}_1/2\underline{Z}_2). \quad (13.20)$$

В результате расчета получилось

$$\underline{A}_{22} = \underline{A}_{11}, \quad (13.21)$$

что выполняется для любого пассивного симметричного четырехполюсника.

Как показывает этот пример расчета, коэффициенты четырехполюсника зависят от сопротивлений составляющих его элементов, а значит, от частоты, если четырехполюсник содержит реактивные элементы. Приемник не является частью четырехполюсника, поэтому коэффициенты четырехполюсника не зависят от сопротивления нагрузки  $\underline{Z}_{2в}$  или  $\underline{Z}_{1н}$ .

Аналогичный расчет для П-образной схемы (рис. 13.5, б) дает следующие значения коэффициентов:

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}; \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_1; \quad \underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_2} \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \right). \quad (13.22)$$

Дополнительное условие (13.21) показывает, что у пассивного симметричного четырехполюсника добавилась еще одна связь между коэффициентами, т. е. независимых коэффициентов только два. Условие (13.21) можно проверить подстановкой найденных значений коэффициентов. Аналогично находятся связи и между коэффициентами других



типов уравнений:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \underline{Y}_{22}; \quad \underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}; \quad \underline{H}_{11} \underline{H}_{22} - \underline{H}_{12} \underline{H}_{21} = 1; \\ \underline{G}_{11} \underline{G}_{22} - \underline{G}_{12} \underline{G}_{21} &= 1; \quad \underline{B}_{11} = \underline{B}_{22}. \end{aligned} \quad (13.23)$$

### 13.5. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Четырехполюсники называются эквивалентными, если при замене одного из них другим режимы работы источника питания и приемника не изменяются. Для того чтобы четырехполюсники были эквивалентными, у них должны быть равными соответствующие коэффициенты, так как при соответственно равных коэффициентах получаются одинаковые системы уравнений (13.1)–(13.6), определяющие напряжения и токи на первичных и вторичных выводах.

В частности, для каждого пассивного симметричного четырехполюсника можно составить эквивалентную Т-образную схему (рис. 13.5, а) или эквивалентную П-образную схему (рис. 13.5, б).

В простейших случаях эквивалентная схема получается заменой последовательно соединенных элементов одним элементом (§ 2.2), параллельно соединенных элементов одним элементом (§ 2.3) и с применением метода взаимного преобразования звезды и треугольника сопротивлений (§ 2.5).

**Пример 13.3.** На рис. 13.6, а показана так называемая перекрытая симметричная схема. Сопротивление каждого резистора  $R=12$  Ом, емкостное сопротивление конденсатора  $x_c=1/\omega C=8$  Ом. Составить эквивалентную Т-образную схему.

**Решение.** Чтобы получить Т-образную схему, преобразуем треугольник трех сопротивлений  $R$  в эквивалентную звезду. По (2.20) находим  $r = R/3 = 4$  Ом. Полученная Т-образная схема дана на рис.

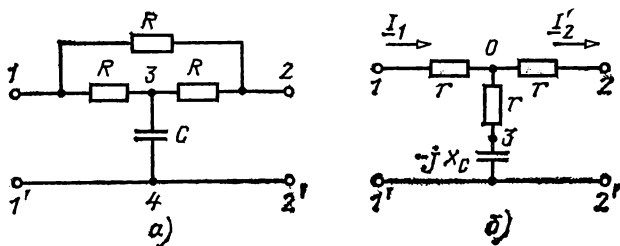


Рис. 13.6. Схемы к примеру 13.3

13.6, б. Такую схему имеет низкочастотный  $rC$ -фильтр, у которого с ростом частоты сигнал на выходе должен быть все меньше. Действительно, с ростом частоты все большая часть тока  $I_1$  проходит через конденсатор, так как его сопротивление с ростом частоты уменьшается, и ток  $I_2$  становится по сравнению с  $I_1$  все меньше.

**Пример 13.4.** На рис. 13.7, а представлена схема мостового симметричного четырехполюсника, которую в технической литературе обычно

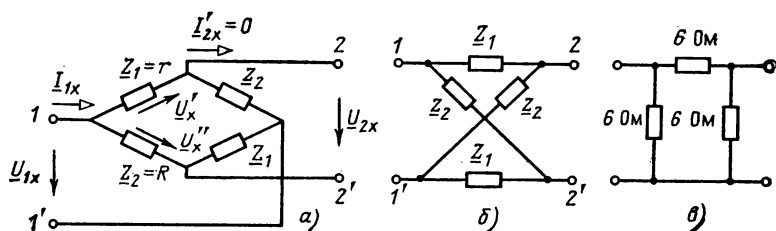


Рис. 13.7. Схемы к примеру 13.4

изображают так, как показано на рис. 13.7, б (соединения проводов в центре нет). Составить для четырехполюсника из резисторов по рис. 13.7 эквивалентную П-образную схему при  $Z_1=r=2\text{ Ом}$  и  $Z_2=R=6\text{ Ом}$ .

**Решение.** Так как преобразованиями нельзя получить П-образную схему, то сначала определим коэффициенты уравнений типа А для мостовой схемы.

При холостом ходе на вторичных выводах ( $I_{2x}'=0$ ) ток  $I_{1x}$  делится на две равные части в параллельных ветвях с сопротивлениями  $Z_1+Z_2=r+R$  и  $Z_2+Z_1=R+r$ . Общее сопротивление двух параллельных ветвей с равными сопротивлениями

$$Z_{1x} = \underline{U}_{1x} / \underline{I}_{1x} = (r+R)/2,$$

$$\text{т. е.} \quad \underline{U}_{1x} = \frac{R+r}{2} \underline{I}_{1x}. \quad (\text{а})$$

Напряжения  $\underline{U}'_x = r \underline{I}_{1x}/2$ ;  $\underline{U}''_x = R \underline{I}_{1x}/2$ . По второму закону Кирхгофа

$$\underline{U}'_x + \underline{U}_{2x} - \underline{U}''_x = 0,$$

т. е.

$$\underline{U}_{2x} = \underline{U}'_x - \underline{U}''_x = (R-r) \underline{I}_{1x}/2,$$

откуда

$$\underline{I}_{1x} = \frac{2}{R-r} \underline{U}_{2x} \quad (\text{б})$$

и после подстановки в (а)

$$\underline{U}_{1x} = \frac{R+r}{R-r} \underline{U}_{2x}. \quad (в)$$

Из сравнения выражений (в) и (б) с уравнениями типа А при холостом ходе, т. е. уравнениями

$$\underline{U}_{1x} = A_{11} \underline{U}_{2x}; \quad \underline{I}_{1x} = A_{21} \underline{U}_{2x},$$

следует, что

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \frac{R+r}{R-r} = 2; \quad \underline{A}_{21} = \frac{2}{R-r} = 0,5 \text{ См.}$$

Сравним полученные значения коэффициентов с (13.22). У П-образной схемы будут те же значения коэффициентов, если принять

$$2 = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \text{ и } 0,5 = \frac{1}{\underline{Z}_2} \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \right).$$

Из совместного решения этих двух уравнений находим сопротивления  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  для эквивалентной П-образной схемы:

$$\underline{Z}_1 = 6 \text{ Ом и } \underline{Z}_2 = 3 \text{ Ом.}$$

Схема эквивалентного П-образного четырехполюсника показана на рис. 13.7, в.

### 13.6. ВХОДНЫЕ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Входной функцией называется зависимость от частоты входного сопротивления или входной проводимости какой-либо цепи. Так, например, входное сопротивление последовательного контура (рис. 11.2)

$$\underline{Z} = r + j(\omega L - 1/\omega C).$$

От частоты зависит реактивная составляющая комплексного сопротивления, как было показано на рис. 11.6.

Входные сопротивления четырехполюсника, содержащие реактивные элементы, также зависят от частоты, т. е. могут рассматриваться как входные функции. Например, входная функция Т-образной схемы по рис. 13.6, б в режиме короткого замыкания (выводы 2 и 2' соединены)

$$\underline{Z}_{1к} = r + \frac{(r - j/\omega C)r}{r - j/\omega C + r}.$$

Передачная функция равна отношению величины, которая считается выходной для данной цепи (напряжение между какими-либо выводами, ток в какой-либо ветви, мощность приемника и т. д.), к другой величине, ко-

торая считается входной (напряжение между каким-либо другими выводами, ток в другой ветви, мощность источника питания и т. д.). При этом предполагается, что цепь содержит только один источник воздействия (источник питания, источник ЭДС или источник тока).

Зависящую от частоты передаточную функцию  $\underline{K}$  (комплексная величина) часто обозначают так:

$$K(j\omega) = K(\omega) e^{j\psi(\omega)}, \quad (13.24)$$

чтобы обратить внимание на эту зависимость от частоты модуля  $K(\omega)$  комплексной величины, ее аргумента  $\psi(\omega)$  и самой комплексной величины  $K(j\omega)$ . Зависимость  $K(\omega)$  называется амплитудно-частотной, а  $\psi(\omega)$  — фазочастотной характеристикой.

Если  $K(j\omega)$  — отношение выходного напряжения к входному или выходного тока к входному, то это безразмерная величина и ее можно оценивать в логарифмическом масштабе, вычисляя натуральный логарифм

$$\ln [K(j\omega)] = \ln [K(\omega) e^{j\psi(\omega)}] = \ln K(\omega) + j\psi(\omega), \quad (13.25)$$

где  $\ln K(\omega)$  — амплитудно-частотная характеристика в логарифмическом масштабе, тоже безразмерная величина, но ее единице присвоено название **не пер** (Нп). Аргумент  $\psi(\omega)$  измеряется в радианах. В (13.25) учтено, что  $\ln[ab] = \ln a + \ln b$  и  $\ln b + \ln e^x = x$ .

В настоящее время вместо оценки значения  $K(\omega)$  в неперах применяют в качестве единицы **децибел** (дБ), вычисляя вместо  $\ln K(\omega)$  десятичный логарифм  $20 \lg K(\omega)$ . Непер и децибел связаны соотношением  $1 \text{ Нп} \approx 8,686 \text{ дБ}$ .

**Пример 13.5.** Найти значение передаточной функции по напряжению для Г-образного четырехполюсника (рис. 13.8) с сопротивлением нагрузки  $Z_{2н} = R = 100 \text{ Ом}$  при частоте  $f = 10 \text{ кГц}$ . Параметры четырехполюсника:  $\bar{r} = 60 \text{ Ом}$ ,  $C = 0,2 \text{ мкФ}$ .

**Решение.** По закону Ома  $\underline{I}'_2 = \underline{U}_2 / R$  и по второму закону Кирхгофа для внешнего контура  $\underline{U}_1 = -jx_C \underline{I}'_2 + R \underline{I}'_2 = (-jx_C / R + 1) \underline{U}_2$ , где  $x_C = 1 / \omega C = 1 / 2\pi f C$ .

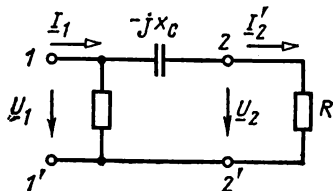


Рис. 13.8. Схема к примеру 13.5

Передаточная функция по напряжению

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{-jx_C/R + 1} = \frac{R}{R - jx_C} = \\ &= \frac{R}{R - j/2\pi fC} = \frac{100}{100 - j/(2\pi \cdot 10^4 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6})} = \\ &= \frac{100}{100 - j79,58} = 0,78e^{j0,67}. \end{aligned}$$

Модуль  $K=0,78$  и в децибелах  $20 \lg 0,78 = -2,16$  дБ, аргумент  $\psi = -0,67$  рад.

## Глава четырнадцатая

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

#### 14.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В главах 8—13 рассматривались цепи с синусоидальными ЭДС, напряжениями и токами. Токи и напряжения в значительной части электрических устройств, и прежде всего в энергетических установках, действительно можно считать синусоидальными. Однако в ряде случаев токи и напряжения отличаются от синусоидальных. Причиной появления несинусоидальных напряжений и токов могут быть как генераторы, так и приемники энергии.

В машинных генераторах одной из причин искажения формы кривой ЭДС является несинусоидальное распределение магнитной индукции в воздушном зазоре из-за наличия у якоря зубцов и впадин, реакции якоря и т. д. Несинусоидальные напряжения получаются во многих электронных генераторах и других устройствах и приборах в радиотехнике, электронике, связи и т. д. при передаче информации.

В приемниках энергии и в трансформаторах со стальными сердечниками несинусоидальность тока или напряжения может быть вызвана нелинейной зависимостью между магнитным потоком и намагничивающим током. Несинусоидальные токи появляются в цепи во всех случаях работы приемников энергии с нелинейными вольт-амперными характеристиками (например, диодов, нелинейных конденсаторов, транзисторов и т. д.).

При изучении процессов в электрических цепях с несинусоидальными токами и напряжениями можно пользоваться теоремой Фурье, согласно которой всякая периодически изменяющаяся величина (ЭДС, напряжение, ток) рассматривается как сумма постоянной (независимой от времени) величины и ряда синусоидальных (гармонических) величин с кратными частотами.

Гармоническая составляющая, частота которой равна частоте несинусоидальной периодической величины, называется основной гармоникой; остальные гармоники, у которых частота в 2, 3, 4 и т. д. раз больше, называются высшими гармониками, т. е. второй гармоникой, третьей и т. д.

В качестве примера на рис. 14.1—14.3 даны кривые несинусоидальных ЭДС, состоящих из двух синусоидальных составляющих (показаны штриховой линией): основной синусоиды с той же частотой, что и данная несинусоидальная кривая, и третьей гармоники, имеющей тройную частоту.

Эти кривые отличаются друг от друга начальными фазами третьих гармоник; их уравнения соответственно

$$e = e_1 + e_3 = E_{1m} \sin \omega t + E_{3m} \sin 3\omega t;$$

$$e = e_1 + e_3 = E_{1m} \sin \omega t + E_{3m} \sin (3\omega t - \pi);$$

$$e = e_1 + e_3 = E_{1m} \sin \omega t + E_{3m} \sin (3\omega t - \psi_3).$$

Следует обратить внимание на то, что отрезок оси абсцисс, соответствующий одному периоду  $T = 2\pi/\omega$  основной гармоники, равен  $k$  периодам  $k$ -й гармоники, т. е. масштаб по оси абсцисс, например, для третьей гармоники ( $k=3$ ) в 3 раза больше масштаба основной гармоники.

Как указывалось выше, всякая периодически изменяющаяся величина  $f(\omega t)$  или  $y(x)$  с периодом  $2\pi$  (т. е. ток, напряжение, ЭДС, магнитный поток и т. д.) может быть разложена на постоянную составляющую  $A_0$  и ряд синусоид, т. е.

$$f(\omega t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots \quad (14.1)$$

или

$$y(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots, \quad (14.2)$$

где  $A_0$  — постоянная составляющая;  $A_1, A_2, A_3, \dots$  — амплитуды первой, второй, третьей и т. д. гармоник;  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$  — начальные фазы.

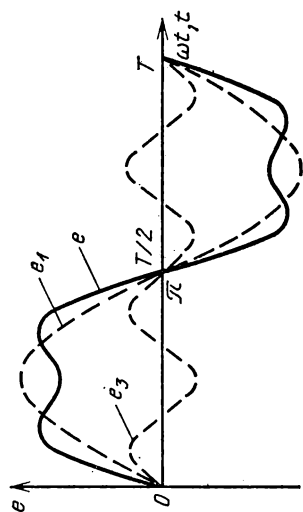


Рис. 14.1. Несинусоидальная кривая ЭДС, состоящая из основной и третьей гармоник с нулевыми начальными фазами

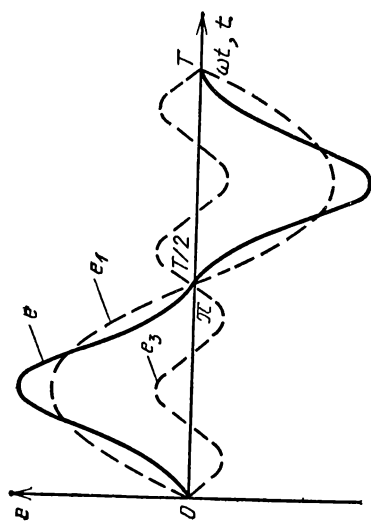


Рис. 14.2. Несинусоидальная кривая ЭДС, состоящая из основной гармоники с нулевой начальной фазой и третьей гармоники с начальной фазой, равной  $180^\circ$

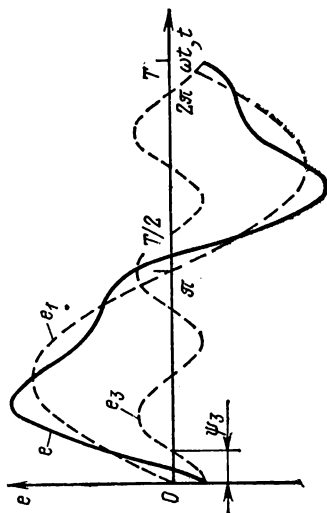


Рис. 14.3. Несинусоидальная кривая ЭДС, состоящая из основной и третьей гармоник с различными начальными фазами

Пользуясь известным из тригонометрии выражением синуса суммы двух углов, выражение любой  $k$ -й гармоники преобразуем так:

$$A_k \sin(kx + \psi_k) = A_k \sin kx \cos \psi_k + A_k \cos kx \sin \psi_k. \quad (14.3)$$

Обозначив

$$A_k \cos \psi_k = B_k; \quad A_k \sin \psi_k = C_k, \quad (14.4)$$

получим

$$A_k \sin(kx + \psi_k) = B_k \sin kx + C_k \cos kx.$$

Таким образом, ряд (14.2) или (14.1) можно представить в виде суммы ряда синусов и ряда косинусов с нулевыми начальными фазами. Для ряда (14.2)

$$y(x) = A_0 + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots \\ \dots + C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + C_3 \cos 3x + \dots \quad (14.5)$$

Отметим, что в отличие от  $A_k$  величины  $B_k$  и  $C_k$  могут быть как положительными, так и отрицательными.

Если ряды синусоид и косинусоид с нулевыми начальными фазами (14.5) необходимо заменить одним рядом синусоид с начальными фазами, отличными от нуля (14.2), то амплитуды синусоид последнего ряда

$$A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}, \quad (14.6)$$

а начальные фазы по (14.4) — через их тангенсы:

$$\operatorname{tg} \psi_k = \sin \psi_k / \cos \psi_k = C_k / B_k. \quad (14.7)$$

При определении  $\psi_k$  следует иметь в виду, что каждому значению  $\operatorname{tg} \psi_k$  соответствуют два значения угла  $\psi_k$ , отличающиеся друг от друга на  $180^\circ$ ; поэтому при определении  $\psi_k$  через тангенс следует по знакам  $B_k$  и  $C_k$ , т. е.  $\sin \psi_k$  и  $\cos \psi_k$ , выяснить, в какой четверти координат лежит угол и в соответствии с этим выбрать одно из двух значений.

## 14.2. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ СИММЕТРИИ

Так как среднее за период ( $2\pi$ ) значение синусоиды равно нулю:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x dx = \frac{1}{2\pi} (\cos 0 - \cos 2\pi) = 0,$$

то среднее за период значение периодической кривой или периодической величины, состоящей из ряда синусоид и не



содержащей постоянной составляющей, также равно нулю:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + \dots] dx = 0.$$

Для синусоидального тока это свойство отмечалось в § 8.4, б. И, наоборот, если у периодической кривой средняя за период ордината равна нулю, то постоянная составляющая такой кривой также равна нулю. Среднее значение периодической кривой, состоящей из постоянной составляющей и ряда синусоид, равно постоянной составляющей

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [A_0 + A_1 \sin(x + \psi_1) + A_2 \sin(2x + \psi_2) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots] dx = A_0. \quad (14.8)$$

Периодическая кривая называется симметричной относительно оси абсцисс, если любым двум абсциссам, различающимся на половину периода, соответствуют ординаты, равные по абсолютному значению и обратные по знаку (рис. 14.4), т. е. если кривая удовлетворяет уравнению

$$y(x) = -y(x + \pi). \quad (14.9)$$

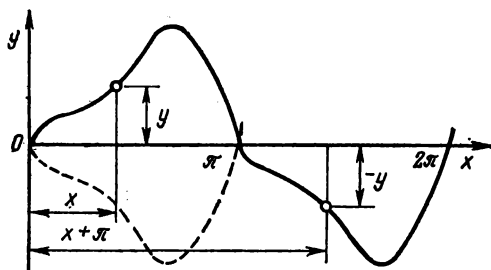


Рис. 14.4. Несинусоидальная кривая, симметричная относительно оси абсцисс

Такие кривые обладают тем свойством, что отрицательная полуволна, будучи сдвинутой на половину периода по оси абсцисс (штриховая линия на рис. 14.4), представляет собой зеркальное изображение положительной полуволны относительно оси абсцисс.

Кривые, симметричные относительно оси абсцисс, не содержат постоянной составляющей и высших гармоник четного порядка, т. е. кривая, симметричная относительно

оси абсцисс, содержит только нечетные гармоники:

$$y(x) = A_1 \sin(x + \psi_1) + A_3 \sin(3x + \psi_3) + \dots \quad (14.10)$$

или

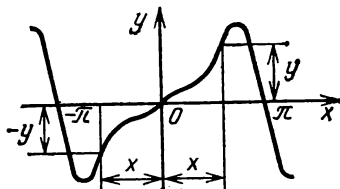
$$y(x) = B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + \dots + C_1 \cos x + C_3 \cos 3x + \dots \quad (14.11)$$

В электротехнике кривые, симметричные относительно оси абсцисс, встречаются часто, например кривые тока в катушке со стальным сердечником, подключенным к сети с синусоидальным напряжением (§ 15.3).

Периодическая кривая называется симметричной относительно начала координат, если любым двум абсциссам, имеющим одинаковое значение, но разные знаки, соответствуют ординаты, равные по абсолютному значению и обратные по знаку (рис. 14.5), т. е. если кривая удовлетворяет уравнению

$$y(x) = -y(-x). \quad (14.12)$$

Рис. 14.5. Несинусоидальная кривая, симметричная относительно начала координат



Кривые, симметричные относительно начала координат, не содержат постоянной составляющей и косинусоид и могут быть представлены рядом

$$y(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots \quad (14.13)$$

Весьма часто встречаются кривые, симметричные как относительно оси абсцисс, так и относительно начала координат, например, по рис. 14.6. Эти кривые не содержат постоянной составляющей, четных гармоник и косинусоидальных составляющих. Уравнение такой кривой

$$y(x) = B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + \dots \quad (14.14)$$

Кривые, представленные на рис. 14.1 и 14.2, также принадлежат к этой категории.

Следует отметить, что симметрия или несимметрия относительно оси абсцисс обусловлена формой кривой и уст-

ранена быть не может. Симметрия же относительно начала координат в ряде случаев достигается целесообразным выбором начала отсчета времени.

### 14.3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ СОСТАВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Переменные токи и напряжения могут быть записаны в виде осциллограмм на фотопленку или фотобумагу. Полученные осциллограммы могут быть разложены в ряд Фурье на составляющие гармоники различными методами или, как говорят, может быть найден их спектральный состав. Ниже приведены примеры спектрального состава некоторых встречающихся в электротехнике кривых.

1. На рис. 14.6 дана периодическая кривая, имеющая форму трапеции. Она имеет наклонную часть от  $x = \omega t = 0$

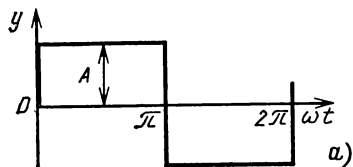
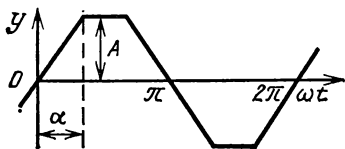


Рис. 14.6. Периодическая кривая, имеющая форму трапеции

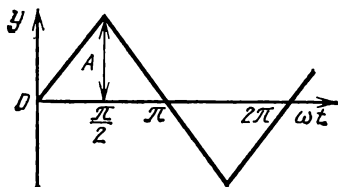


Рис. 14.7. Периодическая кривая, имеющая форму треугольника

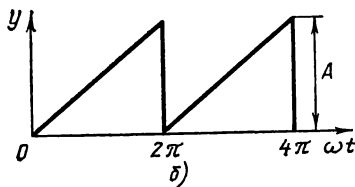


Рис. 14.8. Периодические кривые, имеющие форму прямоугольника (а) и форму пилы (б)

до  $x = \omega t = \alpha$  и участок, параллельный оси абсцисс, с постоянной ординатой  $y = A$ . Эта кривая может быть разложена в ряд

$$y = \frac{4A}{\pi\alpha} \left( \sin \alpha \cdot \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \cdot \sin 3\omega t + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \cdot \sin 5\omega t + \dots \right). \quad (14.15)$$

В частном случае, когда  $\alpha = \pi/3$ , из ряда (14.15) выпадают все гармоники, кратные трем:

$$y = \frac{6\sqrt{3}A}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \frac{1}{25} \sin 5\omega t + \frac{1}{49} \sin 7\omega t - \dots \right),$$

и такая трапеция мало отличается от синусоиды, так как амплитуда пятой гармоники в 25 раз меньше основной; седьмой гармоники — в 49 раз меньше основной и т. д.

2. Кривая, имеющая форму треугольника (рис. 14.7), может быть разложена в ряд

$$y = \frac{8A}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \dots \right). \quad (14.16)$$

3. В различных областях радиотехники, автоматики, телемеханики и вычислительной техники электронные генераторы создают периодические последовательности прямоугольной (рис. 14.8, а) или пилообразной (рис. 14.8, б) формы.

Периодическая кривая прямоугольной формы раскладывается в ряд

$$y = \frac{4A}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right). \quad (14.17a)$$

Периодическая кривая пилообразной формы раскладывается в ряд.

$$y = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right). \quad (14.17b)$$

4. Кривые, состоящие из отрезков синусоид, получаются, например, после выпрямления синусоидального тока.

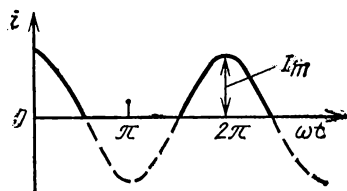


Рис. 14.9. Кривая тока при однополупериодном выпрямлении

Кривая тока однополупериодного выпрямителя при амплитуде  $I_m$  (рис. 14.9) раскладывается в ряд

$$i = \frac{2I_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \right. \\ \left. + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right). \quad (14.18)$$

Кривая тока двухполупериодного выпрямителя (рис. 14.10) раскладывается в ряд

$$i = \frac{4I_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3.5} \cos 4\omega t + \right. \\ \left. + \frac{1}{5.7} \cos 6\omega t - \dots \right). \quad (14.19)$$

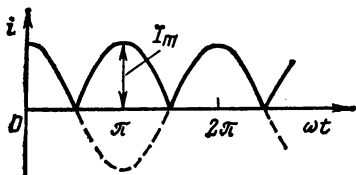


Рис. 14.10. Кривая тока при двухполупериодном выпрямлении

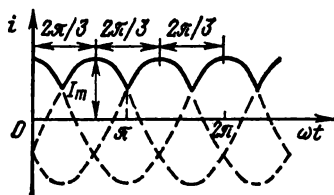


Рис. 14.11. Кривая выпрямленного тока трехфазной цепи

Кривая тока трехфазного выпрямителя (рис. 14.11) раскладывается в ряд

$$i = \frac{3\sqrt{3}I_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} \cos 3\omega t - \frac{1}{5.7} \cos 6\omega t + \right. \\ \left. + \frac{1}{8.10} \cos 9\omega t - \dots \right). \quad (14.20)$$

Кроме рассмотренных периодических кривых в электротехнике встречаются кривые и других форм, для определения спектрального состава которых (разложения в ряд Фурье) применяются графические и графоаналитические методы. Познакомимся с одним из таких методов.

Период заданной кривой — функции  $y(x)$  разбивают на  $n$  равных частей так, что  $2\pi/n = \Delta x$ , и в точках деления проводят ординаты  $y$  заданной кривой.

Постоянная составляющая (14.8) заданной кривой

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(x) dx \quad (14.21)$$

или при замене определенного интеграла алгебраической

суммой  $n$  слагаемых ординат  $y$  этой кривой

$$A_0 \approx \frac{1}{2\pi} \sum_1^n y \Delta x = \frac{\Delta x}{n \Delta x} \sum_1^n y = \frac{1}{n} \sum_1^n y, \quad (14.22)$$

где  $\sum_1^n y$  — алгебраическая сумма ординат кривой в  $n$  точках за период.

Коэффициенты  $B_k$  и  $C_k$ , т. е. амплитуды двойного ряда синусоид и косинусоид (14.5), определяются по формулам

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(x) \sin kx \, dx \quad (14.23a)$$

и

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(x) \cos kx \, dx \quad (14.23b)$$

или после замены, аналогичной рассмотренной,

$$B_k \approx \frac{2}{n} \sum_1^n y \sin k(n\Delta x) \quad (14.24)$$

и

$$C_k \approx \frac{2}{n} \sum_1^n y \cos k(n\Delta x). \quad (14.25)$$

Амплитуда  $k$ -й гармоники  $A_k$  и начальная фаза  $\psi_k$  определяются по (14.6) и (14.7).

Вычисления по (14.22), (14.24) и (14.25) наиболее просто выполняются с применением ЭВМ.

Если определенные интегралы (14.21) и (14.23) могут быть вычислены, в частности, с применением таблиц определенных интегралов, то возможно аналитическое разложение в ряд Фурье.

#### 14.4. ДЕЙСТВУЮЩЕЕ И СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ НЕСИНУСОИДАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

**а) Действующее значение.** Действующее (среднеквадратичное) значение периодического напряжения или тока (а также ЭДС, магнитного потока и т. д.) любой формы определяется таким же выражением, как и для цепи синусоидального тока.

соидального тока (§ 8.5):

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^2 d\omega t}; \quad (14.26a)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i^2 d\omega t}. \quad (14.26б)$$

Разложив периодическое напряжение несинусоидальной формы в ряд

$$u = U_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots$$

и подставив этот ряд в формулу действующего значения (14.26a), получим

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (U_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots)^2 dt} = \\ = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [U_0^2 + 2U_0 u_1 + 2U_0 u_2 + 2U_0 u_3 + \dots + U_{1m}^2 \sin^2(\omega t + \psi_1) + 2U_{1m} U_{2m} \sin(\omega t + \psi_1) \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots] dt}.$$

Возведя в квадрат многочлен, заключенный в квадратные скобки, получаем новый многочлен, содержащий следующие слагающие:

1) квадраты постоянной составляющей и всех гармоник, т. е. слагаемые вида

$$U_0^2, \quad U_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k);$$

2) удвоенные произведения каждого из членов (постоянной составляющей и  $k$ -гармоники) на каждую другую ( $n$ -ю) гармонику, т. е. выражения двух типов:

$$2U_0 U_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n)$$

и

$$2U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) U_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n).$$

Интегрирование этих слагающих дает

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 dt = U_0^2; \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k) dt = \frac{U_{km}^2}{2};$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2U_0 U_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n) dt = 0;$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T [2U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \cdot U_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n)] dt = 0.$$

Таким образом, действующее значение несинусоидального напряжения

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}, \quad (14.27a)$$

где  $U_0$  — постоянная составляющая, а  $U_1^2 = U_{1m}^2/2$ ;  $U_2^2 = U_{2m}^2/2$  и т. д. — квадраты действующих значений синусоидальных составляющих.

Аналогично действующее значение несинусоидального тока

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots} \quad (14.27b)$$

*Действующие значения напряжений и токов не зависят от начальных фаз отдельных гармоник.*

**б) Средние значения.** Среднее значение (за период) тока, как и для цепи синусоидального тока,

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = \frac{1}{T} \int_0^T (I_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \dots) dt.$$

Так как среднее значение синусоидального тока за период равно нулю (§ 8.4), то  $I_{cp} = I_0$ . Аналогично для напряжения и ЭДС  $U_{cp} = U_0$ ;  $E_{cp} = E_0$ .

Показания некоторых систем электронных вольтметров определяют среднее по модулю значение

$$U_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T |u| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} |u| d\omega t. \quad (14.28a)$$

Аналогично для тока и ЭДС

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt; \quad E_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T |e| dt. \quad (14.28b)$$

Если кривая напряжения (тока, ЭДС) симметрична относительно оси абсцисс и в течение половины периода мгновенное значение напряжения  $u$  ни разу не изменяет



знака, то среднее по модулю равно среднему значению за половину периода, во время которого  $u > 0$ :

$$U_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} u dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u d\omega t. \quad (14.29a)$$

причем начало отсчета времени  $t=0$  должно совпадать с моментом, когда  $u=0$ . Аналогично

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt; \quad E_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} e dt. \quad (14.29б)$$

Если напряжение, ток или ЭДС ни разу не изменяет знака за весь период (рис. 14.8, б, 14.9—14.11), то среднее по модулю равно постоянной составляющей ( $U_0$ ,  $I_0$ ,  $E_0$ ).

Средние за половину периода значения тока, напряжения и ЭДС синусоидальной формы были найдены в § 8.4.

Часто среднее по модулю и действующее значения не-синусоидальной величины могут быть найдены непосредственно по определяющим формулам (14.29) и (14.26) без предварительного разложения этой величины в ряд гармонических составляющих (ряд Фурье).

Например, для периодической кривой напряжения  $u=y$  по рис. 14.8, а среднее за половину периода

$$U_{\text{ср}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u d\omega t = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} A d\omega t = \frac{1}{\pi} A \pi = A$$

и действующее значение

$$U = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^2 d\omega t} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^2 d\omega t} = \sqrt{\frac{1}{2} A^2 2\pi} = A.$$

Для периодической кривой тока  $i=y$  по рис. 14.7 можно вычислить интеграл за четверть периода, в течение которого ток линейно нарастает  $i=A\omega t/(\pi/2)$ , и удвоить (симметрия кривой) т. е.

$$\begin{aligned} I_{\text{ср}} &= \frac{1}{\pi} 2 \int_0^{\pi/2} i d\omega t = \frac{1}{\pi} 2 \int_0^{\pi/2} A \frac{\omega t}{\pi/2} d\omega t = \\ &= \frac{1}{\pi} 2A \frac{1}{\pi/2} \frac{(\omega t)^2}{2} \Big|_0^{\pi/2} = A/2 \end{aligned}$$

и действующее значение

$$I = \sqrt{\frac{1}{\pi} 2 \int_0^{\pi/2} i^2 d\omega t} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} A^2 \left( \frac{\omega t}{\pi/2} \right)^2 d\omega t} = \frac{A}{\sqrt{3}}.$$

#### 14.5. КОЭФФИЦИЕНТЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ СТЕПЕНЬ НЕСИНУСОИДАЛЬНОСТИ

Соотношения между амплитудами, действующими и средними за половину периода значениями периодических тока, напряжения и ЭДС (аналогично заряда, магнитного потока и т. д.), кривые которых симметричны относительно оси абсцисс, оценивают коэффициентами формы  $d_\Phi$  и амплитуды  $d_a$ .

Коэффициентом формы называется отношение действующего значения к среднему:

$$d_\Phi = I/I_{\text{ср}}; \quad d_\Phi = U/U_{\text{ср}}; \quad d_\Phi = E/E_{\text{ср}}. \quad (14.30)$$

Коэффициентом амплитуды называется отношение максимального значения к действующему:

$$d_a = I_{\text{max}}/I; \quad d_a = U_{\text{max}}/U; \quad d_a = E_{\text{max}}/E. \quad (14.31)$$

Для синусоидально изменяющихся величин, например тока, коэффициент формы

$$d_\Phi = \frac{I}{I_{\text{ср}}} = \frac{I_m \pi}{\sqrt{2} 2 I_m} = \frac{\pi}{2 \sqrt{2}} = 1,11$$

и коэффициент амплитуды

$$d_a = I_m/I = \sqrt{2} = 1,41.$$

Если периодически изменяющаяся величина имеет кривую более острой формы, чем синусоида, то обычно коэффициент формы  $d_\Phi > 1,1$  и коэффициент амплитуды  $d_a > 1,41$ . Кривые, имеющие более тупую (пологую) форму, характеризуются коэффициентами  $d_\Phi < 1,1$  и  $d_a < 1,41$ .

Применяя коэффициент формы, можно действующее значение ЭДС выразить через максимальное значение магнитного потока, индуктирующего эту ЭДС:

$$E = d_\Phi E_{\text{ср}} = 4 d_\Phi \omega \Phi_{\text{max}}, \quad (14.32)$$

где учтено (8.18), и при синусоидальной форме кривой магнитного потока.

$$E = 4d_{\Phi} \omega f \Phi_m = 4,44 \omega f \Phi_m. \quad (14.33)$$

Степень несинусоидальности кривых напряжения и тока, в большей или меньшей степени отличающихся от синусоидальной из-за наличия высших гармоник, оценивается еще коэффициентом искажения. Коэффициентом искажения называется отношение действующего значения основной гармоники напряжения или тока к действующему значению напряжения или тока (аналогично для ЭДС, магнитного потока и т.д.).

Таким образом, для напряжения коэффициент искажения

$$d_u = \frac{U_1}{\sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}}; \quad (14.34a)$$

для тока

$$d_i = \frac{I_1}{\sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}}. \quad (14.34b)$$

Чем меньше коэффициент искажения отличается от единицы, тем ближе к синусоиде данная кривая.

Кривые напряжения промышленных сетей переменного тока обычно немного отличаются от синусоиды. По стандарту напряжение сети считается практически синусоидальным, если действующее значение суммы всех высших гармоник не превышает 5 % действующего значения напряжения основной частоты. Коэффициент искажения такой кривой отличается от единицы на доли процента.

В электронике и радиотехнике несинусоидальность кривой напряжения или тока характеризуют коэффициентом гармоник (коэффициентом нелинейных искажений), показывающим удельный вес высших гармоник относительно основной (первой) гармоники. Для напряжения и тока

$$d_r = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2}}{U_1}; \quad d_r = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots}}{I_1}. \quad (14.35)$$

**Пример 14.1.** Определить действующее значение тока

$$i = 282 \sin \omega t + 141 \sin 3\omega t + 71 \sin (5\omega t + \pi/6) \text{ А}$$

и коэффициент искажения.

Решение.

$$I_1 = I_{1m}/\sqrt{2} = 282/\sqrt{2} = 200 \text{ A};$$

$$I_3 = I_{3m}/\sqrt{2} = 141/\sqrt{2} = 100 \text{ A};$$

$$I_5 = I_{5m}/\sqrt{2} = 71/\sqrt{2} = 50 \text{ A};$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2} = \sqrt{200^2 + 100^2 + 50^2} = 229 \text{ A};$$

$$k_H = \frac{I_1}{\sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2}} = \frac{200}{\sqrt{200^2 + 100^2 + 50^2}} = 0,873.$$

#### 14.6 РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Если в цепи действует несинусоидальная ЭДС (или напряжение), которую можно представить состоящей из ряда гармоник, то ток в линейной цепи (с приемниками, имеющими линейные вольт-амперные характеристики) состоит из такого же числа синусоидальных составляющих. Каждая гармоника тока вызывается действием соответствующей гармоники ЭДС, и ток в любой ветви можно определить методом наложения, суммируя гармоники тока.

Рассмотрим сначала неразветвленную цепь.

Пренебрегая поверхностным эффектом, будем считать, что активное сопротивление цепи для всех гармоник одинаково. Индуктивное сопротивление цепи для разных гармоник различно. Оно увеличивается пропорционально порядковому номеру  $k$ -й гармоники, так как

$$x_{Lk} = k\omega L = kx_{L1}. \quad (14.36)$$

Например, при  $L=0,0318 \text{ Гн}$  и  $f=50 \text{ Гц}$  (т. е.  $\omega=2\pi \cdot 50=100\pi \text{ рад/с}$ ) для первой гармоники ( $k=1$ )  $x_{L1}=1 \cdot 100\pi \cdot 0,0318=10 \text{ Ом}$ ; для третьей гармоники ( $k=3$ )  $x_{L3}=3 \cdot 10=30 \text{ Ом}$ ; для пятой гармоники ( $k=5$ )  $x_{L5}=5 \cdot 10=50 \text{ Ом}$  и т. д.

Емкостное сопротивление для разных гармоник также различно: оно изменяется обратно пропорционально порядковому номеру гармоники, так как

$$x_{Ck} = 1/k\omega C = x_{C1}/k. \quad (14.37)$$

Например, при  $C=31,8 \text{ мкФ}$  и  $f=50 \text{ Гц}$  (т. е.  $\omega=100\pi \text{ рад/с}$ ) для первой гармоники  $x_{C1}=1/\omega C=10^6/(1 \cdot 100\pi \cdot 31,8)=100 \text{ Ом}$ ; для третьей гармоники  $x_{C3}=1/(3\omega C)=100/3=33,3 \text{ Ом}$ ; для пятой гармоники  $x_{C5}=1/(5\omega C)=100/5=20 \text{ Ом}$  и т. д.

В качестве примера рассчитаем ток в  $rLC$ -цепи (последовательном контуре) при действии несинусоидального напряжения. Для  $k$ -й гармоники полное сопротивление цепи

$$z_k = \sqrt{r^2 + (k\omega L - 1/k\omega C)^2} \quad (14.38)$$

и амплитуда соответствующей гармоники тока

$$I_{km} = \frac{U_{km}}{z_k} = \frac{U_{km}}{\sqrt{r^2 + (k\omega L - 1/k\omega C)^2}}, \quad (14.39)$$

где  $U_{km}$  — амплитуда  $k$ -й гармоники напряжения.

Угол сдвига фаз между напряжением и током для каждой гармоники получается различным, так как с изменением порядкового номера активное сопротивление  $r$  не изменяется, а реактивное сопротивление  $x_k = k\omega L - 1/k\omega C$  изменяется. Тангенс угла сдвига фаз данной гармоники напряжения можно определить из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{x_k}{r} = \frac{k\omega L - 1/k\omega C}{r}. \quad (14.40)$$

Если напряжение, разложенное на гармоники, задано, например, уравнением (рис. 14.12, а)

$$u = u_1 + u_2 = U_{1m} \sin \omega t + U_{2m} \sin 2\omega t,$$

то ток цепи

$$i = i_1 + i_2 = I_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t - \varphi_2),$$

причем

$$I_{1m} = U_{1m}/z_1; \quad I_{2m} = U_{2m}/z_2$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = x_1/r_1; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = x_2/r_2.$$

В цепи только с активным сопротивлением, одинаковым для всех гармоник, соотношение амплитуд тока и напряжения неизменно для всех гармоник. Следовательно, в цепи с активным сопротивлением кривая тока  $i$  подобна кривой напряжения  $u$  (рис. 14.12, а и б).

В цепи с активным сопротивлением и индуктивностью при увеличении порядкового номера гармоники полное сопротивление увеличивается, т.е. уменьшается отношение амплитуды гармоники тока к амплитуде гармоники напряжения. Иначе говоря, чем выше порядковый номер гармоники, тем менее резко выражена данная гармоника в кривой тока, по сравнению с кривой напряжения. Следовательно, в цепи с активным сопротивлением и индуктивностью

кривые тока и напряжения не подобны; кривая тока меньше отличается по форме от синусоиды, чем кривая напряжения (рис. 14.12, а и в).

В цепи с активным сопротивлением и емкостью при увеличении порядкового номера гармоники полное сопротивление уменьшается, т.е. увеличивается отношение амплитуды гармоники тока к амплитуде гармоники напряжения. Иначе говоря, чем выше порядковый номер гармоники, тем более резко выражена данная гармоника в кривой тока по сравнению с кривой напряжения. В цепи с активным сопротивлением и емкостью кривые тока и напряжения не подобны; кривая тока больше отличается по форме от синусоиды, чем кривая напряжения (рис. 14.12, а и г).

Последовательный контур ( $rLC$ -цепь) может оказаться настроенным в резонанс при одной из высших гармоник; полное сопротивление для этой гармоники будет наименьшим, и в кривой тока она будет выражена более резко, чем в кривой напряжения (на рис. 14.12, д вторая гармоника тока).

**Пример 14.2.** Определить ток в последовательном контуре с параметрами  $r=10$  Ом,  $L=0,05$  Гн и  $C=22,5$  мкФ. Напряжение на выводах цепи (рис. 14.13, а)

$$u = 180 \sin \omega t + 60 \sin 3\omega t + 40 \sin (5\omega t + 18^\circ) \text{ В.}$$

Частота основной гармоники  $f=50$  Гц и  $\omega=2\pi \cdot 50 \approx 314$  рад/с.  
Решение.

$$z_1 = \sqrt{r^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = \sqrt{10^2 + [314 \cdot 0,05 - 10^6/(314 \cdot 22,5)]^2} =$$

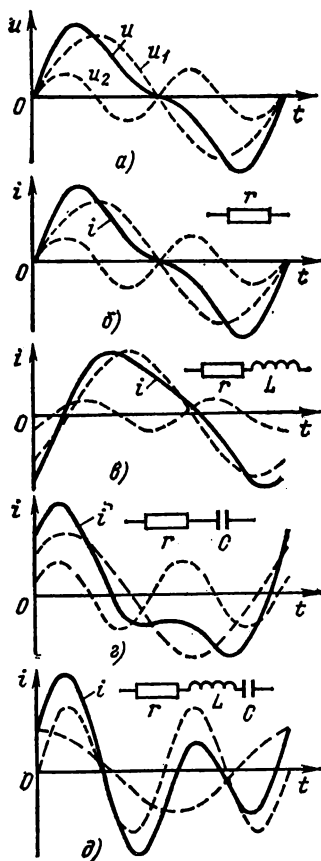


Рис. 14.12. Кривые напряжения и тока в цепях с различными параметрами

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{10^2 + (15,7 - 141)^2} = 126 \text{ Ом}; \\
 \operatorname{tg} \varphi_1 &= x_1/r = (15,7 - 141)/10 = -125,3/10 = -12,53; \\
 \varphi_1 &= -85^\circ 20'; \quad I_{1m} = U_{1m}/z_1 = 180/126 = 1,43 \text{ А}; \\
 z_3 &= \sqrt{r^2 + (3\omega L - 1/3\omega C)^2} = \sqrt{10^2 + (3 \cdot 15,7 - 141/3)^2} = \\
 &= \sqrt{10^2 + (47 - 47)^2} = 10 \text{ Ом}; \\
 \operatorname{tg} \varphi_3 &= x_3/r = 0/r = 0; \\
 \varphi_3 &= 0; \quad I_{3m} = U_{3m}/z_3 = 60/10 = 6 \text{ А}; \\
 z_5 &= \sqrt{r^2 + (5\omega L - 1/5\omega C)^2} = \sqrt{10^2 + (5 \cdot 15,7 - 141/5)^2} = \\
 &= \sqrt{10^2 + (78,5 - 28,3)^2} = 51,2 \text{ Ом}; \quad \operatorname{tg} \varphi_5 = x_5/r = \\
 &= (78,5 - 28,3)/10 = 5,02; \quad \varphi_5 = 78^\circ; \\
 I_{5m} &= U_{5m}/z_5 = 40/51,2 = 0,78 \text{ А};
 \end{aligned}$$

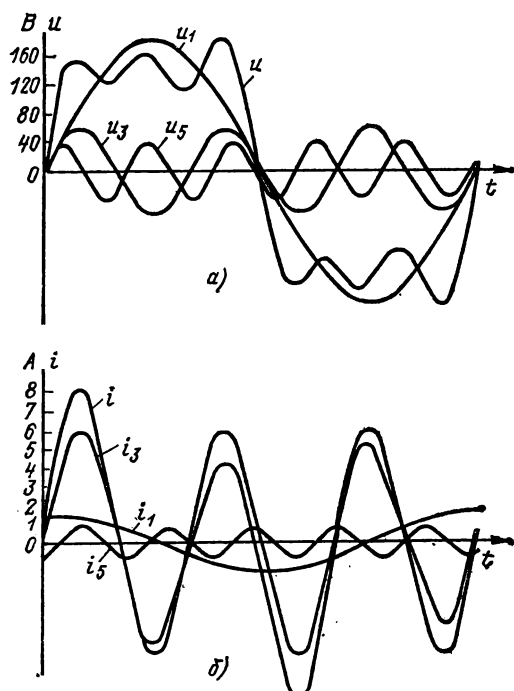


Рис. 14.13. Несинусоидальные кривые напряжения и тока и составляющие их гармоники

$$i = i_1 + i_3 + i_5 = 1,43 \sin(\omega t + 85^\circ 20') + 6 \sin 3\omega t + \\ + 0,78 \sin(5\omega t - 78^\circ) \text{ А.}$$

На рис. 14.13, б построены гармоники тока и произведено их графическое сложение.

В этом примере для третьей гармоники получился резонанс напряжений, полное сопротивление контура для этой гармоники равно активному сопротивлению, третья гармоника более резко выражена в кривой тока, чем в кривой напряжения, что видно из графика и из соотношения

$$U_{3m}/U_{1m} = 60/180 = 0,33; \quad I_{3m}/I_{1m} = 6/1,43 = 4,2.$$

Если несинусоидальное напряжение подведено к цепи, состоящей из нескольких параллельных ветвей, каждая из которых обладает активным и реактивным сопротивлениями, то формы кривых токов в каждой из параллельных ветвей в общем случае будут различны. Следовательно, они отличаются и от формы кривой тока в неразветвленной части цепи и токи в параллельных ветвях находятся по принципу наложения.

#### 14.7. МОЩНОСТИ ЦЕПИ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Средняя или активная мощность при несинусоидальном токе измеряется, как и в случае синусоидального тока, отношением израсходованной в цепи за период энергии к продолжительности периода, т. е.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T ui dt. \quad (14.41)$$

Подставив в (14.41) мгновенные значения несинусоидальных напряжений и тока, получим

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T [U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \\ + U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots] [I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + \\ + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2 - \varphi_2) + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3) + \dots] dt.$$

Перемножив многочлены, заключенные в квадратные скобки, получим интегралы четырех типов:

а) интеграл от произведения постоянных величин

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt = U_0 I_0;$$



б) интегралы от произведений двух синусоид одной и той же частоты

$$\frac{1}{T} \int_0^T [U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \cdot I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k)] dt = U_k I_k \cos \varphi_k$$

в) интегралы от произведения постоянной величины и синусоиды

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) dt = 0;$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_0 U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) dt = 0;$$

г) интегралы от произведения двух синусоид с частотами различных гармоник

$$\frac{1}{T} \int_0^T [U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \cdot I_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n - \varphi_n)] dt = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P &= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + \dots = \\ &= P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots = \Sigma P_k, \end{aligned} \quad (14.42)$$

т.е. средняя или активная мощность несинусоидального тока равна сумме средних (активных) мощностей отдельных гармоник.

По аналогии с синусоидальными токами среднюю мощность несинусоидальных токов можно выразить через действующие значения напряжения и тока ( $U$  и  $I$ ). Так как в общем случае произведение  $UI$  больше  $P$ , то, для того чтобы выразить через него мощность, нужно произведение  $UI$  умножить на некоторый коэффициент, меньший единицы, который также называют коэффициентом мощности и обозначают  $\chi$ .

Следовательно,

$$P = \Sigma P_k = UI\chi. \quad (14.43)$$

Следует иметь в виду, что в последнем выражении коэффициент мощности  $\chi$  не представляет собой тригонометрического косинуса угла сдвига фаз между напряжением и током. Действительно, *несинусоидальный ток или*

напряжение не могут быть выражены при помощи векторов, кривые тока и напряжения в общем случае даже не подобны, так что невозможно применить понятие об угле сдвига фаз, введенное для синусоидальных токов,

На практике при расчете энергетических установок напряжения и тока несинусоидальной формы иногда заменяют эквивалентными синусоидальными, имеющими такие же действующие значения  $U$  и  $I$ , что дает возможность пользоваться векторными диаграммами. При замене несинусоидальных кривых напряжения и тока эквивалентными синусоидальными последние необходимо сдвинуть относительно друг друга на такой угол  $\varphi$ , чтобы средняя мощность, вычисленная по формуле  $P = UI \cos \varphi$ , была равна активной мощности цепи несинусоидального тока; иначе говоря, необходимо, чтобы косинус угла сдвига фаз между эквивалентными синусоидами  $\cos \varphi$  был равен коэффициенту мощности  $\chi$ .

**Пример 14.3.** Определить действующие значения напряжения и тока, активную мощность и коэффициент мощности для цепи примера 14.2.

**Решение.**

$$U_1 = U_{1m}/\sqrt{2} = 180/\sqrt{2} = 127 \text{ В}; \quad U_3 = 60/\sqrt{2} = 42,5 \text{ В};$$

$$U_5 = 40/\sqrt{2} = 28,4 \text{ В};$$

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2} = \sqrt{127^2 + 42,5^2 + 28,4^2} = 137 \text{ В};$$

$$I_1 = I_{1m}/\sqrt{2} = 1,43/\sqrt{2} = 1,0 \text{ А}; \quad I_3 = 6/\sqrt{2} = 4,25 \text{ А};$$

$$I_5 = 0,78/\sqrt{2} = 0,55 \text{ А};$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2} = \sqrt{1,0^2 + 4,25^2 + 0,55^2} = 4,4 \text{ А};$$

$$\cos \varphi_1 = 0,081; \quad \cos \varphi_3 = 1; \quad \cos \varphi_5 = 0,194,$$

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 127 \cdot 1,0 \cdot 0,081 = 10,5 \text{ Вт};$$

$$P_3 = U_3 I_3 \cos \varphi_3 = 42,5 \cdot 4,25 \cdot 1 = 180 \text{ Вт};$$

$$P_5 = U_5 I_5 \cos \varphi_5 = 28,4 \cdot 0,55 \cdot 0,194 = 3,0 \text{ Вт};$$

$$P = P_1 + P_3 + P_5 = 10,5 + 180 + 3,0 = 193,5 \text{ Вт};$$

$$\chi = P/(UI) = 193,5/(137 \cdot 4,4) = 0,32.$$

Реактивная мощность, так же как и активная, определяется в виде суммы реактивных мощностей отдельных гармоник:

$$\begin{aligned} Q &= U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + U_3 I_3 \sin \varphi_3 + \dots = \\ &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots = \Sigma Q_k. \end{aligned} \quad (14.44)$$

Полная мощность равна произведению действующих значений

$$S = UI. \quad (14.45)$$

При этом для цепи несинусоидального тока в общем случае

$$S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

### 14.8. ФИЛЬТРЫ

Цепи, содержащие катушки индуктивности и конденсаторы, обладают неодинаковым сопротивлением для различных гармоник тока. Это дает возможность при заданной форме кривой ЭДС генератора или источника питания изменять форму кривой тока в приемнике, включив между приемником и генератором специальное устройство — электрический фильтр.

Пусть в кривой ЭДС генератора, питающего приемник, есть  $k$ -я гармоника, а в кривой тока приемника эту составляющую нужно свести к минимуму.

Включим между приемником и генератором контур (рис. 14.14, а), состоящий из параллельно соединенных

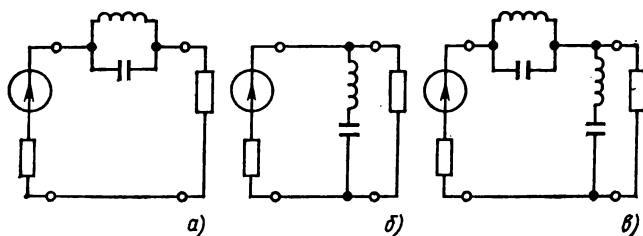


Рис. 14.14. Схемы заграждающих электрических фильтров

конденсатора и катушки индуктивности (с ничтожным по возможности, активным сопротивлением), и настроенный в резонанс (токов) для этой гармоники:  $k\omega L = 1/k\omega C$ . Такой контур-фильтр называют заграждающим. Он имеет для  $k$ -й гармоники весьма большое сопротивление (при  $r=0$  бесконечно большое) по сравнению с сопротивлением для остальных гармоник; следовательно,  $k$ -я гармоника тока в приемнике будет незначительна.

Для этой же цели можно применить контур по рис. 14.14, б, состоящий из последовательно соединенных кон-

денсатора и катушки индуктивности (с ничтожным, по возможности, активным сопротивлением), также настроенный в резонанс (напряжений), но включенный параллельно приемнику энергии. При малом сопротивлении контура-фильтра для  $k$ -й гармоники по сравнению с сопротивлением приемника ток этой гармоники проходит по ветви с контуром и отсутствует в приемнике.

Одновременное применение обоих контуров (рис. 14.14, *в*) дает еще лучшую фильтрацию.

Фильтры, выполненные по схемам рис. 14.15, *а—в* и называемые полосовыми, включают, чтобы пропустить к приемнику  $k$ -ю гармонику тока и не пропустить другие.

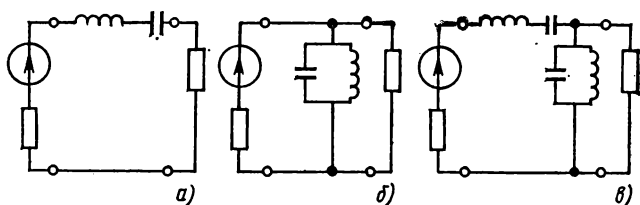


Рис. 14.15. Схемы полосовых электрических фильтров

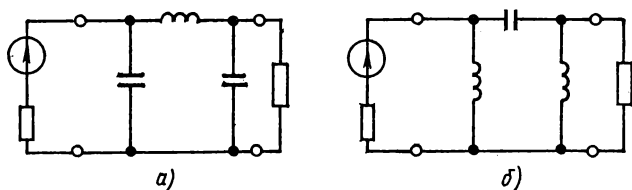


Рис. 14.16. Схемы электрических фильтров низкой (*а*) и высокой (*б*) частот

На рис. 14.16, *а* показана  $\Pi$ -образная схема четырехполюсника-фильтра. Индуктивное сопротивление последовательно включенной катушки растет с увеличением номера гармоники, а сопротивление параллельно включенных конденсаторов, наоборот, падает. Поэтому фильтр имеет ничтожное сопротивление для гармоник тока с небольшим порядковым номером (низкие частоты) и большое сопротивление для гармоник тока с высоким порядковым номером (высокие частоты). Такое устройство называют фильтром низких частот. Эти фильтры применяют, например, в схемах выпрямления (§ 15.2) для уменьшения перемен-

ных составляющих выпрямленного тока, вследствие чего они иногда называются сглаживающими фильтрами.

Фильтр, представленный на рис. 14.16, б, наоборот, оказывает бесконечно большое сопротивление постоянной составляющей тока, большое сопротивление гармоникам тока низкой частоты и малое сопротивление гармоникам тока высокой частоты и поэтому называется фильтром высоких частот.

Каждую из П-образных схем рис. 14.16 можно заменить Т-образной (гл. 13).

#### 14.9. ВЫСШИЕ ГАРМОНИКИ В ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЯХ

В обмотках трехфазного генератора могут наводиться ЭДС не строго синусоидальной формы, содержащие нечетные гармоники, например первую, третью и пятую:

$$e_A = e_{A1} + e_{A3} + e_{A5} = E_{1m} \sin \omega t + E_{3m} \sin 3\omega t + E_{5m} \sin 5\omega t; \quad (14.46)$$

$$e_B = e_{B1} + e_{B3} + e_{B5} = E_{1m} \sin \omega(t - T/3) + E_{3m} \sin 3\omega(t - T/3) + E_{5m} \sin 5\omega(t - T/3) = E_{1m} \sin(\omega t - 2\pi/3) + E_{3m} \sin 3\omega t + E_{5m} \sin(5\omega t + 2\pi/3); \quad (14.47)$$

$$e_C = e_{C1} + e_{C3} + e_{C5} = E_{1m} \sin \omega(t - 2T/3) + E_{3m} \sin 3\omega(t - 2T/3) + E_{5m} \sin 5\omega(t - 2T/3) = E_{1m} \sin(\omega t + 2\pi/3) + E_{3m} \sin \omega t + E_{5m} \sin(5\omega t - 2\pi/3). \quad (14.48)$$

Гармоники этих трех ЭДС показаны на рис. 14.17. Действующие значения ЭДС одинаковы:

$$E_A = E_B = E_C = \sqrt{E_{1m}^2/2 + E_{3m}^2/2 + E_{5m}^2/2} = \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2} = E_\Phi. \quad (14.49)$$

На рис. 14.17, а также из (14.46) — (14.48) видно, что все гармоники ЭДС фазы *B* сдвинуты относительно гармоник ЭДС фазы *A* на одну треть периода ( $T/3$ ) основной синусоиды (первой гармоники), а все гармоники ЭДС фазы *C* — на две трети периода. Так как период третьей гармоники в 3 раза меньше периода основной синусоиды, т.е.  $T_3 = T/3$ , то третья гармоника фазы *B* сдвинута на целый период ( $T_3$ ) относительно третьей гармоники фазы *A*, а третья гармоника фазы *C* — на два периода ( $2T_3$ ) от-

носителю третьей гармоники фазы  $A$ . Но сдвиг на целый период или целое число периодов равносильно отсутствию сдвига и, следовательно, третьи гармоники во всех трех обмотках совпадают по фазе.

Если кривые ЭДС, кроме третьей гармоники, содержат еще гармоники, кратные трем, т. е. 9, 15 и 21-ю и т. д., то и для них справедлив аналогичный вывод.

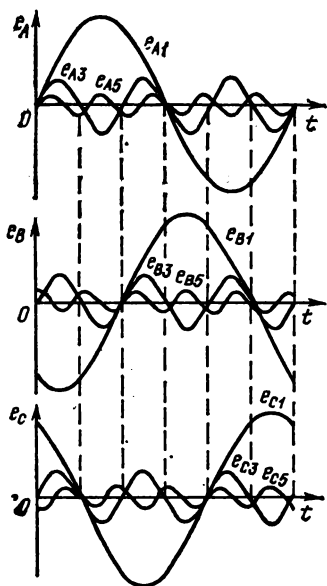


Рис. 14.17. Первые, третьи и пятые гармоники трехфазной системы ЭДС

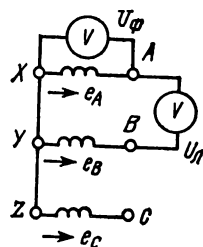


Рис. 14.18. Соединение обмоток генератора звездой

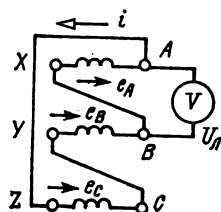


Рис. 14.19. Соединение обмоток генератора треугольником

Пятая гармоника имеет обратную последовательность фаз: в фазе  $B$  ЭДС пятой гармоники опережает ЭДС той же гармоники в фазе  $A$  на угол  $2\pi/3$ , а в фазе  $C$  отстает на угол  $2\pi/3$ . Обратную последовательность имеют еще 11, 17, 23-я и т. д. гармоники, в то время как 7, 13, 19-я и т. д. гармоники имеют прямую последовательность.

При соединении обмоток генератора звездой (рис. 14.18) линейные напряжения равны разностям соответствующих фазных ЭДС или напряжений. Так как во всех обмотках генератора третьи и кратные им гармоники ЭДС совпадают по фазе, то разность их равна нулю. Следовательно, в линей-

ных напряжениях отсутствуют третьи и кратные им гармоники (9-я, 15-я и т. д.).

Таким образом, действующее значение линейного напряжения

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} \sqrt{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + E_{11}^2 + \dots} \quad (14.50)$$

Очевидно, отношение линейного напряжения к фазному меньше  $\sqrt{3}$ , т. е.

$$\frac{U_{\text{л}}}{U_{\text{ф}}} = \frac{U_{\text{л}}}{E_{\text{ф}}} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{E_1^2 + E_5^2 + \dots}}{\sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + \dots}} < \sqrt{3}.$$

Если соединить обмотки генератора треугольником (рис. 14.19), то суммарная ЭДС в контуре обмоток будет равна утроенной сумме третьих и кратных трех гармоник ЭДС, т. е.

$$e = 3e_3 + 3e_9 + 3e_{15} + \dots = 3(e_3 + e_9 + e_{15} + \dots).$$

Сумма остальных гармоник ЭДС равна нулю, так как они образуют симметричные системы.

Действующее значение суммарной ЭДС

$$E = 3 \sqrt{E_3^2 + E_9^2 + E_{15}^2 + \dots}$$

Даже при отсутствии нагрузки (при отключенных приемниках энергии) в замкнутом контуре обмоток возникает ток

$$i = i_3 + i_9 + i_{15} + \dots$$

Действующие значения гармоник тока

$$I_3 = 3E_3/3z_3; \quad I_9 = 3E_9/3z_9 \text{ и т. д.},$$

где  $z_3, z_9, \dots$  — полные сопротивления каждой обмотки генератора для соответствующих гармоник.

Действующее значение тока

$$I = \sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \dots}.$$

Падение напряжения от каждой гармоники тока в каждой обмотке равно ЭДС этой гармоники  $z_3 I_3 = E_3$ ,  $z_9 I_9 = E_9$ ;  $z_{15} I_{15} = E_{15} \dots$  Следовательно, ЭДС третьей и кратных ей гармоник уравновесятся падениями напряжений на обмотках генератора и линейное напряжение, как и при соединении звездой, не будет содержать этих гармоник.

Действующее значение линейного напряжения

$$U_{\text{л}} = \sqrt{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + E_{11}^2 + \dots} \quad (14.51)$$

Подключим к генератору, соединенному треугольником, приемники, также соединенные треугольником (рис. 14.20).

Так как фазные напряжения приемников, равные линейному напряжению  $U_{\text{л}}$ , не содержат третьих и кратных им гармоник (14.51), то в фазных токах приемника  $i_{AB}$ ,  $i_{BC}$ ,  $i_{CA}$

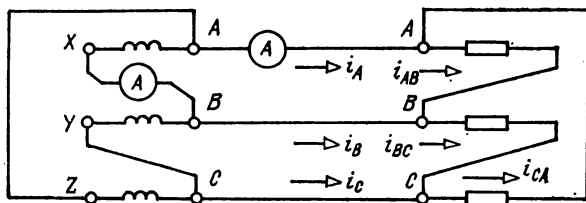


Рис. 14.20. Соединение обмоток генератора и приемников треугольником

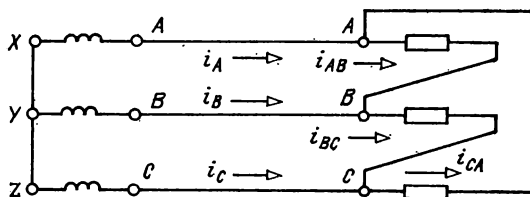


Рис. 14.21. Соединение обмоток генератора звездой и приемников треугольником

эти гармоники отсутствуют. Нет их и в линейных токах  $i_A = i_{AB} - i_{CA}$ ,  $i_B = i_{BC} - i_{AB}$ ,  $i_C = i_{CA} - i_{BC}$ .

Действующее значение линейного тока при равномерной нагрузке фаз

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3} \sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_{11}^2 + \dots} \quad (14.52)$$

Действующее значение фазного тока в обмотках генератора, где протекают и токи гармоник, кратных трем,

$$I_{\phi} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_9^2 + I_{11}^2 + \dots} \quad (14.53)$$

Отношение линейного тока к фазному току генератора при равномерной нагрузке

$$I_{\text{л}}/I_{\phi} < \sqrt{3}.$$

При соединении обмоток генератора звездой, как уже



было показано, линейное напряжение не содержит гармоник, кратных трем. Нет их и в токах приемников, соединенных треугольником (рис. 14.21), а значит, и в линейных токах.

При соединении обмоток генератора звездой и одинаковых приемников энергии звездой линейные и равные им фазные токи в отсутствие нейтрального провода не могут содержать гармоник, кратных трем, так как должно быть  $i_A + i_B + i_C = 0$ . Но между нейтральными точками генератора и приемников напряжение смещения нейтрали равно не нулю, а  $U_N = \sqrt{E_3^2 + E_9^2 + \dots}$

В четырехпроводной трехфазной системе (рис. 14.22) при симметричных синусоидальных фазных ЭДС и равномерной

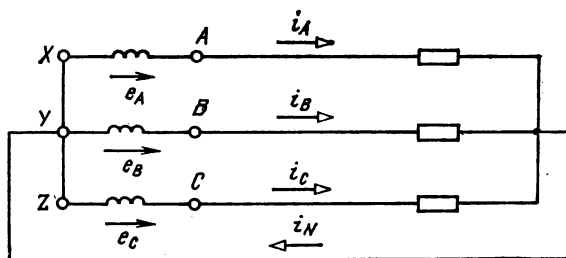


Рис. 14.22. Соединение обмоток генератора и приемников звездой с нейтральным проводом

нагрузке ток в нейтральном проводе  $I_N$ , как известно, равен нулю. При несинусоидальных фазных ЭДС гармоники, не кратные трем, не дают при равномерной нагрузке тока в нейтральном проводе, так как сдвинуты по фазе относительно друг друга на равные углы  $120^\circ$ . Третьи гармоники ЭДС совпадают по фазе, значит, и токи в фазах  $A$ ,  $B$  и  $C$  совпадают между собой по фазе; поэтому ток в нейтральном проводе равен сумме трех третьих гармоник фазных токов:  $I_N = 3I_3$ , причем

$$I_3 = E_3/z_3,$$

где  $z_3$  — суммарное сопротивление приемника и обмотки генератора для тока третьей гармоники.

Если фазные ЭДС, кроме третьей гармоники, содержат гармоники, кратные трем, т. е. 9, 15, 21-ю и т. д., то для них

можно сделать аналогичный вывод. В этом случае действующее значение тока в нейтральном проводе

$$I_N = 3 \sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \dots} \quad (14.54)$$

## **Глава пятнадцатая**

### **НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА**

#### **15.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ**

Значительное число нелинейных элементов было рассмотрено в гл. 3, 4, 6. К ним относятся нелинейные резистивные элементы, нелинейные элементы с индуктивным сопротивлением (например, катушки со стальными сердечниками) и нелинейные элементы с емкостным сопротивлением (например, конденсаторы с сегнетоэлектриками). Одни из них относятся к неуправляемым, например лампы накаливания, двухэлектродные электронные лампы, полупроводниковые диоды, другие, наоборот, к управляемым: трехэлектродные электронные лампы, тиратроны, полупроводниковые триоды, магнитные усилители. Управляемые нелинейные элементы обычно имеют управляющие электроды или обмотки, предназначенные для включения в цепь управления.

В общем случае характеристики нелинейных элементов для мгновенных значений величин отличаются от полученных при постоянных токах, напряжениях, зарядах и магнитных потоках (гл. 3). В этой главе рассматривается работа электротехнических устройств с нелинейными элементами (диоды и другие резистивные элементы, катушки, конденсаторы), у которых вольт-амперные, кулон-вольтные и вебер-амперные характеристики для мгновенных значений  $i(u)$ ,  $q(u)$  и  $\Phi(i)$  практически совпадают соответственно с характеристиками, полученными при постоянных токах, напряжениях, зарядах и магнитных потоках  $I(U)$ ,  $Q(U)$  и  $\Phi(I)$ . Такие элементы называются **безынерционными**.

Широкое внедрение нелинейных элементов объясняется тем, что их применение связано с получением и использованием таких явлений, которые нельзя получить в линейных цепях, например выпрямление переменного тока в постоянный или обратное преобразование, стабилизация напряжения, умножение и деление частоты, преобразование и получение сигналов различной формы и т. д. Быстро развиваю-

щаяся нелинейная электротехника весьма обширна и становится самостоятельной областью электротехники.

В этой главе рассмотрены некоторые важные примеры исследования нелинейных цепей переменного тока.

## 15.2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ С РЕЗИСТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Выпрямление переменного тока, т. е. преобразование его в постоянный (пульсирующий) ток, производится при помощи нелинейных резистивных элементов, которые обладают весьма малым сопротивлением в прямом и весьма малой проводимостью в обратном направлении. Устройство таких нелинейных элементов с резко несимметричной вольт-амперной характеристикой, называемых в выпрямителях *вентильми*, было рассмотрено в гл. 3. К ним относятся электронные лампы, газотроны, тиратроны, германиевые, кремниевые и другие полупроводниковые диоды и триоды (см. гл. 3).

Вольт-амперные характеристики диода — двухэлектродной электронной лампы и полупроводникового диода были показаны на рис. 3.3 и 3.17, *в*. Диод, у которого можно пренебречь обратным током и падением напряжения в прямом направлении, следует считать *идеальным вентилем*. Сопротивление идеального вентиля в прямом направлении ( $r_v$ ) равно нулю, а в обратном ( $r_{обp}$ ) — бесконечно велико. Вольт-амперная характеристика идеального вентиля, показанная на рис. 15.1, представляет собой отрезок ( $Oa$ ) положительной полуоси тока и отрезок ( $Ob$ ) отрицательной полуоси напряжения. Заменой реальной характеристики вентиля отрезками прямых (кусочно-линейная аппроксимация), в частности характеристикой идеального вентиля, широко пользуются, чтобы упростить расчет режима цепи с вентилями. На рис. 15.2, *а* и 15.3, *а* даны еще две кусочно-линейные аппроксимации (отрезками  $бО$ ;  $Oa$  и  $бO_1$ ;  $O_1a$ ). Первой из них соответствует схема замещения, состоящая из идеального вентиля и последовательно присоединенного резистора с сопротивлением  $r_v$  (рис. 15.2, *б*), а второй — идеального вентиля и источника постоянной ЭДС  $E = U_v$  (рис. 15.3, *б*).

**в) Однополупериодный выпрямитель.** При подключении идеального вентиля ( $r_v = 0$ ), соединенного последовательно с приемником, активное сопротивление которого  $r$  (рис. 15.4, *а*), к источнику синусоидального напряжения  $u =$

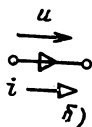
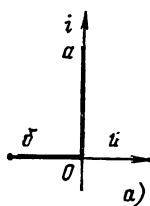


Рис. 15.1. Вольт-амперная характеристика (а) идеального вентиля (б)

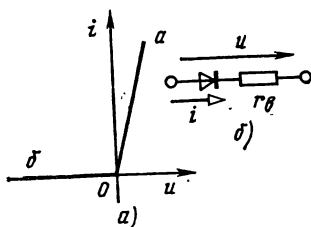


Рис. 15.2. Вольт-амперная характеристика вентиля (а) и его схема замещения (б)

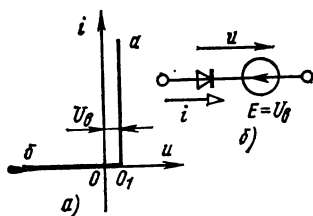


Рис. 15.3. Вольт-амперная характеристика вентиля (а) и его схема замещения (б)

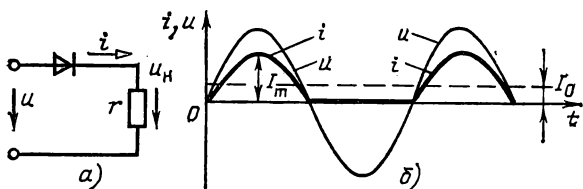


Рис. 15.4. Идеальный вентиль, соединенный последовательно с приемником, сопротивление которого  $r$  (а); график напряжения и тока цепи (б)

$= U_m \sin \omega t$  в течение положительного полупериода ( $u > 0$ ) ток в цепи

$$i = \frac{u}{r_{\text{в}} + r} = \frac{u}{r} = \frac{U_m \sin \omega t}{r} = I_m \sin \omega t.$$

В течение отрицательного полупериода напряжения ( $u < 0$ ) тока в цепи нет, так как  $r_{\text{обр}} = \infty$ :

$$i = u / (r_{\text{обр}} + r) = 0.$$

Таким образом, в цепи проходит одна полуволна синусоидального тока (рис. 15.4, б).

В течение положительного полупериода напряжение на приемнике  $u_n = ri$  равно напряжению источника питания  $u$ , а падение напряжения на вентиле равно нулю, так как он считается идеальным ( $r_v = 0$ ). В течение отрицательного полупериода напряжение на приемнике равно нулю, так как  $i = 0$ , и падение напряжения на вентиле равно напряжению  $u$  источника питания. Таким образом, кривая напряжения на приемнике повторяет по форме кривую тока.

Полученная кривая однополупериодного выпрямленного тока (рис. 15.4, б) может быть записана в виде ряда (14.18). При этом постоянная составляющая тока, равная его среднему значению,

$$I_0 = I_{cp} = I_m / \pi. \quad (15.1)$$

Существенным недостатком однополупериодного выпрямления является значительная пульсация тока, т. е. большая переменная составляющая выпрямленного тока. Как видно из (14.18), наибольшая амплитуда у первой гармоники тока  $I_m/2$ .

При однополупериодном выпрямлении действующее значение тока

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} i^2 dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^{T/2} \sin^2 \omega t dt} = \\ &= \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \frac{T}{4}} = I_m / 2. \end{aligned}$$

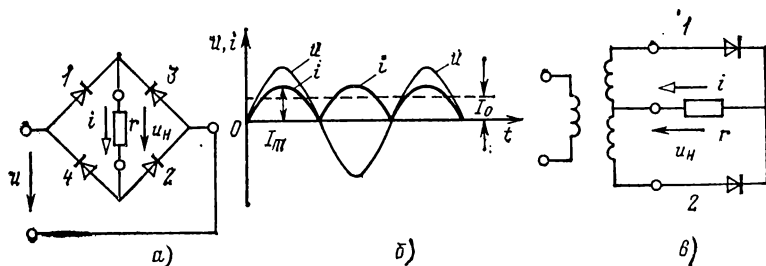


Рис. 15.5. Мостовая схема выпрямителя (а); график напряжения питания и тока приемника (б); двухполупериодная схема выпрямителя с трансформатором (в)

Для уменьшения пульсаций применяется сглаживающий низкочастотный фильтр (рис. 14.16, а).

**б) Двухполупериодные выпрямители.** В мостовой схеме из четырех вентилях (рис. 15.5, а) получается двухполупериодный выпрямленный ток  $i$  (рис. 15.5, б).

При синусоидальном напряжении источника  $u = U_m \sin \omega t$  ток в течение первого полупериода  $u > 0$  проходит через первый вентиль, приемник и второй вентиль, а в течение второго полупериода ( $u < 0$ , т. е. полярность напряжения обратна) через третий вентиль, приемник и четвертый вентиль. При идеальных вентилях ток в течение первого полупериода

$$i = \frac{u}{2r_B + r} = \frac{u}{r} = \frac{U_m \sin \omega t}{r} = I_m \sin \omega t.$$

В течение второго полупериода ток в приемнике имеет такое же направление и такую же форму, как и в первом полупериоде (рис. 15.5, б).

Кривая напряжения на приемнике  $u_n = ri$  подобна кривой тока.

Ток может быть записан в виде ряда (14.19); при этом его постоянная составляющая

$$I_0 = I_{cp} = 2I_m/\pi, \quad (15.2)$$

т. е. в 2 раза больше, чем при однополупериодном выпрямлении.

На рис. 15.5, в показана схема двухполупериодного выпрямителя с трансформатором, имеющим вывод от средней точки вторичной обмотки. В течение одного полупериода напряжения на вторичной обмотке трансформатора ток проходит через первый вентиль и приемник, в течение второго полупериода — через второй вентиль и приемник. Поэтому ток каждого вентиля такой же, как в однополупериодном выпрямителе, а ток приемника такой же, как в мостовой схеме. Трансформатор дает возможность изменить амплитуду напряжения питания вентилях и приемника, а следовательно, максимальное  $I_m$  и среднее  $I_0$  значения выпрямленного тока.

**в) Трехфазный выпрямитель.** На рис. 15.6, а дана схема трехфазного выпрямителя. Через каждый из вентилях ток проходит только в течение той третьей части периода, когда напряжение на соответствующей вторичной обмотке трехфазного трансформатора выше напряжений на двух других обмотках (рис. 15.6, б).

Напряжение  $u_n$  на сопротивлении приемника  $r$  равно

наибольшему фазному напряжению (рис. 15.6, б), а ток  $i = u_n / r$ , т.е. кривая тока подобна кривой напряжения на приемнике.

Кривая тока может быть записана в виде ряда (14.20), причем постоянная составляющая

$$I_0 = I_{cp} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} I_m. \quad (15.3)$$

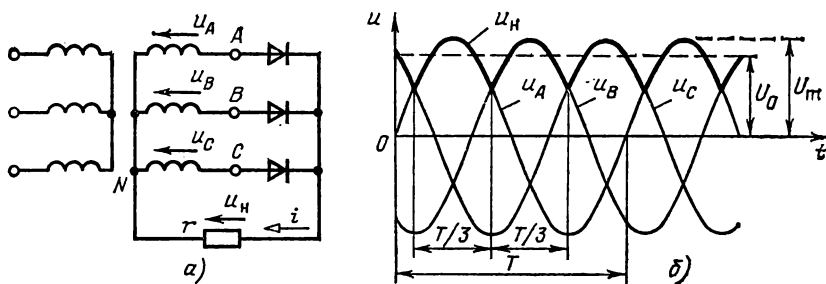


Рис. 15.6. Схема трехфазного выпрямителя (а) и график напряжений (б)

г) **Графическое построение тока.** Для резистивного нелинейного элемента, например диода, с заданной вольт-амперной характеристикой  $i(u)$  (рис. 15.7) при заданном си-

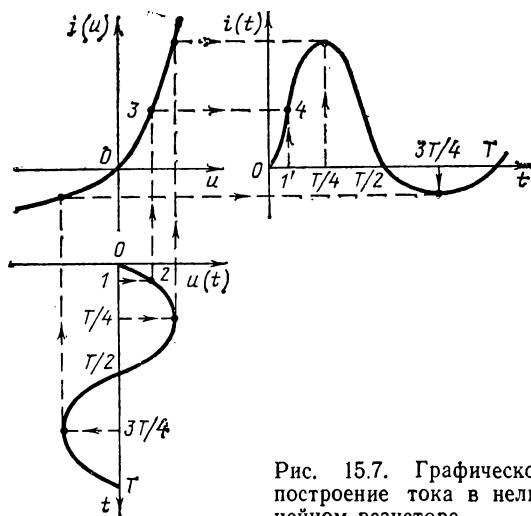


Рис. 15.7. Графическое построение тока в нелинейном резисторе

нусоидальном напряжении  $u = u(t) = U_m \sin \omega t$  зависимость  $i(t)$  можно построить по точкам.

Для произвольного момента времени, отмеченного точкой 1 на оси абсцисс синусоиды  $u(t)$ , находим значение напряжения (точка 2 на синусоиде) и при том же напряжении по вольт-амперной характеристике определяем ток  $i$  (точка 3). Для того же момента времени на оси абсцисс искомой зависимости тока от времени (точка 1') отмечаем полученное значение тока (точка 4). Такое же построение на рис. 15.7 выполнено при  $t = T/4$  и  $t = 3T/4$ . При  $t = T/2, T, 3T/2...$  напряжение равно нулю и поэтому ток равен нулю.

Так как вольт-амперная характеристика несимметричная, то полученная кривая  $i(t)$  не имеет симметрии относительно оси абсцисс. Разложение в ряд Фурье (определение спектрального состава) выполняется по формулам (14.21) — (14.25).

Если последовательно с резистивным нелинейным элементом включен другой элемент, линейный или нелинейный, то сначала надо получить общую вольт-амперную характеристику последовательного соединения элементов. Графический метод построения общей характеристики был показан в § 3.5 (рис. 3.21).

Зависимость тока от времени в каждой схеме выпрямления также можно построить графически. Однако в случае идеальных вентилях-диодов форму кривой тока, как было показано, определяет только принцип работы выпрямителя (однофазный, двухфазный, трехфазный), поэтому кривые токов на рис. 15.4, б и 15.5, б получены без графических построений.

д) **Общий случай аналитического расчета.** Если вольт-амперную характеристику нелинейного резистивного элемента можно с допустимой погрешностью аппроксимировать достаточно простой функцией  $i = f(u)$ , то при заданном синусоидальном напряжении (или напряжении другой формы) зависимость  $i(t)$  определяется аналитически (без построения графиков). Предположим, например, что вольт-амперная характеристика представлена полиномом

$$i = k_1 u + k_2 u^2 + k_3 u^3,$$

где значения коэффициентов  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  известны. При синусоидальном напряжении  $u = U_m \sin \omega t$  ток

$$i = k_1 U_m \sin \omega t + k_2 U_m^2 \sin^2 \omega t + k_3 U_m^3 \sin^3 \omega t = k_1 U_m \sin \omega t +$$



$$+ \frac{k_2 U_m^2}{2} - \frac{k_2 U_m^2}{2} \cos 2\omega t + \frac{3k_3 U_m^3}{4} \sin \omega t - \frac{k_3 U_m^3}{4} \sin 3\omega t,$$

где учтено, что  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$  и  $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$ .

Полученное решение показывает, что нелинейный элемент преобразует синусоидальное напряжение в несинусоидальный ток, который, кроме первой гармоники с частотой  $\omega$ , содержит постоянную составляющую, вторую гармонику с частотой  $2\omega$  и третью гармонику с частотой  $3\omega$ .

Действующее значение этого тока согласно (14.276)

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2},$$

$$\text{где } I_0 = k_2 U_m^2 / 2; \quad I_1 = (k_1 U_m + 3k_3 U_m^3 / 4) / \sqrt{2};$$

$$I_2 = \frac{k_2 U_m^2}{2} / \sqrt{2}; \quad I_3 = \frac{k_3 U_m^3}{4} / \sqrt{2}.$$

### 15.3. КАТУШКИ СО СТАЛЬНЫМ МАГНИТОПРОВОДОМ

Катушка со стальным магнитопроводом относится к наиболее распространенным нелинейным элементам электрических машин, трансформаторов, аппаратов, приборов.

При переменном токе  $i$  в витках  $w$  катушки с магнитопроводом из магнитно-мягкого материала (рис. 15.8, а) намагничивание и размагничивание происходит по одной и той же кривой, так как восходящие и нисходящие ветви гистерезисного цикла практически совпадают (рис. 15.8, б) с основной кривой намагничивания.

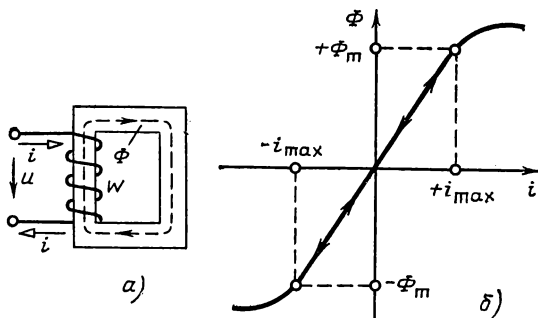


Рис. 15.8. Катушка с замкнутым стальным магнитопроводом (а) и кривая намагничивания при отсутствии гистерезиса (б)

Если при работе катушки магнитопровод ее не насыщается, то при синусоидальном токе магнитный поток и напряжение на катушке также будут синусоидальными, и расчет цепи не отличается от расчета цепи при отсутствии стального магнитопровода.

Если при работе цепи индукция в магнитопроводе достигает значений, лежащих за коленом кривой намагничивания, то зависимость между магнитным потоком и током будет нелинейной и эквивалентная индуктивность катушки определяется максимальным значением тока. В этом случае нельзя пользоваться формулами, выведенными для цепи с неизменной индуктивностью.

**а) Построение кривой тока при заданном напряжении (потоке).** Для построения кривой тока допустим, что магнитный поток катушки со стальным магнитопроводом изменяется синусоидально:

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t.$$

При отсутствии потока рассеяния ЭДС индукции, наводимая этим потоком в обмотке,

$$e_L = -\omega \frac{d\Phi}{dt} = -\omega \Phi_m \cos \omega t = E_m \sin(\omega t - \pi/2), \quad (15.4a)$$

т. е. отстает по фазе от магнитного потока на угол  $\pi/2$ .

В комплексной форме

$$\underline{E}_m = -j\omega \Phi_m = -j2\pi f \omega \Phi_m$$

и

$$\underline{E} = \underline{E}_m / \sqrt{2} = -j 4,44 f \omega \Phi_m, \quad (15.4b)$$

где  $-j = e^{-j\pi/2}$  (§ 10.1) показывает отставание по фазе на  $90^\circ$ .

Если можно пренебречь потерями в обмотке и магнитопроводе катушки (из-за вихревых токов и гистерезиса), то напряжение на ее выводах равно по абсолютному значению и противоположно по знаку ЭДС самоиндукции:

$$u = -e_L = E_m \sin(\omega t + \pi/2) = U_m \sin(\omega t + \pi/2). \quad (15.5a)$$

В комплексной форме

$$\underline{U} = -\underline{E} = j 4,44 f \omega \Phi_m, \quad (15.5b)$$

т. е. напряжение опережает по фазе магнитный поток на угол  $90^\circ$ .

Таким образом, в катушке, у которой можно пренебречь потерями и потоком рассеяния, *синусоидальный магнитный*

поток получается при синусоидальном напряжении на выводах катушки.

Из (15.56) амплитуда магнитного потока

$$\Phi_m = U/(4,44f\omega). \quad (15.6)$$

По кривой  $\Phi(t) = \Phi_m \sin \omega t$  и вебер-амперной характеристике  $\Phi(i)$ , подобной кривой намагничивания  $B(H)$ , так как  $\Phi = BS$  и  $i = Hl/\omega$ , можно по точкам построить кривую намагничивающего тока  $i(t)$  катушки (рис. 15.9, а). Для

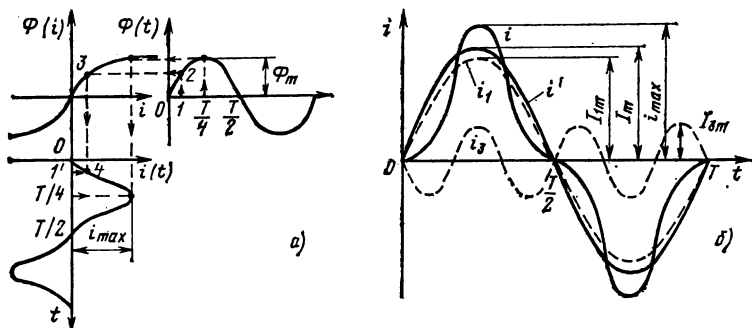


Рис. 15.9. Графическое построение тока в катушке без потерь (а) и эквивалентная синусоида тока (б)

произвольного момента времени (точка 1) по кривой  $\Phi(t)$  находим значение магнитного потока (точка 2), которое отмечаем на вебер-амперной характеристике (точка 3). Для того же момента времени на оси абсцисс искомой зависимости тока от времени (точка 1') отмечаем точку 4 кривой тока  $i(t)$ , которая строится. После аналогичных построений для различных моментов времени получаем искомую зависимость  $i(t)$ . Кривая тока несинусоидальная, но симметричная относительно оси абсцисс. Ток и магнитный поток одновременно достигают максимальных значений  $\Phi_m$  и  $i_{max}$  и одновременно проходят через нулевые значения. Это значит, что первая гармоника тока совпадает по фазе с магнитным потоком. Из сравнения полученной кривой тока с кривой на рис. 14.2 следует, что она содержит еще явно выраженную третью гармонику (рис. 15.9, б). При большом насыщении магнитопровода кривая тока, кроме того, будет содержать пямую, седьмую и другие нечетные высшие гармоники.

При отсутствии потерь в обмотке и в стальном магнитопроводе энергия, затраченная при намагничивании магни-

топровода, равна энергии, возвращаемой в цепь питания при размагничивании, и активная мощность цепи равна нулю. Это подтверждается и тем, что активная мощность несинусоидального тока, равная сумме мощностей гармоник,

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + U_5 I_5 \cos \varphi_5 + \dots = 0; \quad (15.7)$$

первое слагаемое равно нулю, так как напряжение  $U_1 = U$  (синусоидальное) опережает по фазе поток на угол  $\pi/2$ , а первая гармоника тока совпадает по фазе с потоком, т. е.  $\varphi_1 = \pi/2$ : второе слагаемое равно нулю, так как напряжение питания синусоидальное, т. е.  $U_3 = 0$ , и то же для следующих высших гармоник.

**б) Эквивалентная синусоида тока.** При расчете цепи со стальным магнитопроводом несинусоидальный намагничивающий ток  $i$  часто заменяют эквивалентным синусоидальным  $i' = I_m \sin \omega t$  (рис. 15.9, б), который должен иметь то же действующее значение, что и несинусоидальный (§ 14.7). В этом случае для цепи можно построить векторную диаграмму (рис. 15.10), где и показано, что ЭДС  $\underline{E}$  отстает по

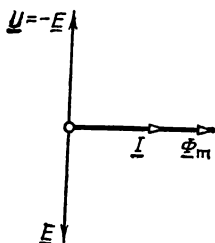


Рис. 15.10. Векторная диаграмма катушки без потерь

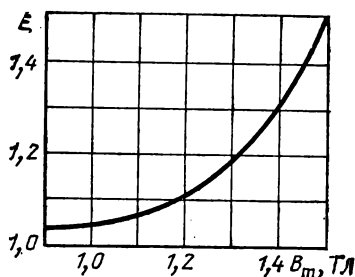


Рис. 15.11. Зависимость поправочного коэффициента от максимального значения индукции

фазе от магнитного потока на угол  $90^\circ$ , а напряжение  $\underline{U}$  опережает по фазе магнитный поток на такой же угол. Необходимая для построения диаграммы амплитуда магнитного потока определяется по (15.6).

Магнитная индукция

$$B_m = \Phi_m / S = U / (4,44 f \omega S), \quad (15.8)$$

где  $S$  — сечение магнитопровода.

По кривой намагничивания (рис. 6.6) можно найти максимальную напряженность поля  $H_{max}$ , а затем и максималь-

ное значение намагничивающего тока

$$i_{max} = H_{max} l/\omega, \quad (15.9)$$

где  $l$  — длина средней магнитной линии.

Если значение  $\Phi_m$  найдено (15.6), то ток  $i_{max}$  можно определить и непосредственно по кривой зависимости  $\Phi(i)$  на рис. 15.8.

Для вычисления действующего значения тока максимальное значение тока нужно разделить на коэффициент амплитуды (14.31):

$$I = i_{max}/d_a = H_{max} l/(d_a w). \quad (15.10)$$

Амплитуда эквивалентной синусоиды тока  $I'_m = \sqrt{2} I$ .

Для кривых тока, симметричных относительно оси абсцисс (рис. 15.8), коэффициент амплитуды иногда выражают в виде произведения двух множителей

$$d_a = i_{max}/l = \sqrt{2}\xi, \quad (15.11)$$

где  $\xi$  — поправочный коэффициент, зависящий от формы кривой тока, которая в свою очередь зависит от  $B_m$ .

Значение коэффициента  $\xi$  для электротехнической стали при индукции не превосходящей  $B_m \approx 0,8$  Тл, принимается равным единице. В этом случае  $I'_m = i_{max}$ . При больших зна-

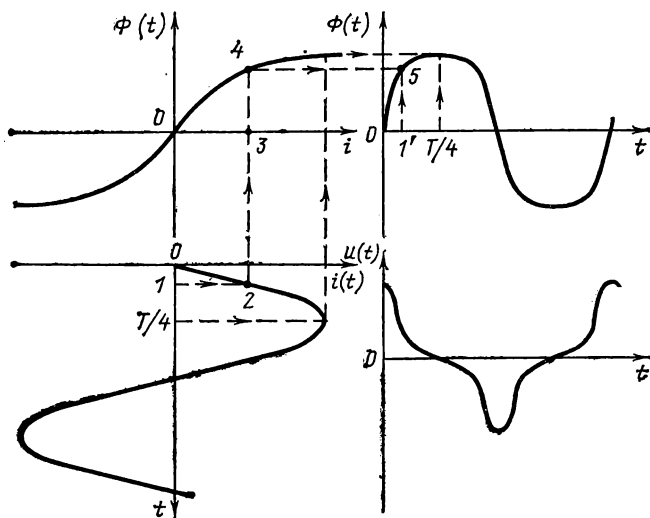


Рис. 15.12. Графическое построение потока и напряжения для нелинейной катушки без потерь

чениях магнитной индукции этот коэффициент можно найти по графику рис. 15.11.

**в) Построение потока и напряжения при заданном токе.** Если задано не напряжение, а синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega t$ , например, при питании от источника тока, то магнитный поток и напряжение получаются несинусоидальными. Построение зависимости от времени потока  $\Phi(t)$  выполнено на рис. 15.12. Кривая  $\Phi(t)$  симметрична относительно оси абсцисс и поэтому не имеет постоянной составляющей и четных гармоник. Она имеет тупую форму и содержит, кроме основной, прежде всего третью гармонику, как и кривая на рис. 14.1. В любой момент времени  $t$  напряжение  $u = \omega d\Phi/dt$ , т. е. пропорционально тангенсу угла наклона касательной к кривой  $\Phi(t)$ . Наибольший угол наклона касательной получается в моменты  $t = 0, T/2, T \dots$  (рис. 15.12). В моменты  $t = T/4, 3T/4 \dots$  угол наклона равен нулю, поэтому и  $u = 0$ . Из рис. 15.12 видно, что напряжение имеет острую форму подобно кривой на рис. 14.2.

#### 15.4. ВЛИЯНИЕ ГИСТЕРЕЗИСА НА РЕЖИМ КАТУШКИ СО СТАЛЬНЫМ МАГНИТОПРОВОДОМ

**а) Построение кривой тока при заданном напряжении.** Кривая тока на рис. 15.9 построена без учета гистерезиса. В действительности процесс намагничивания и размагничивания происходит по несовпадающим ветвям петли гистерезиса.

При синусоидальном напряжении на выводах катушки ЭДС и магнитный поток также синусоидальные (если пренебречь активным сопротивлением обмотки, потоком рассеяния и вихревыми токами), причем при заданной амплитуде  $U_m$  напряжения питания амплитуда потока  $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$  определяется по (15.6).

Кривую несинусоидального тока  $i(t)$  можно построить по кривой потока  $\Phi(t)$  и петле гистерезиса  $\Phi(i)$  по точкам, как и на рис. 15.9. На рис. 15.13 приведено такое построение, причем ординаты кривой тока для первой четверти периода определяются по абсциссам восходящей ветви петли гистерезиса (лежащей между точками  $a$  и  $b$ ), для второй четверти периода — по абсциссам нисходящей ветви петли гистерезиса (лежащей между точками  $b$  и  $c$ ) и т. д. Из рис. 15.13 видно, что ток и магнитный поток одновременно достигают своих максимальных значений, а нулевых значений магнитный поток достигает позже, чем ток.

**б) Вольт-амперная характеристика.** Каждому действующему значению напряжения  $U$  на выводах катушки со стальным магнитопроводом соответствует вполне определенное максимальное значение магнитной индукции (15.8),

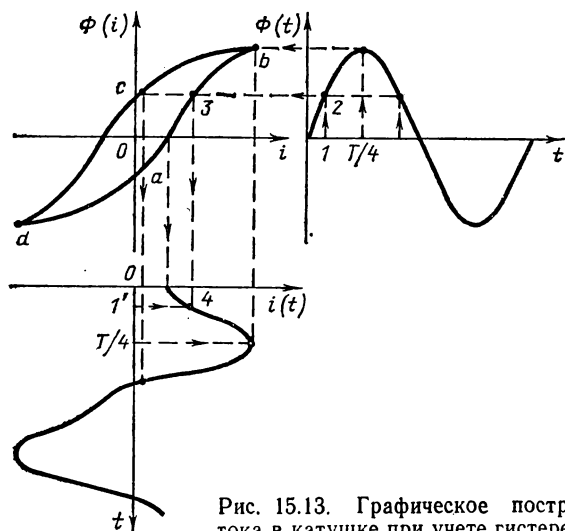


Рис. 15.13. Графическое построение тока в катушке при учете гистерезиса

т. е. определенная максимальная ордината петли гистерезиса, по которой при данном напряжении происходит циклическое перемагничивание. Например, напряжению  $U_A$  соответствует максимальная индукция  $B_{mA}$  и петля  $AA'$  (рис. 15.14, а), напряжению  $U_B$  — петля  $BB'$  и т. д. Вершины петель или максимальные ординаты  $A, B, B, \Gamma$  и т. д. лежат на основной кривой намагничивания; поэтому она выражает зависимость между наибольшими значениями магнитной индукции и напряженности магнитного поля  $B_{max}(H_{max})$ , как показано на рис. 15.14, б.

Так как наибольшее значение напряженности поля пропорционально максимальному значению тока (15.9), то основная кривая намагничивания при других масштабах по осям абсцисс и ординат выражает примерную зависимость действующего значения напряжения на выводах катушки от действующего значения тока в ней. Откладывая напряжение по оси абсцисс, а ток по оси ординат (рис. 15.15), получаем вольт-амперную характеристику  $I(U)$  катушки со стальным магнитопроводом.

При небольших напряжениях магнитопровод не насыщен и зависимость между током  $I$  и напряжением  $U$  близка к линейной (участок кривой  $OA$ ), при больших напряжениях зависимость между  $I$  и  $U$  резко отличается от линейной. Например, если катушку (или ненагруженный транс-

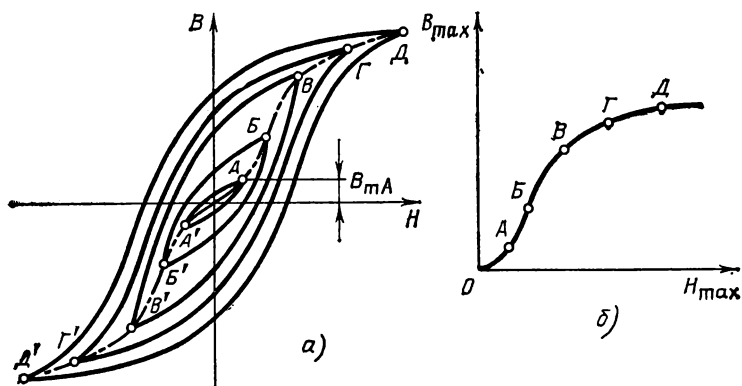


Рис. 15.14. Гистерезисные петли (а) и основная кривая намагничивания (б)

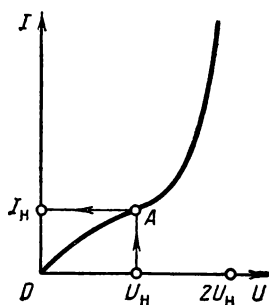


Рис. 15.15. Вольт-амперная характеристика катушки со стальным магнитопроводом

форматор) с номинальным напряжением  $U_n$  включить на удвоенное напряжение  $2U_n$  (рис. 15.15), то ток в катушке может превысить номинальный  $I_n$  в десятки раз, что, конечно, недопустимо.

## 15.5. МОЩНОСТЬ ПОТЕРЬ В МАГНИТОПРОВОДЕ

а) Потери от гистерезиса. На рис. 15.16 еще раз построены кривые потока  $\Phi$  и тока  $i$ , а также напряжения  $u$  и мгновенной мощности  $p=ui$  для катушки со стальным магнитопроводом.



Активная или средняя мощность по определению

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T ui dt;$$

она равна средней ординате кривой мгновенной мощности.

Площадь, ограниченная положительной частью кривой мгновенной мощности и осью абсцисс, изображает энергию,

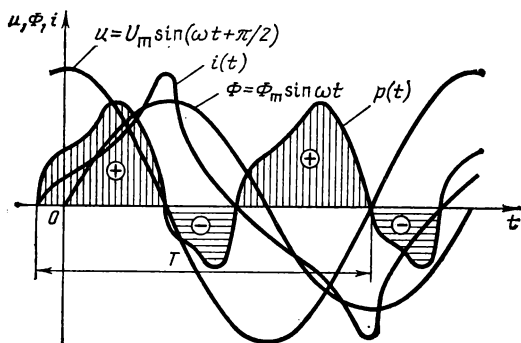


Рис. 15.16. График напряжения, магнитного потока, тока и мощности

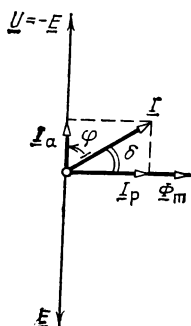


Рис. 15.17. Векторная диаграмма катушки со стальным магнитопроводом с учетом потерь в стали

полученную от источника питания при намагничивании; площадь, ограниченная отрицательной частью кривой и осью абсцисс, изображает энергию, возвращаемую при размагничивании. Площадь, ограниченная кривой мгновенной мощности и осью абсцисс в течение периода  $T$ , изображает электрическую энергию, которая преобразуется в магнитопроводе в тепло при одном цикле перемагничивания. Можно показать, что эта площадь пропорциональна площади петли гистерезиса.

Мощность потерь от гистерезиса при перемагничивании стали обычно рассчитывается по эмпирическим формулам, например:

$$P_{\Gamma} = \sigma_{\Gamma} f B_m^n G, \quad (15.12)$$

где  $\sigma_{\Gamma}$  — коэффициент гистерезиса, зависящий от сорта стали;  $f$  — частота;  $B_m$  — максимальная индукция;  $n$  — показа-

тель степени,  $n=1,6$  при  $B_m < 1$  Тл и  $n=2$  при  $B_m > 1$  Тл;  $G$  — масса сердечника.

**б) Потери от вихревых токов.** При изменении магнитного потока, пронизывающего стальной магнитопровод, в нем индуктируются вихревые токи, замыкающиеся в плоскостях, перпендикулярных магнитным линиям.

Вихревые токи вызывают нагрев стали и оказывают размагничивающее действие, создавая МДС, направленную против основной МДС катушки (по правилу Ленца).

Для увеличения сопротивления магнитопровода вихревым токам, а следовательно, для уменьшения этих токов и потерь от них стальные магнитопроводы набирают из изолированных друг от друга листов стали толщиной 0,35—0,5 мм при частоте тока 50 Гц, а при более высоких частотах из еще более тонких листов или лент.

Мощность потерь от вихревых токов рассчитывается по эмпирическим формулам, например:

$$P_v = \sigma_v f^2 B_m^2 G, \quad (15.13)$$

где  $\sigma_v$  — коэффициент, зависящий от сорта стали и толщины листов.

**в) Потери в стали.** Потери в магнитопроводе от гистерезиса и вихревых токов называются потерями в стали:

$$P_{ст} = P_r + P_v. \quad (15.14)$$

Для оценки потерь в стали при частоте 50 Гц часто пользуются формулой удельных потерь

$$p_{ст} = p_{1,0} (B_m)^n (f/50)^{1,3}, \quad (15.15)$$

где  $n=5,69 \lg (p_{1,5}/p_{1,0})$ ;  $p_{1,0}$  и  $p_{1,5}$  — удельные потери соответственно при  $B_m=1,0$  Тл и  $B_m=1,5$  Тл и  $f=50$  Гц (ГОСТ 21427.0-75).

**г) Эквивалентная синусоида тока.** Выше было указано, что при синусоидальном напряжении на выводах катушки со стальным магнитопроводом несинусоидальный ток может быть заменен эквивалентным синусоидальным. Для катушки с потерями в магнитопроводе эквивалентный ток должен быть сдвинут по фазе относительно напряжения на угол не  $\pi/2$ , а на угол  $\varphi$ , чтобы учесть потери в стали.

Обозначив, как и прежде, мгновенное значение эквивалентного тока  $i'$  можно написать

$$P = P_{ст} = \frac{1}{T} \int_0^T u i' dt = UI \cos \varphi, \quad (15.16)$$

где  $I$  — действующее значение тока, равное действующему значению эквивалентной синусоиды.

Из (15.16) определяем необходимый угол сдвига фаз:

$$\cos \varphi = P/UI. \quad (15.17)$$

Замена несинусоидального тока синусоидальным дает возможность построить векторную диаграмму (рис. 15.17). Эта диаграмма отличается от диаграммы катушки без потерь в магнитопроводе (рис. 15.10) тем, что вектор тока  $\underline{I}$  повернут относительно вектора напряжения  $\underline{U}$  на угол  $\varphi$  или относительно вектора магнитного потока  $\underline{\Phi}_m$  на угол потерь  $\delta$ .

Разложим ток  $\underline{I}$  на две составляющие: активную  $I_a = I \cos \varphi = I \sin \delta$ , совпадающую по фазе с напряжением  $\underline{U}$ , и реактивную — намагничивающую  $I_p = I \sin \varphi = I \cos \delta$ , совпадающую по фазе с магнитным потоком.

Первая из них обусловлена потерями в магнитопроводе, и так как

$$P = P_{сг} = UI \cos \varphi = UI \sin \delta = UI_a,$$

то

$$I_a = P_{сг}/U. \quad (15.18)$$

Из векторной диаграммы (рис. 15.17) следует, что ток и его составляющие связаны известным соотношением

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}.$$

Угол потерь  $\delta$  определяется из формулы

$$\operatorname{tg} \delta = I_a/I_p. \quad (15.19)$$

#### 15.6. ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА И СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ КАТУШКИ СО СТАЛЬНЫМ МАГНИТОПРОВОДОМ

а) Диаграмма катушки с учетом активного сопротивления обмотки. Если активным сопротивлением  $r$  обмотки нельзя пренебречь, то напряжение на выводах катушки состоит из двух слагающих. Одна из них  $u' = -e_L$ , т. е. равна по абсолютному значению и противоположна по знаку ЭДС, наводимой магнитным потоком  $\Phi$ , причем согласно (15.56)

$$U' = E = 4,44f\omega \Phi_m, \quad (15.20)$$

а другая  $u_a = ri$  — падение напряжения на активном сопротивлении. При синусоидальном напряжении источника пи-

тания  $u = u' + u_a$ , ток в цепи несинусоидальный, напряжение  $u_a$  также несинусоидальное, а значит, несинусоидальны ЭДС индукции и магнитный поток.

Векторная диаграмма такой катушки (рис. 15.18) для эквивалентных синусоид строится следующим образом.

В произвольном направлении, например горизонтально, откладываем вектор  $\Phi_m$ . Параллельно ему располагаем вектор  $I_p$ , а под углом  $90^\circ$  к нему — вектор  $I_a$ ; сумма этих векторов равна вектору тока  $I$  в обмотке катушки. Перпендикулярно вектору магнитного потока  $\Phi_m$  откладываем вектор индуцированной в катушке ЭДС  $\bar{E}$ , а в противоположную сторону — равный ему по длине вектор слагающей напряжения  $\bar{U}'$ , уравнивающей эту ЭДС. Складывая вектор активного падения напряжения  $\bar{U}_a = rI$ , параллельный току, со слагающей  $\bar{U}'$ , получаем вектор напряжения  $\bar{U}$  на выводах катушки.

**б) Диаграмма катушки с учетом магнитного потока рассеяния.** При всех расчетах и построениях ранее было принято, что весь магнитный поток замыкается в магнитопроводе. В действительности же только большая часть потока, называемая основным потоком  $\Phi$ , замыкается в магнитопроводе, а остальная незначительная часть потока — поток рассеяния  $\Phi_p$  — замыкается по воздуху (рис. 15.19).

Основной поток не пропорционален току (кривая намагничивания); при определении индуцированной им ЭДС необходимо исходить из формулы (15.46).

Основной поток вызывает потери в стали и сдвинут по фазе относительно тока на угол  $\delta$ . Поток рассеяния, замыкающийся через воздух, и потокосцепление рассеяния  $\Psi_p$  пропорциональны току  $i$ , а если заменить его эквивалентной синусоидой, — то току  $i'$ ; при определении индуцированной ЭДС можно пользоваться понятием индуктивности рассеяния  $L_p$ :

$$e_p = -L_p di'/dt, \quad (15.21a)$$

где индуктивность рассеяния

$$L_p = \Psi_p/i'. \quad (15.22)$$

В комплексной форме

$$\underline{E}_p = -jx_p \underline{I} = -j\omega L_p \underline{I}. \quad (15.216)$$

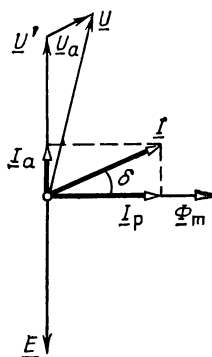


Рис. 15.18. Векторная диаграмма катушки со стальным магнитопроводом с учетом потерь в стали и активного сопротивления обмотки

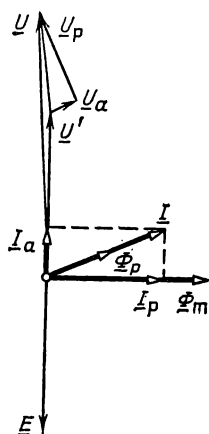


Рис. 15.20. Векторная диаграмма катушки со стальным магнитопроводом с учетом потока рассеяния

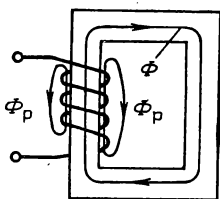


Рис. 15.19. Основной магнитный поток и поток рассеяния

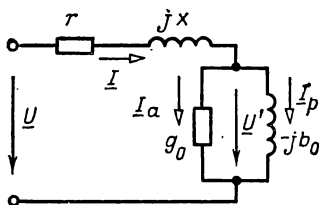


Рис. 15.21. Первая схема замещения катушки со стальным магнитопроводом

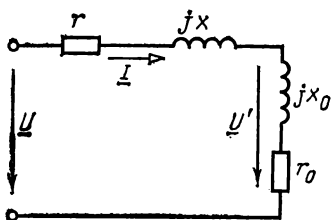


Рис. 15.22. Вторая схема замещения катушки со стальным магнитопроводом

Таким образом, с учетом потока рассеяния напряжение на выводах катушки можно представить состоящим из трех составляющих:

- 1) составляющей, компенсирующей ЭДС самоиндукции,

которая наводится основным потоком  $\underline{U}' = -\underline{E}$ , причем согласно (15.56)

$$U' = E = 4,44f\omega\Phi_m;$$

2) составляющей, компенсирующей ЭДС самоиндукции, которая наводится потоком рассеяния, и опережающей по фазе ток на  $90^\circ$ :

$$\underline{U}_p = -\underline{E}_p = j\omega L_p I; \quad (15.23)$$

3) активного падения напряжения, совпадающего по фазе с током,

$$\underline{U}_a = r I.$$

Следовательно, напряжение на выводах катушки

$$\underline{U} = \underline{U}' + \underline{U}_p + \underline{U}_a = (-\underline{E}) + (-\underline{E}_p) + \underline{U}_a.$$

Векторная диаграмма катушки дана на рис. 15.20.

в) **Схема замещения катушки.** При рассмотрении цепей, содержащих катушки со стальными магнитопроводами, последние часто заменяют схемами замещения, причем потери в стали представляют потерями в активном сопротивлении. Катушка и ее схема замещения при одинаковых напряжениях на выводах должны иметь одинаковые токи и мощности.

В первой схеме замещения (рис. 15.21) сопротивление  $r$  равно активному сопротивлению обмотки, сопротивление  $x = \omega L_p$  — реактивному сопротивлению индуктивности рассеяния. Реактивная проводимость  $b_0 = I_p/U'$  определяется реактивной составляющей тока  $I_p$ , а активная проводимость  $g_0 = I_a/U'$  — активной составляющей тока  $I_a$ , обусловленной потерями в стали. В последних двух формулах напряжение  $U'$  на разветвлении по абсолютному значению равно ЭДС  $\underline{E}$ , индуцируемой основным магнитным потоком.

Разветвленный участок цепи можно заменить неразветвленным и получить вторую схему замещения (рис. 15.22) с сопротивлениями  $r_0$  и  $x_0$ , причем

$$r_0 = P_{ct}/I^2, \text{ или } r_0 = g_0/(g_0^2 + b_0^2); \quad (15.24)$$

$$x_0 = \sqrt{(U'/I)^2 - r_0^2}, \text{ или } x_0 = b_0/(g_0^2 + b_0^2). \quad (15.25)$$

## 15.7. ФЕРРОРЕЗОНАНС

Допустим ради упрощения, что в цепи (рис. 15.23), состоящей из катушки со стальным магнитопроводом и конденсатора, несинусоидальные величины заменены эквива-

лентными синусоидами, а потерями в стали и активным сопротивлением обмотки можно пренебречь. Вольт-амперные характеристики нелинейной катушки  $U_L(I)$ , аналогичная показанной на рис. 15.15, и конденсатора с постоянной ем-

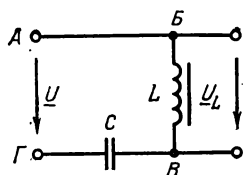
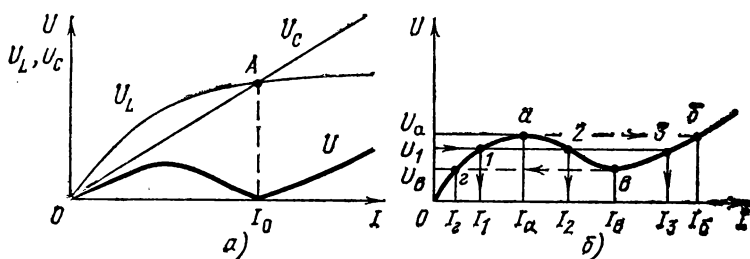


Рис. 15.23. Катушка со стальным магнитопроводом и конденсатор

Рис. 15.24. Вольт-амперные характеристики последовательного контура из конденсатора и катушки со стальным магнитопроводом без потерь (а) и с потерями (б)



костью  $U_C(I)$ , т.е. линейная зависимость, построены на рис. 15.24, а.

Напряжения на последовательно соединенных катушке  $U_L$  и конденсаторе  $U_C$  изменяются в противофазе, что показано на векторных диаграммах рис. 15.25. Поэтому суммарное напряжение на выводах цепи можно найти как абсолютное значение разности ординат характеристик  $U_L(I)$  и  $U_C(I)$ . Полученная кривая  $U(I)$  изображает вольт-амперную характеристику всей цепи  $U = |U_L - U_C| = U(I)$ .

Точка пересечения вольт-амперных характеристик (точка А на рис. 15.24, а) определяет режим, при котором  $U_L = U_C$ , а ток имеет значение  $I_0$ . Этот режим называют феррорезонансом напряжений. При  $U_L > U_C$  ток  $I < I_0$  и отстает по фазе от напряжений  $U$  на  $90^\circ$  (рис. 15.25, а), а при  $U_L < U_C$  ток  $I > I_0$  и опережает напряжение на  $90^\circ$  (рис. 15.25, б).

Из-за активного сопротивления обмотки, потерь в стали и несинусоидальности кривой тока у реальной вольт-амперной характеристики  $U(I)$  напряжение  $U$  при том же токе  $I$  на рис. 15.24, б больше, чем на рис. 15.24, а.

Из последней характеристики видно, что при одном

и том же напряжении  $U=U_1$  на выводах цепи возможны три значения тока:  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ . В двух первых случаях ток отстает по фазе от напряжения ( $U_L > U_C$ ), а в третьем — опережает его ( $U_L < U_C$ ). Такая неопределенность — несколько значений тока в цепи при одном и том же напряжении — может иметь место только в цепях с нелинейными характе-

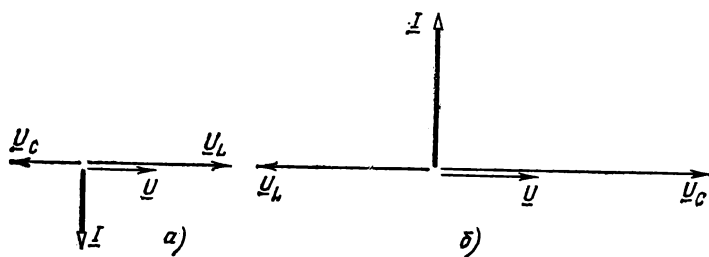


Рис. 15.25. Векторные диаграммы для различных режимов работы цепи по рис. 15.23

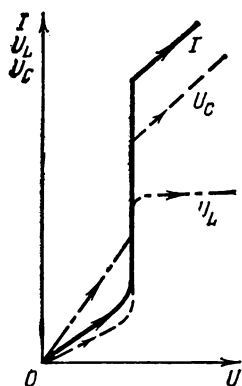


Рис. 15.26. Зависимости тока, напряжения на катушке и напряжения на конденсаторе от напряжения питания

ристиками. Режим работы цепи при токах  $I_1$  и  $I_3$  устойчив, так как на восходящих участках характеристики с увеличением напряжения  $U$  ток возрастает, а с уменьшением напряжения уменьшается. Наоборот, режим при токе  $I_2$  неустойчив, так как на спадающем участке вольт-амперной характеристики с уменьшением напряжения  $U$  ток растет, а с повышением напряжения падает; малейшее изменение напряжения вызовет переход от этого режима работы к первому или третьему.

Если постепенно увеличивать напряжение на выводах цепи от нуля до значения  $U_1$ , то ток увеличивается от нуля до значения  $I_1$ ; дальнейшее увеличение напряжения до зна-



чения, чуть большего  $U_a$ , приведет к скачку тока от значения  $I_a$  до значения  $I_0$ , после чего с увеличением напряжения ток продолжает нарастать плавно.

Если теперь уменьшать напряжение питания, то при напряжении  $U_1$  получим устойчивый режим работы с током  $I_3$ . При дальнейшем уменьшении напряжения питания ток плавно уменьшается, но когда напряжение достигнет значения, чуть меньшего  $U_0$ , получится скачок тока от значения  $I_0$  до значения  $I_2$ . Характерно, что при каждом скачке тока его фаза по отношению к напряжению питания  $U$  изменяется на  $180^\circ$  (рис. 15.25, *а* и *б*), поэтому это явление иногда называется опрокидыванием фазы.

На рис. 15.26 построены кривые тока, напряжения на катушке и напряжения на конденсаторе в зависимости от постепенно увеличивающегося напряжения на выводах цепи (обратные скачки при уменьшении напряжения на этом рисунке не показаны). Естественно, что одновременно со скачком тока происходит значительный скачок напряжения на конденсаторе, что может привести в установках высокого напряжения к перенапряжению, и скачок напряжения на катушки.

При скачке тока магнитопровод катушки насыщается, вследствие чего напряжение на выводах катушки остается далее почти неизменным даже при значительном изменении напряжения питания (рис. 15.26). Рассмотренное явление используется в феррорезонансных стабилизаторах напряжения (рис. 15.23), в которых значительное изменение действующего значения входного напряжения на выводах  $АГ$  вызывает лишь незначительное изменение действующего значения выходного напряжения на выводах  $БВ$ , к которым присоединяются приемники энергии.

## 15.8 УПРАВЛЯЕМЫЙ ДРОССЕЛЬ И МАГНИТНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ

Чтобы получить управляемый дроссель, на стальном магнитопроводе помещают две обмотки: рабочую с числом

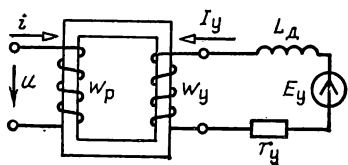


Рис. 15.27. Управляемый дроссель

витков  $w_p$  и обмотку управления или подмагничивания с числом витков  $w_y$  (рис. 15.27).

Рабочая обмотка подключается к источнику синусоидального напряжения  $u = U_m \sin(\omega t + \pi/2)$ , по ней проходит ток  $i$ . Амплитуда магнитного потока  $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$ , как следует из (15.6), пропорциональна действующему значению напряжения источника:

$$\Phi_m = U / (4,44 f w_p)$$

(его начальная фаза выбрана равной нулю).

При отсутствии подмагничивания и заданном напряжении  $u(t)$  и тем самым потоке  $\Phi(t)$  кривую тока  $i(t)$  можно построить так же, как на рис. 15.9 (потери в обмотке и стали и поток рассеяния не учитываются). При отсутствии насыщения ток практически синусоидальный (рис. 15.28, а).

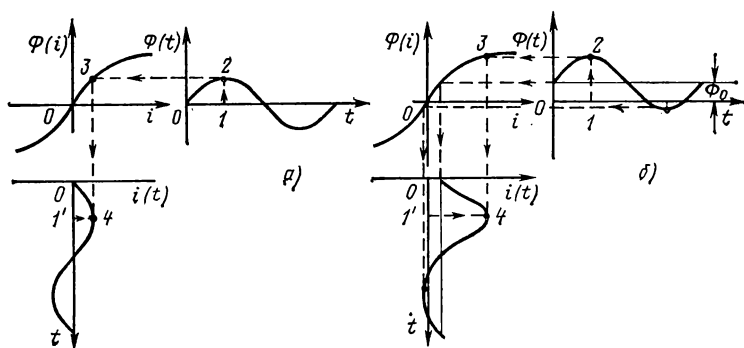


Рис. 15.28. Графическое построение тока в катушке без потерь без постоянного подмагничивания (а) и при постоянном подмагничивании (б)

При подключении обмотки подмагничивания, соединенной последовательно с реостатом  $r_y$ , и добавочной катушки с достаточно большой индуктивностью  $L_d$  к источнику питания с постоянной ЭДС  $E_y$  по ней проходит постоянный ток  $I_y = E_y / r_y$ . Катушка индуктивности  $L_d$  включается, чтобы наводимая в обмотке  $w_y$  переменным потоком ЭДС не вызывала переменный ток в цепи управления (индуктивное сопротивление  $x_L$  велико).

При прохождении тока  $I_y$  поток в магнитопроводе имеет некоторую постоянную составляющую  $\Phi_0$ , так что результирующий магнитный поток можно представить состоящим из двух составляющих:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_m \sin \omega t.$$

На рис. 15.28, б при  $\omega_p = \omega_y$  по результирующему магнитному потоку и кривой намагничивания  $\Phi(i)$ , как и на рис. 15.28, а, построена кривая тока в рабочей обмотке  $i(t)$ .

Из сравнения кривых рис. 15.28, а и б следует, что во втором случае максимумы тока (точка 4) могут быть значительно больше, чем в первом случае, и, кроме того, кривая тока может отличаться от синусоиды, если постоянная составляющая потока приводит к насыщению магнитопровода. Таким образом, увеличение постоянного тока в обмотке управления вызывает резкое увеличение тока в рабочей цепи, т. е. изменением постоянного тока можно управлять режимом в рабочей цепи. Это как раз и объясняется тем, что обмотка управления, подмагничивая магнитопровод, смещает рабочий участок кривой намагничивания в область насыщения, вызывая увеличение тока в рабочей цепи. Иначе говоря, подмагничивание постоянным током уменьшает эквивалентную индуктивность рабочей цепи и ее индуктивное сопротивление  $\omega L_{\text{эк}}$ .

Возможность управлять переменным током дросселя при помощи постоянного тока находит широкое применение в схемах контроля, управления, автоматического регулирования и, в частности, в магнитных усилителях.

Усилителем называется устройство позволяющее управлять значительной мощностью в рабочей цепи, затрачивая незначительную мощность в цепи управления.

Рассмотренный ранее дроссель как усилитель обладает существенным недостатком: в обмотке управления наводится ЭДС, а применение добавочной катушки индуктивности  $L_d$  снижает быстродействие цепи управления. Для устранения этого недостатка применяют усилители, состоящие из двух одинаковых дросселей (рис. 15.29).

Рабочая цепь усилителя состоит из двух обмоток и приемника с сопротивлением  $r$ , соединенных последовательно

и подключенных к источнику синусоидального напряжения. Рабочие обмотки  $w_p$  соединены согласно, а обмотки управления  $w_y$  встречно. В этом случае переменные ЭДС, наводимые в обмотках управления, направ-

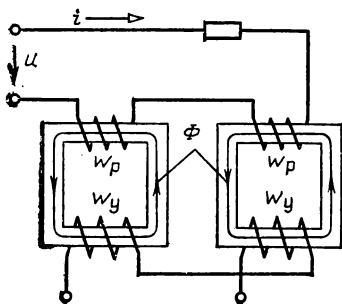


Рис. 15.29. Схема магнитного усилителя

лены противоположно и компенсируют друг друга. Сопротивление цепи управления может быть достаточно малым, и мощность рабочей цепи может значительно превышать мощность цепи управления.

### 15.9. ТРАНСФОРМАТОР СО СТАЛЬНЫМ МАГНИТОПРОВОДОМ

а) **Трансформатор.** При передаче и распределении электрической энергии нужны различные напряжения. Например, при передаче энергии от электростанции к потребителям, находящимся на больших расстояниях от электростанции, необходимо напряжение генераторов повысить до сотен киловольт, чтобы уменьшить потери энергии и массу проводов. Так как напряжение питания отдельных потребителей не превышает сотен или тысяч вольт (это делается для того, чтобы упростить их конструкцию и обеспечить безопасность людей), то необходимо понизить напряжение линии электропередачи. Повышать напряжение сети питания нужно в различных устройствах электроники и радиотехники для последующего выпрямления. Повышают и понижают напряжение при помощи трансформаторов.

Трансформатор, который применяется для повышения или понижения напряжения, часто имеет замкнутый магнитопровод, набранный из листов электротехнической стали, и две (или большее число) обмотки (рис. 15.30). У понижающего трансформатора первичная обмотка с числом витков  $w_1$  подключается к источнику питания (генератору, линии передачи энергии), к вторичной обмотке с числом витков  $w_2$  присоединяются потребители (приемники) с общим сопротивлением  $Z$ . Для уменьшения потоков рассеяния обмотки  $w_1$  и  $w_2$  располагаются на одном стержне и в действительности одна на другой. Конструкция трансформатора должна быть рассчитана так, чтобы магнитопровод не насыщался. Поэтому при синусоидальном напряжении питания токи, ЭДС, магнитные потоки и напряжения потребителей можно также считать синусоидальными, что облегчает анализ работы трансформатора. На том же рис. 15.30 показаны выбранные положительные направления напряжений питания  $\underline{U}_1$  и потребителей  $\underline{U}_2$ , токов  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$ , МДС  $\underline{F} = \underline{I}_1 w_1$  и  $\underline{F}_2 = \underline{I}_2 w_2$ , основного магнитного потока  $\underline{\Phi}$  и индуцируемых этим потоком ЭДС  $\underline{E}_1$  и  $\underline{E}_2$  (с соблюдением правила правого буравчика).

Чтобы пояснить составление уравнений для первичной и вторичной цепей, на рис. 15.31 даны поперечные разрезы

левого стержня, каждая обмотка представлена условно одним витком и указаны те же положительные направления величин, что и на рис. 15.30.

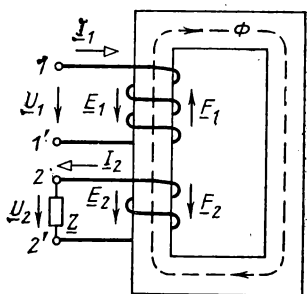


Рис. 15.30. Схема двухобмоточного трансформатора

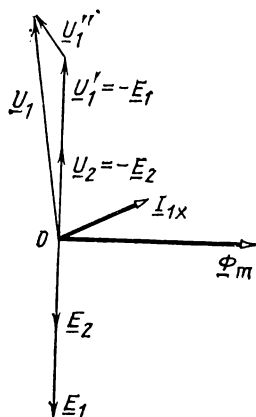


Рис. 15.32. Векторная диаграмма трансформатора в режиме холостого хода

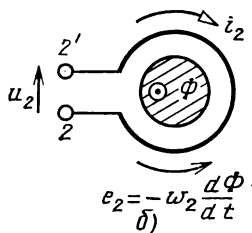
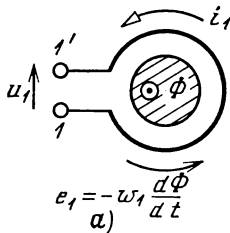


Рис. 15.31. Положительные направления напряжений, токов и ЭДС в первичной и вторичной обмотках трансформатора

По второму закону Кирхгофа для первичной цепи (обход против направления движения стрелки часов на рис. 15.31, а)

$$e_1 = -u_1 + r_1 i_1 + L_{1p} di_1/dt,$$

где ЭДС индукции  $e_1 = -w_1 d\Phi/dt$ ;  $r_1$  — сопротивление и  $L_{1p}$  — индуктивность рассеяния первичной обмотки.

Это уравнение обычно записывают иначе:

$$u_1 = -e_1 + r_1 i_1 + L_{1p} di_1/dt \quad (15.26)$$

или в комплексной форме

$$\underline{U}_1 = -\underline{E}_1 + r_1 \underline{I}_1 + j\omega L_{1p} \underline{I}_1 = \underline{U}'_1 + \underline{U}_{1a} + \underline{U}_{1p} = \underline{U}'_1 + \underline{U}''_1, \quad (15.27)$$

где, как и для катушки (§ 15.6),  $\underline{U}'_1 = -\underline{E}_1$  и  $E_1 = 4,44 f \omega_1 \Phi_m$ ;  $\underline{U}_{1a} = r_1 \underline{I}_1$ ;  $\underline{U}_{1p} = j\omega L_{1p} \underline{I}_1 = jx_{1p} \underline{I}_1$ ;  $\underline{U}''_1 = \underline{U}_{1a} + \underline{U}_{1p}$ .

По второму закону Кирхгофа для вторичной цепи (рис. 15.31, б)

$$e_2 = -u_2 - r_2 i_2 - L_{2p} di_2/dt,$$

где  $e_2 = -\omega_2 d\Phi/dt$ ;  $r_2$  — сопротивление и  $L_{2p}$  — индуктивность рассеяния вторичной обмотки. Иначе,

$$-e_2 = u_2 + r_2 i_2 + L_{2p} di_2/dt \quad (15.28)$$

или в комплексной форме

$$\begin{aligned} -\underline{E}_2 &= \underline{U}'_2 = \underline{U}_2 + r_2 \underline{I}_2 + j\omega L_{2p} \underline{I}_2 = \\ &= \underline{U}_2 + \underline{U}_{2a} + \underline{U}_{2p} = \underline{U}_2 + \underline{U}''_2, \end{aligned} \quad (15.29)$$

где  $E_2 = 4,44 f \omega_2 \Phi_m$ ;  $\underline{U}_{2a} = r_2 \underline{I}_2$ ;  $\underline{U}_{2p} = j\omega L_{2p} \underline{I}_2 = jx_{2p} \underline{I}_2$ ;  $\underline{U}''_2 = \underline{U}_{2a} + \underline{U}_{2p}$ .

Если к выводам 2 и 2' потребители не подключены, то режим работы трансформатора называется режимом холостого хода. При холостом ходе первичную цепь можно рассматривать как катушку со стальным магнитопроводом (§ 15.6).

**б) Векторные диаграммы.** В режиме холостого хода векторная диаграмма трансформатора (рис. 15.32) аналогична векторной диаграмме катушки со стальным магнитопроводом (рис. 15.20). Ток в первичной обмотке при отключенных потребителях называют током холостого хода  $I_{1x}$ . Дополнительно на рис. 15.32 построены ЭДС  $\underline{E}_2$  и напряжение  $\underline{U}_2$ . Так как ЭДС  $\underline{E}_1$  и  $\underline{E}_2$  индуцируются одним и тем же магнитным потоком, то они совпадают по фазе. Здесь, как указывалось, для определенности предполагается, что трансформатор понижающий, т. е.  $\omega_1 > \omega_2$ , и, следовательно,  $E_1 > E_2$ . Отношение напряжений на выводах трансформатора при холостом ходе

$$\frac{U_1}{U_2} \approx \frac{E_1}{E_2} = \frac{4,44 f \omega_1 \Phi_m}{4,44 f \omega_2 \Phi_m} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = n \quad (15.30)$$

называется коэффициентом трансформации.

В рабочем режиме векторная диаграмма построена на рис. 15.33 по уравнениям (15.27) и (15.29). Ток

$$\underline{I}_2 = \underline{U}_2 / \underline{Z} = \underline{U}_2 / (r + jx).$$

При индуктивном характере нагрузки ток  $\underline{I}_2$  отстает по фазе от напряжения  $\underline{U}_2$  (рис. 15.33), а при емкостном опережает по фазе напряжение  $\underline{U}_2$ .

Падение напряжения  $\underline{U}'_1$  даже при номинальном режиме обычно не превышает 1—2 % напряжения питания  $U_1$ , так как активное сопротивление  $r_1$  и индуктивное  $x_{1p}$  малы. Вследствие малого падения напряжения  $\underline{U}'_1$  составляющую  $\underline{U}'_1$  ( $\underline{U}'_1 = E_1$ ) и в рабочих режимах можно считать примерно равной напряжению  $U_1$ . Поэтому и основной поток  $\Phi_m = E_1 / 4,44 f \omega_1$  можно считать для всех режимов работы трансформатора одним и тем же. Но магнитный поток при подключении потребителей не изменится, если с появлением во вторичной цепи тока  $\underline{I}_2$  ток в первичной цепи  $\underline{I}_1$  увеличится до такого значения, при котором алгебраическая сумма МДС первичной  $\underline{F}_1 = \underline{I}_1 \omega_1$  и вторичной  $\underline{F}_2 = \underline{I}_2 \omega_2$  обмоток равна МДС до подключения потребителей, т.е. в режиме холостого хода  $\underline{F}_{1x} = \underline{I}_{1x} \omega_1$ .

На рис. 15.30 показаны положительные направления МДС  $\underline{F}_1$  и  $\underline{F}_2$ , которые согласуются с положительным направлением токов по правилу правого буравчика. Так как вдоль магнитопровода МДС  $\underline{F}_1$  и  $\underline{F}_2$  направлены навстречу друг другу, то разность этих МДС и равна МДС в режиме холостого хода:

$$\underline{F}_1 - \underline{F}_2 = \underline{I}_1 \omega_1 - \underline{I}_2 \omega_2 = \underline{I}_{1x} \omega_1,$$

откуда ток

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1x} + \underline{I}_2 \omega_2 / \omega_1 = \underline{I}_{1x} + \underline{I}_2 / n, \quad (15.31)$$

что и показано на рис. 15.33.

в) **Схема замещения трансформатора.** Расчет режима работы трансформатора можно упростить, составив его электрическую схему замещения без индуктивных связей. Эта схема состоит из трех ветвей (рис. 15.34) с токами, удовлетворяющими уравнению (15.31), т.е. первому закону Кирхгофа, и соответствует уравнению (15.27), составленному для левого контура по второму закону Кирхгофа. В эквивалентной схеме при заданном напряжении источ-

ника  $U_1$  должны получиться те же активные и реактивная мощности потребителей.

У трансформатора  $P_2 = rI_2^2$  и  $Q_2 = xI_2^2$ . Так как в эквивалентной схеме ток вторичной цепи в  $n$  раз меньше, то сопротивления потребителя должны быть в  $n^2$  раз больше. Эти же рассуждения относятся и к другим сопротивлениям

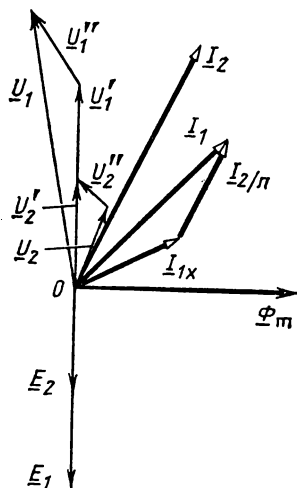
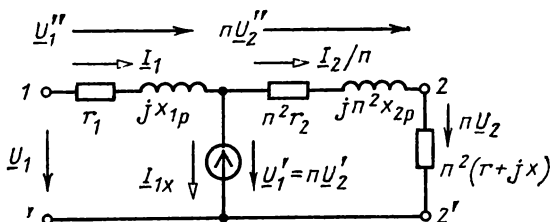


Рис. 15.33. Векторная диаграмма нагруженного трансформатора

Рис. 15.34. Схема замещения трансформатора с приведенными током, напряжениями и сопротивлениями



вторичной цепи. Напряжение потребителей нужно увеличить в  $n$  раз, чтобы выполнялся закон Ома:

$$\frac{nU_2}{I_2/n} = n^2 Z = n^2 (r + jx).$$

Падения напряжения на других сопротивлениях вторичной цепи также увеличиваются в  $n$  раз, а следовательно, для выполнения второго закона Кирхгофа (15.29) и ЭДС индукции во вторичной обмотке, и напряжение  $U_2$  надо уве-



личить в  $n$  раз (правый контур). Значения тока, напряжений, ЭДС и сопротивлений вторичной цепи в схеме замещения трансформатора называются приведенными.

## Глава шестнадцатая

### ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

#### 16.1. ЗАКОНЫ КОММУТАЦИИ

В предыдущих главах рассматривались в основном установившиеся режимы в электрических цепях, когда напряжения, токи и т. д. в течение длительного промежутка времени остаются постоянными или изменяются периодически. Такой режим цепи устанавливается при достаточно длительном действии источников постоянной или периодической (в частности, синусоидальной) ЭДС, не мгновенно вслед за моментом включения или отключения источников питания или моментом изменения ее параметров ( $L$ ,  $C$  и  $r$ ), т. е. за моментом коммутации.

С момента коммутации в цепи наблюдается переходный процесс, который только через достаточно большой интервал времени (теоретически бесконечно большой) сменяется установившимся режимом.

Рассмотрим цепь с сопротивлением  $r$  и индуктивностью  $L$  (рис. 7.17). При постоянном напряжении  $U$  на ее выводах режим характеризуется постоянными значениями тока  $I=U/r$ , магнитного потока  $\Phi=LI/\omega$ , энергии магнитного поля  $W=LI^2/2$ , мощности  $P=rI^2$  и т. д. Если напряжение изменится до значения  $U'$ , то новое установившееся состояние цепи будет характеризоваться новыми постоянными значениями тока  $I'=U'/r$ , магнитного потока  $\Phi'=LI'/\omega$ , энергии магнитного поля  $W'=L(I')^2/2$ , мощности  $P'=r(I')^2$ . Переход от одного установившегося состояния к другому не может произойти мгновенно, т. е. скачком, так как при мгновенном переходе ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) ток цепи должен был бы скачком измениться  $\Delta i = I' - I$ , что вызвало бы появление бесконечно большой ЭДС самоиндукции

$$e_L = -L di/dt \approx -L \Delta i / \Delta t \rightarrow \infty,$$

как и указывалось в § 7.6 и энергия магнитного поля изменилась бы мгновенно на  $\Delta W = W' - W$ , и, следовательно, источник питания цепи должен был бы развить бесконеч-

но большую мощность

$$p = dW/dt \approx \Delta W/\Delta t \rightarrow \infty.$$

Так как ЭДС самоиндукции и мощность источника в реальных цепях могут иметь только конечные значения, то переход от одного установившегося состояния цепи с индуктивностью к другому ее состоянию может происходить только в течение конечных промежутков времени.

Это положение и выражает первый закон коммутации: *ток в индуктивности не может изменяться скачком*, или, иначе, ток в момент, непосредственно следующий за коммутацией, имеет то же значение, которое он имел в момент, непосредственно предшествующий коммутации.

Рассмотрим теперь цепь с емкостью  $C$  и сопротивлением  $r$  (рис. 4.25, а). При изменении напряжения на ее выводах или при изменении ее параметров, т. е. при коммутации, переход от одного установившегося состояния цепи к другому также не может происходить мгновенно, т. е. скачком. В противном случае напряжение на выводах емкости должно было бы мгновенно ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) измениться на  $\Delta u = u'_c - u_c$  и вызвать бесконечно большой зарядный (или разрядный) ток

$$i = C du_c/dt \approx C \Delta u/\Delta t \rightarrow \infty,$$

а источник питания цепи должен был бы развить бесконечно большую мощность

$$p = \Delta W/\Delta t \rightarrow \infty.$$

Ток в цепи и мощность источника могут иметь только конечные значения, поэтому переход от одного установившегося состояния цепи с емкостью к другому может происходить только в течение конечных промежутков времени.

Это положение и выражает второй закон коммутации: *напряжение на емкости не может изменяться скачком*, или, иначе, напряжение на емкости в момент, непосредственно следующий за коммутацией, имеет то же значение, что и в момент, непосредственно предшествующий коммутации, что учитывалось в § 4.15.

Таким образом, один установившийся режим цепи отделяется от другого некоторым промежутком времени, в течение которого происходят явления, обеспечивающие постепенный переход от прежнего состояния цепи к новому.

Изучение переходных процессов в линейных цепях упрощается, если переходный процесс рассматривать как

результат наложения двух процессов: первого — нового установившегося режима, полагая, что он наступает мгновенно после коммутации, и второго — свободного процесса, обеспечивающего переход цепи от прежнего установившегося режима к новому установившемуся режиму.

Свободный процесс возникает после коммутации вследствие несоответствия энергии, запасенной в магнитном или электрическом полях цепи (в индуктивностях и емкостях), новому установившемуся режиму. Значения свободных токов и напряжений зависят от уровня несоответствия энергий магнитного и электрического полей новому установившемуся режиму; по мере уменьшения этого несоответствия свободные токи и напряжения постепенно уменьшаются до нулевых значений.

Действительный ток в цепи в течение переходного процесса можно представить в виде суммы двух составляющих: нового установившегося тока и свободного тока

$$i = i_y + i_{св}. \quad (16.1)$$

Аналогично напряжение в течение переходного процесса

$$u = y_y + u_{св}. \quad (16.2)$$

## 16.2. ВКЛЮЧЕНИЕ $rL$ -ЦЕПИ К ИСТОЧНИКУ ПОСТОЯННОГО НАПЯЖЕНИЯ

При включении неразветвленной цепи с сопротивлением  $r$  и индуктивностью  $L$  или, короче,  $rL$ -цепи, например катушки индуктивности, к источнику постоянного напряжения  $U$  (рис. 16.1) ток в цепи вследствие действия ЭДС

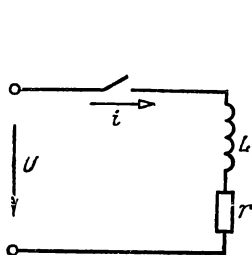


Рис. 16.1. Включение катушки к источнику постоянного напряжения

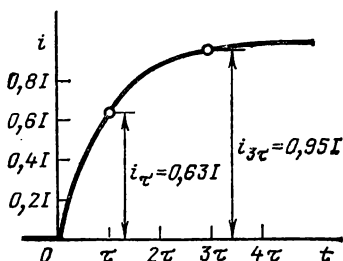


Рис. 16.2. Изменение тока при включении  $rL$ -цепи к источнику постоянного напряжения

самоиндукции нарастает постепенно до установившегося (принужденного) значения

$$i_y = U/r$$

(см. § 7.6).

Запишем еще раз для рассматриваемой цепи уравнение по второму закону Кирхгофа (7.236):

$$U = ri + L di/dt \quad (16.3)$$

или после подстановки (16.1)

$$U = r(i_y + i_{св}) + L d(i_y + i_{св})/dt. \quad (16.4)$$

Так как в установившемся режиме  $i_{св} = 0$ , то для установившегося режима

$$U = ri_y + L di_y/dt. \quad (16.5)$$

Вычитая почленно это уравнение из (16.4), получаем уравнение для свободного тока:

$$0 = ri_{св} + L di_{св}/dt, \quad (16.6a)$$

или

$$i_{св} = -\frac{L}{r} di_{св}/dt. \quad (16.6b)$$

Процесс установления тока в цепи тем продолжительнее, чем больше отношение  $L/r$ , так как влияние индуктивности тем сильнее, чем больше ЭДС самоиндукции по сравнению с падением напряжения на сопротивлении  $r$ . Величина  $\tau = L/r$  называется постоянной времени  $rL$  цепи. Она имеет размерность времени, так как

$$[\tau] = [L/r] = \text{Ом} \cdot \text{с}/\text{Ом} = \text{с}.$$

Следовательно,

$$i_{св} = -\tau di_{св}/dt. \quad (16.6b)$$

Этому уравнению удовлетворяет решение

$$i_{св} = Ae^{-t/\tau}, \quad (16.7)$$

где  $A$  — постоянная, что легко проверить подстановкой в (16.6b).

Действительно,

$$\frac{di_{св}}{dt} = -\frac{1}{\tau} Ae^{-t/\tau},$$

т. е. после подстановки получается тождество.

Постоянную  $A$  находим из начальных условий. Так как

до включения цепи, т. е. коммутации, ток был равен нулю, то по первому закону коммутации и в первый момент после включения ( $t=0$ ) ток

$$i(0) = i_y(0) + i_{св}(0) = 0, \quad (16.8)$$

где  $i_y(0) = i_y = I$ , так как при постоянном напряжении источника питания установившийся ток в рассматриваемой цепи постоянный.

По (16.7)

$$i_{св}(0) = Ae^{-0/\tau} = A,$$

а по (16.8)

$$i_{св}(0) = -i_y(0) = -I.$$

Следовательно,

$$A = -I$$

и свободный ток (16.7)

$$i_{св} = -Ie^{-t/\tau}, \quad (16.9)$$

а ток переходного процесса

$$i = i_y + i_{св} = I - Ie^{-t/\tau} = I(1 - e^{-t/\tau}). \quad (16.10)$$

На рис. 16.2 показано нарастание тока в  $rL$ -цепи при ее включении, построенное по (16.10).

Из (16.10) следует, что в начальный момент времени ( $t=0$ ) свободный ток, равный по значению и обратный по знаку установившемуся току, компенсирует установившийся ток, так что ток переходного процесса равен нулю, как и должно быть по первому закону коммутации. Затем свободный ток уменьшается (16.9) по закону показательной функции (экспоненциальному закону), а ток переходного процесса увеличивается (рис. 16.2). Наконец, при  $t \rightarrow \infty$  ток достигает установившегося значения  $I = U/r$ .

Теоретически ток достигнет установившегося значения через бесконечно большое время. А практически часто установившийся режим наступает очень быстро. О продолжительности переходного процесса судят по постоянной времени. Действительно, по прошествии времени  $t = \tau$  ток

$$i_\tau = I(1 - e^{-1}) = I(1 - 1/e) \approx 0,63I,$$

т. е. возрастает от нуля до 63 % от  $I$ .

Через время  $t = 3\tau$  ток

$$i_{3\tau} = I(1 - e^{-3}) = I\left(1 - \frac{1}{20}\right) \approx 0,95I,$$

т. е. достигает 95 % тока установившегося режима. Считая, что переходный процесс оканчивается при токе, отличающемся на 1 % от тока установившегося режима  $I$ , получаем из (16.10) продолжительность переходного процесса  $t = 4,6 \tau$ , так что при малой индуктивности цепи ( $\tau = L/r$  мало) установившийся режим может наступить через доли секунды или даже миллисекунды.

Напряжение на сопротивлении при переходном процессе

$$u_r = ri = rI(1 - e^{-t/\tau}) = U(1 - e^{-t/\tau}). \quad (16.11)$$

Напряжение на индуктивности при переходном процессе уменьшается по экспоненциальному закону:

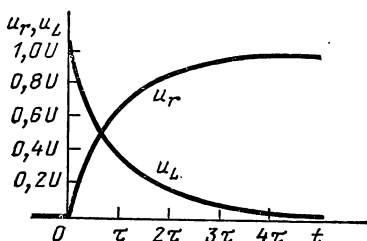
$$u_L = U - u_r = U - U(1 - e^{-t/\tau}) = Ue^{-t/\tau}. \quad (16.12)$$

Электродвижущая сила самоиндукции при переходном процессе

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{I}{\tau} e^{-t/\tau} = -Ire^{-t/\tau} = -Ue^{-t/\tau}, \quad (16.13)$$

т. е., как и должно быть, равна по значению и обратна по знаку напряжению на индуктивности. В начальный момент

Рис. 16.3. Кривые напряжений  $u_L$  и  $u_r$



она имеет наибольшее значение, равное напряжению на выводах цепи  $U$ , и с ростом тока спадает до нулевого значения.

На рис. 16.3 показано изменение напряжений  $u_r$  и  $u_L$ .

### 16.3. КОРОТКОЕ ЗАМЫКАНИЕ $rL$ -ЦЕПИ

Если цепь с индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $r$  присоединена к источнику постоянного напряжения (рис.16.4), то при коротком замыкании ток  $i$  в ней не исчезнет мгновенно (сопротивление  $R$  исключает короткое замыкание источника). Он будет поддерживаться ЭДС самоиндукции

$e_L = -L di/dt$ , имеющей то же направление, что и ток  $i$  в цепи до ее замыкания, так как  $di/dt < 0$ . Ток  $i$  будет проходить до тех пор (теоретически бесконечно долго), пока вся энергия, запасенная в магнитном поле, не превратится в тепло в сопротивлении  $r$ .

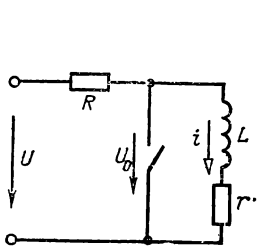


Рис. 16.4. Короткое замыкание  $rL$ -цепи

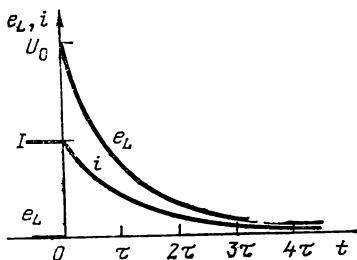


Рис. 16.5. Изменения тока и ЭДС при коротком замыкании  $rL$ -цепи

Так как источника питания в короткозамкнутом участке с  $L$  и  $r$  нет, то по второму закону Кирхгофа для правого контура

$$0 = L di/dt + ri. \quad (16.14)$$

Во время переходного процесса  $i = i_y + i_{св}$  (16.1), т. е. уравнение (16.14) можно переписать в виде

$$0 = L d(i_y + i_{св})/dt + r(i_y + i_{св}). \quad (16.15)$$

В рассматриваемом случае новый установившийся ток  $i_y = 0$ , так как в правом контуре нет источника питания.

Таким образом, во время переходного процесса в  $rL$ -цепи будет только свободный ток  $i = i_{св}$  и, следовательно,

$$0 = L di_{св}/dt + ri_{св}, \quad (16.16)$$

что совпадает с (16.6a). Поэтому уравнение (16.16) имеет решение такого же вида, как и (16.6a):

$$i_{св} = Ae^{-t/\tau}, \quad (16.17)$$

но постоянная  $A$  должна быть еще найдена.

Обозначив ток в цепи до короткого замыкания  $i = I = U/(R+r)$ , напомним по первому закону коммутации для начального момента ( $t=0$ )

$$i(0) = i_{св}(0) = I$$

и в соответствии с (16.17)

$$i_{\text{св}}(0) = A.$$

Таким образом,  $A = I$  и

$$i = i_{\text{св}} = Ie^{-t/\tau}. \quad (16.18)$$

Изменение тока по экспоненциальному закону показано на рис. 16.5.

Из выражения (16.18) следует, что ток в начальный момент имеет наибольшее значение, а затем уменьшается, достигая практически нулевого значения по прошествии времени  $t = 5\tau$ .

В течение переходного процесса вследствие изменения тока в цепи возбуждается ЭДС самоиндукции, которую можно найти, дифференцируя (16.18):

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = LI \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = I r e^{-t/\tau} = U_0 e^{-t/\tau}. \quad (16.19)$$

В момент замыкания (рис. 16.5) участка цепи накоротко ( $t=0$ ) ЭДС самоиндукции

$$e_L(0) = U_0 e^0 = U_0, \quad (16.20)$$

т. е. ЭДС имеет наибольшее значение, равное напряжению на выводах участка цепи с  $L$  и  $r$  до момента его замыкания.

#### 16.4. ОТКЛЮЧЕНИЕ $rL$ -ЦЕПИ

При отключении источника постоянного напряжения  $U$  от катушки индуктивности, параллельно которой присоединен резистор  $R$  (рис. 16.6, а), ток  $i$  определяется так же, как при коротком замыкании. Но рассматриваемый переходной процесс отличается от рассмотренного в § 16.3 тем, что при отключении источника (рис. 16.6, а) сопротивление контура больше на  $R$ , вследствие чего постоянная цепи  $\tau' = L/(r+R)$  меньше  $\tau = L/r$ .

Теперь ЭДС самоиндукции

$$e'_L = -L \frac{di}{dt} = LI \frac{1}{\tau'} e^{-t/\tau'} = I(r+R) e^{-t/\tau'},$$

наоборот, больше, чем в предыдущем случае.

В начальный момент ЭДС  $e'_L(0) = I(r+R)$ , а отношение ее к ЭДС, индуктированной в короткозамкнутой цепи,

$$\frac{e_L(0)}{e'_L(0)} = \frac{I(r+R)}{Ir} = \frac{r+R}{r},$$



откуда

$$e'_L(0) = e_L(0) \frac{r+R}{r} = U \frac{r+R}{r}. \quad (16.21)$$

Полученное выражение показывает, что увеличение сопротивления отключаемого участка приводит к росту индуктированной в ней ЭДС. Эта ЭДС может достигнуть опасных для цепи значений, во много раз превосходящих напряжение  $U$ , под которым она находилась до отключения.

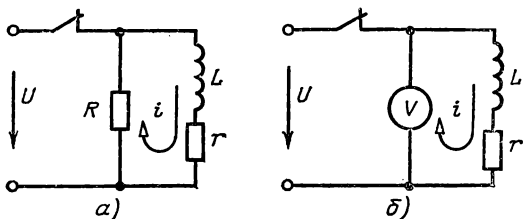


Рис. 16.6. Отключение разветвленной цепи с катушкой

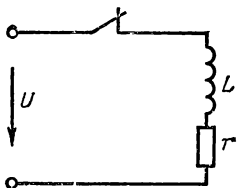


Рис. 16.7. Отключение катушки от источника питания

**Пример 16.1.** Определить начальные значения напряжения и тока переходного процесса при отключении источника (рис. 16.6, б) для вольтметра с номинальным напряжением 150 В, сопротивление которого  $r_B = R = 1000$  Ом, если напряжение источника питания  $U = 100$  В, а сопротивление  $r = 100$  Ом.

**Решение.** При замкнутом ключе в ветви с параметрами  $L$  и  $r$  ток  $I = U/r = 100/100 = 1$  А.

Согласно первому закону коммутации ток в ветви с индуктивностью в первый момент после коммутации равен току в момент, непосредственно предшествующий коммутации, следовательно,  $i(0) = I = 1$  А и ток вольтметра (в сопротивлении  $R$ ) такой же  $i_B = i$ .

Так как начальное значение тока в вольтметре  $i_B(0) = 1$  А, то начальное значение напряжения на вольтметре

$$u_B(0) = Ri_B(0) = 1000 \cdot 1 = 1000 \text{ В.}$$

Импульс напряжения  $u_B = 1000$  В при номинальном напряжении 150 В может вызвать повреждение вольтметра, поэтому вольтметр должен быть отключен до размыкания цепи.

Переходный процесс при отключении неразветвленной

$rL$ -цепи (рис. 16.7) протекает сложнее, чем при ее включении.

При отключении цепи контакты ключа расходятся и в цепь последовательно включается сопротивление воздушного промежутка между удаляющимися друг от друга контактами. Если предположить, что проводимость воздуха мала, то ток в такой цепи должен почти мгновенно уменьшиться до нуля и в цепи возникает очень большая ЭДС самоиндукции. Эта ЭДС вызовет между расходящимися контактами ключа сильное электрическое поле, так что произойдет ионизация воздуха, возможно даже вырывание с поверхности контактов свободных электронов (явление автоэмиссии); в воздушном промежутке возникнет искровой или дуговой разряд.

Таким образом, газовый промежуток между расходящимися контактами ключа обладает проводимостью и ток в цепи уменьшается до нуля не мгновенно. Сопротивление газового промежутка между контактами нелинейное, поэтому анализ переходного процесса при отключении достаточно сложен. Следует помнить, что отключение цепей, по которым проходят значительные токи (сотни, тысячи ампер и более), протекает очень тяжело для выключающей аппаратуры. Для разрыва таких цепей применяются специальные выключающие устройства, не разрушающиеся от дугового разряда и обеспечивающие быстрое его гашение и разрыв цепи тока.

### 16.5. ИЗМЕНЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ В $rL$ -ЦЕПИ

В цепи рис. 16.8 до замыкания ключа был установившийся ток

$$I' = U/(R + r).$$

После замыкания ключа начинается переходный процесс, и для цепи справедливы все уравнения (16.3)—(16.6). Поэтому свободная составляющая  $i_{св}$  записывается в виде (16.7), но начальное условие другое, так что постоянную  $A$  нужно еще найти.

Так как согласно первому закону коммутации ток в индуктивности не изменяется скачком, то в первый момент после замыкания ключа  $i(0) = I'$ . Значение установившегося тока после окончания переходного процесса (при замкнутом ключе) найдем по закону Ома:

$$i_y = I = U/r > I'$$

(индуктивность для постоянного тока не представляет сопротивления).

Подставим найденные значения в (16.1) в начальный момент времени ( $t=0$ ), т. е. в выражение  $i(0)=i_y(0)+i_{св}(0)$ :

$$I' = I + Ae^{0/\tau} = I + A,$$

откуда

$$A = I' - I.$$

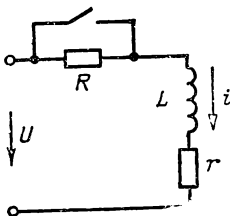


Рис. 16.8. Уменьшение сопротивления в  $rL$ -цепи

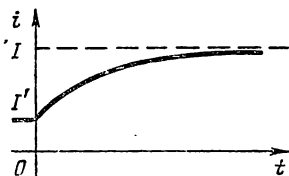


Рис. 16.9. Изменение тока в  $rL$ -цепи при уменьшении сопротивления

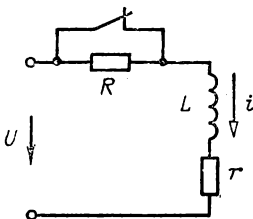


Рис. 16.10. Увеличение сопротивления в  $rL$ -цепи

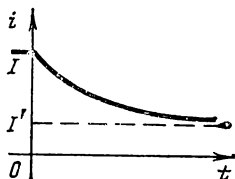


Рис. 16.11. Изменение тока в  $rL$ -цепи при увеличении сопротивления

### Переходный ток

$$i = i_y + i_{св} = I + (I' - I)e^{-t/\tau}, \quad (16.22a)$$

где  $\tau = L/r$ .

На рис. 16.9 показано изменение тока после замыкания ключа. В отличие от графика изменения тока при включении  $rL$ -цепи (рис. 16.2) получается график с начальным значением тока не нуль, а  $I'$ , так как до замыкания ключа в цепи уже был ток.

В цепи рис. 16.10 до размыкания ключа был установив-

шийся ток  $I=U/r$ . Поэтому согласно первому закону коммутации  $i(0)=I$ . После размыкания ключа переходный процесс описывается уравнением, аналогичным (16.3):

$$U = (r + R) i + L di/dt.$$

Установившееся значение тока (переходный процесс закончился и ключ разомкнут)

$$i_y = I' = U/(r + R).$$

Уравнение для свободной составляющей  $i_{св}$  аналогично (16.6), только с другой постоянной времени  $\tau' = L/(r+R)$ . Поэтому его решение аналогично (16.7):

$$i_{св} = Ae^{-t/\tau'},$$

но, конечно, постоянную  $A$  нужно еще определить. Подставим в (16.1) значения токов в начальный момент ( $t=0$ ):

$$I = I' + Ae^{0/\tau'} = I' + A,$$

откуда

$$A = I - I'.$$

Переходный ток

$$i = i_y + i_{св} = I' + (I - I')e^{-t/\tau'}. \quad (16.226)$$

На рис. 16.11 показано изменение тока после размыкания ключа. Ток уменьшается от начального значения  $I$  до нового установившегося значения  $I'$ , а не до нуля, как при коротком замыкании цепи (рис. 16.5), так как в цепи остался источник питания.

## 16.6. ВКЛЮЧЕНИЕ $rC$ -ЦЕПИ К ИСТОЧНИКУ ПОСТОЯННОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Присоединим незаряженный конденсатор (рис. 16.12) с емкостью  $C$  через резистор с сопротивлением  $r$  к источнику питания с постоянным напряжением  $U$ .

Напряжение на выводах конденсатора пропорционально заряду на его пластинах  $u_c = q/C$ , и так как конденсатор не был заряжен, то по закону коммутации напряжение на конденсаторе в момент его включения ( $t=0$ ) равно нулю, т. е.  $u_c(0)=0$ .

После окончания зарядки (в установившемся режиме) напряжение на конденсаторе будет равно напряжению источника питания, т. е.  $u_{cy}=U$ .

Во время переходного процесса напряжение на конден-

саторе можно представить состоящим из двух составляющих (16.2):

$$u_C = u_{Cy} + u_{Ccb},$$

где напряжение установившегося режима  $u_{Cy} = U$  и напряжение свободного процесса  $u_{Ccb}$ , т. е.

$$u_C = U + u_{Ccb}. \quad (16.23)$$

По второму закону Кирхгофа для  $rC$ -цепи (рис. 16.12)

$$U = ri + u_C.$$

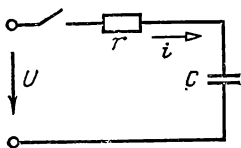
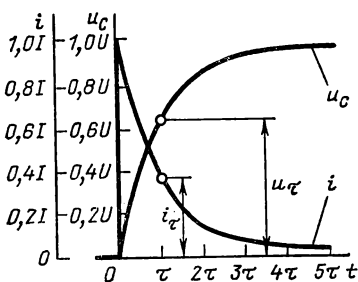


Рис. 16.12. Зарядка конденсатора через резистор

Рис. 16.13. Изменения тока и напряжения на конденсаторе при его зарядке



Заменяв в этом уравнении ток по (4.40), (4.41)

$$i = dq/dt = Cdu_C/dt, \quad (16.24)$$

получим уравнение

$$U = rCdu_C/dt + u_C. \quad (16.25)$$

Учитывая (16.23), перепишем (16.25) в виде

$$U = rCdu_{Ccb}/dt + U + u_{Ccb},$$

где учтено, что напряжение  $U$  постоянное, т. е.  $dU/dt = 0$ , или

$$0 = rCdu_{Ccb}/dt + u_{Ccb} \quad (16.26a)$$

и

$$u_{Ccb} = -rCdu_{Ccb}/dt. \quad (16.26b)$$

Процесс зарядки конденсатора тем продолжительнее, чем больше сопротивление цепи  $r$ , ограничивающее ток, и чем больше емкость конденсатора  $C$ , так как при большей емкости должен накопиться больший заряд. Скорость

протекания процесса характеризуют постоянной времени  $RC$ -цепи

$$\tau = rC; \quad (16.27)$$

чем больше  $\tau$ , тем медленнее процесс.

Постоянная времени цепи имеет размерность времени, так как

$$[\tau] = [rC] = \text{Ом} \cdot \text{Ф} = \text{Ом} \cdot \text{Кл/В} = \text{Ом} \cdot \text{А} \cdot \text{с/В} = \text{с}.$$

Поэтому по (16.26б)

$$u_{\text{св}} = -\tau du_{\text{св}}/dt. \quad (16.26\text{в})$$

Уравнение (16.26в) аналогично уравнению (16.6в). Поэтому ему удовлетворяет решение вида (16.7)

$$u_{\text{св}} = Ae^{-t/\tau}, \quad (16.28)$$

где  $A$  — постоянная, что легко проверить подстановкой в (16.26в).

Постоянную  $A$  определим из начальных условий. При  $t=0$  по второму закону коммутации  $u_c(0) = 0$ , т. е.

$$u_c(0) = u_{\text{св}}(0) + u_{\text{св}}(0) = U + Ae^{-0/\tau} = 0,$$

откуда

$$U + A = 0 \text{ или } A = -U.$$

Таким образом, напряжение на конденсаторе при зарядке

$$u_c = U - Ue^{-t/\tau} = U(1 - e^{-t/\tau}), \quad (16.29)$$

т. е. оно равно разности постоянного напряжения  $U$  источника питания и свободного напряжения, убывающего с течением времени по экспоненциальному закону от значения  $U$  до нуля.

Изменение напряжения  $u_c$  показано на рис. 16.13.

Ток переходного процесса, или зарядный ток,

$$i = C \frac{du_c}{dt} = C \frac{1}{\tau} Ue^{-t/\tau} = Ie^{-t/\tau}, \quad (16.30)$$

где

$$I = CU/\tau = U/r.$$

Ток  $i$  от начального значения  $I$  с течением времени постепенно уменьшается по экспоненциальному закону (рис. 16.13).

За время  $t=\tau$  зарядный ток (16.30) уменьшается в  $e \approx$

$\approx 2,72$  раза:

$$i_{\tau} = I e^{-1} \approx I/2,72 = 0,37I,$$

а напряжение на конденсаторе (16.29) за то же время возрастает от 0 до  $0,63 U$ :

$$u_{\tau} = U \left( 1 - \frac{1}{e} \right) \approx 0,63U.$$

За время  $t=3\tau$  ток уменьшается до  $0,05 I$ , а напряжение на конденсаторе увеличивается до  $0,95 U$ . По прошествии  $t=5\tau$  зарядка конденсатора практически заканчивается.

Падение напряжения на сопротивлении  $r$  пропорционально току

$$u_r = ri = U e^{-t/\tau}.$$

### 16.7. КОРОТКОЕ ЗАМЫКАНИЕ $rC$ -ЦЕПИ

Предположим, что в цепи с сопротивлением и емкостью (рис. 16.14) конденсатор зарядился до напряжения источни-

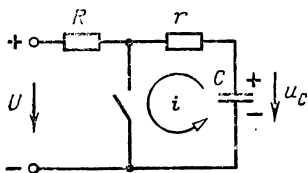
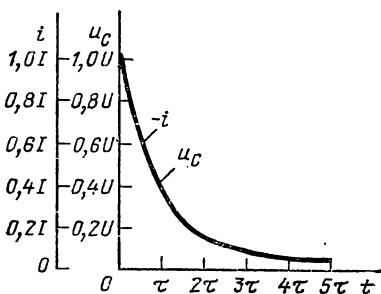


Рис. 16.14. Разрядка конденсатора через резистор

Рис. 16.15. Изменения тока и напряжения на конденсаторе при его разрядке



ка питания  $U$ . После замыкания ключа конденсатор разряжается через сопротивление  $r$  правого контура (сопротивление  $R$  исключает короткое замыкание источника). Уравнение контура по второму закону Кирхгофа

$$0 = ri - u_C \quad (16.31)$$

(источника питания нет, напряжение  $u_C$  направлено навстречу обходу).

Ток  $i$  — это не ток зарядки конденсатора, а ток разрядки (направлен навстречу току зарядки в цепи рис. 16.12).

Поэтому вместо (16.24) надо записать

$$i = -dq/dt = -Cdu_C/dt. \quad (16.32)$$

Подставив это значение тока в (16.31), получим

$$0 = rCdu_C/dt + u_C. \quad (16.33)$$

После разрядки конденсатора или в установившемся режиме напряжение на конденсаторе равно нулю, т. е.  $u_C = 0$ . Следовательно,  $u_C = u_{C\text{св}}$  и по (16.33)

$$0 = rCdu_{C\text{св}}/dt + u_{C\text{св}} \quad (16.34a)$$

или

$$u_{C\text{св}} = -rCdu_{C\text{св}}/dt = -\tau du_{C\text{св}}/dt. \quad (16.34b)$$

Последнее уравнение совпадает с (16.266). Поэтому его решение записывается в виде (16.28)

$$u_C = u_{C\text{св}} = Ae^{-t/\tau}, \quad (16.35)$$

где учтено, что  $u_C = 0$ .

Постоянную  $A$  определим, как и ранее, из начальных условий. При  $t=0$  напряжение  $u_C(0) = U$  (конденсатор был заряжен, а по второму закону коммутации напряжение на емкости не изменяется скачком), т. е. по (16.35)

$$U = A.$$

Следовательно, напряжение во время разрядки конденсатора изменяется по закону

$$u_C = Ue^{-t/\tau}. \quad (16.36)$$

Разрядный ток по (16.32)

$$i = \frac{C}{\tau} Ue^{-t/\tau} = \frac{U}{r} e^{-t/\tau} = Ie^{-t/\tau}. \quad (16.37)$$

Изменения напряжения на конденсаторе и тока разрядки показаны на рис. 16.15. Ток в начальный момент  $t=0$ , как видно из (16.37), наибольший  $i(0) = I = U/r$ . И напряжение и ток уменьшаются по экспоненциальному закону. По прошествии времени  $t=5\tau$  разрядка практически заканчивается. Разрядка получается тем медленнее ( $\tau$  тем больше), чем больше емкость  $C$  конденсатора, а следовательно, и накопленная в его электрическом поле энергия ( $W_C = CU^2/2$ ) и чем больше сопротивление  $r$ , так как с увеличением сопротивления уменьшается разрядный ток. Вся



энергия, накопленная в электрическом поле конденсатора, за время разрядки превращается в тепло в резисторе с сопротивлением  $r$ .

### 16.8. ВКЛЮЧЕНИЕ $rL$ -ЦЕПИ К ИСТОЧНИКУ СИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

При включении  $rL$ -цепи (рис. 16.1) к источнику не постоянного  $U$ , а к источнику синусоидального напряжения

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi) \quad (16.38)$$

в момент, который принимаем за начало отсчета времени ( $t=0$ ), начинается переходный процесс.

Переходный ток  $i$  можно опять представить состоящим из двух слагающих — установившегося тока  $i_y$  и свободного тока  $i_{св}$  (16.1):  $i = i_y + i_{св}$ . Установившийся синусоидальный ток рассчитывается так же, как в § 9.6 или § 10.3:

$$i_y = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi), \quad (16.39)$$

где  $z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}$ ;  $\operatorname{tg} \varphi = \omega L/r$ ;  $\varphi = \varphi_L > 0$ .

Закон изменения свободного тока зависит только от параметров цепи ( $r$ ,  $L$ ), поэтому свободный ток, как и в § 16.2, определяется выражением

$$i_{св} = Ae^{-t/\tau}. \quad (16.40)$$

Тока до включения цепи не было, поэтому по первому закону коммутации ток в момент замыкания рубильника ( $t=0$ )

$$i(0) = i_y(0) + i_{св}(0) = 0,$$

откуда

$$i_{св}(0) = -i_y(0). \quad (16.41)$$

Так как свободный ток в начальный момент

$$i_{св}(0) = Ae^{-0/\tau} = A,$$

а установившийся ток в тот же момент времени

$$i_y(0) = I_m \sin(\omega \cdot 0 + \psi - \varphi) = I_m \sin(\psi - \varphi),$$

то можно написать

$$A = -I_m \sin(\psi - \varphi).$$

Следовательно, свободный ток

$$i_{св} = Ae^{-t/\tau} = -I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}. \quad (16.42)$$

В начальный момент свободный ток имеет наибольшее значение. Он равен по абсолютному значению и противоположен по знаку мгновенному значению установившегося тока в момент включения (16.41). С течением времени свободный ток уменьшается и через время  $t=5\tau$  достигает практически нулевого значения.

Ток переходного процесса

$$i = i_y + i_{св} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}; \quad (16.43)$$

он состоит из двух слагающих: установившегося синусоидального и свободного, направление которого не изменяется и который уменьшается по экспоненциальному закону (рис. 16.16).

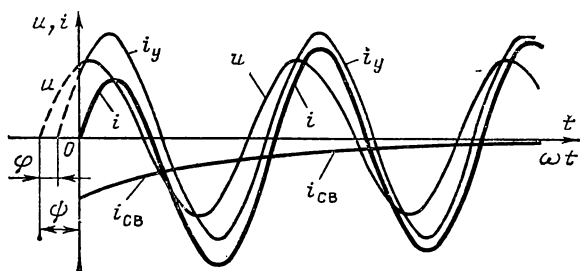


Рис. 16.16. Изменение тока в  $rL$ -цепи при включении ее к источнику синусоидального напряжения

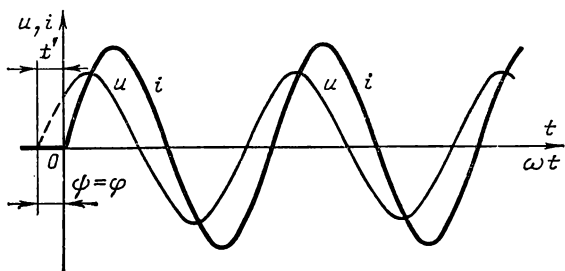


Рис. 16.17. Изменение тока в  $rL$ -цепи при включении ее к источнику синусоидального напряжения и  $\psi = \varphi$

Начальное значение свободного тока численно равно мгновенному значению установившегося тока в момент включения (16.41); поэтому при включении цепи в момент, когда установившийся ток проходит через нулевое значе-

ние, т. е. при  $i_y(0) = 0$ , свободный ток не возникает и в цепи сразу наступает установившийся режим (рис. 16.17).

В этом случае и

$$i_{св}(0) = -I_m \sin(\psi - \varphi) = 0,$$

откуда  $\sin(\psi - \varphi) = 0$  и  $\psi - \varphi = 0$  или  $\psi - \varphi = \pi$ ; следовательно,

$$\psi = \varphi \text{ (рис. 16.17) или } \psi = \varphi + \pi.$$

т. е. ключ должен быть замкнут по прошествии времени

$$t' = \psi/\omega = \varphi/\omega \text{ или } t'' = t' + T/2$$

после начала положительной полуволны напряжения.

При включении цепи в момент, когда установившаяся составляющая тока достигает амплитудного значения, начальное значение свободного тока получается наибольшим. В этом случае

$$i_{св}(0) = -I_m \sin(\psi - \varphi) = \mp I_m,$$

откуда

$$\sin(\psi - \varphi) = \pm 1 \text{ или } \psi - \varphi = \pm 90^\circ;$$

следовательно,

$$\psi = \varphi + 90^\circ \text{ (рис. 16. 18) или } \psi = \varphi - 90^\circ.$$

Таким образом, ключ должен быть замкнут по прошествии времени

$$t''' = \psi/\omega = (\varphi \pm 90^\circ)/\omega$$

после начала положительной полуволны напряжения.

В этом случае при медленном спаде свободного тока ( $\tau > T$ ) наибольшее значение переходного тока  $i_{\max}$  может

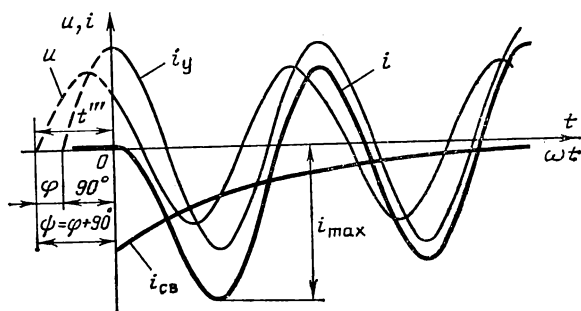


Рис. 16.18. Изменение тока в  $rL$ -цепи при включении ее к источнику синусоидального напряжения и  $\psi = \varphi + 90^\circ$

быть примерно равно двойной амплитуде установившегося тока  $I_m$  по прошествии времени, примерно равного половине периода после включения цепи (когда свободный и установившийся токи имеют одинаковый знак).

**Пример 16.2.** Для  $rL$ -цепи с индуктивностью 0,01 Гн и сопротивлением 1 Ом при включении ее к источнику напряжения  $u = 330 \sin(314\omega t + \psi)$  В определить свободный ток в момент включения  $t=0$ , если: 1)  $\psi = 0$ ; 2)  $\psi = 72^\circ 20'$ ; 3)  $\psi = 162^\circ 20'$ .

**Решение.** Полное сопротивление цепи

$$z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{1^2 + (314 \cdot 0,01)^2} = 3,3 \text{ Ом.}$$

Косинус угла сдвига фаз между напряжением и током и сдвиг фаз

$$\cos \varphi = r/z = 1/3,3 = 0,303; \quad \varphi = 72^\circ 20'.$$

Амплитуда установившегося тока

$$I_m = U_m/z = 330/3,3 = 100 \text{ А.}$$

Свободный ток в момент включения (16.42):

$$1) i_{св}(0) = -I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-0/\tau} = -100 \sin(-72^\circ 20') = 100 \cdot 0,95 = 95 \text{ А;}$$

$$2) i_{св}(0) = -I_m \sin(\psi - \varphi) = -100 \sin(72^\circ 20' - 72^\circ 20') = 0;$$

$$3) i_{св}(0) = -I_m \sin(\psi - \varphi) = -100 \sin(162^\circ 20' - 72^\circ 20') = -100 \sin 90^\circ = -100 \text{ А.}$$

## 16.9. КОРОТКОЕ ЗАМЫКАНИЕ КАТУШКИ В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Ток в катушке с индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $r$ , которая была включена в цепь (рис. 16.4), но с источником синусоидального напряжения  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ , в установившемся режиме тоже был синусоидальный (§ 9.6 или § 10.3):

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где  $I_m = U_m/z$ ;

$$z = \sqrt{(R + r)^2 + x_L^2};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = x/(R + r) = x_L/(R + r) = \omega L/(R + r) \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi_L > 0.$$

Считая, как и ранее, что замыкание ключа происходит в момент  $t=0$ , согласно первому закону коммутации вычислим начальное значение тока, который не изменяется скачком:

$$i(0) = I_m \sin(\psi - \varphi). \quad (16.44)$$

Во время переходного процесса ток состоит из двух составляющих  $i = i_y + i_{св}$ .

Установившаяся составляющая тока катушки после короткого замыкания (рис. 16.4) равна нулю, так как в правом контуре нет источника питания, т. е.  $i_y = 0$ . Свободная составляющая определяется известным для  $rL$ -цепи (§ 16.3) выражением

$$i_{св} = Ae^{-t/\tau},$$

откуда находим, что начальное значение свободного тока  $i_{св}(0) = A$ . Ток переходного процесса согласно первому закону коммутации скачком не изменяется. Поэтому из уравнения

$$i(0) = i_y(0) + i_{св}(0)$$

получаем

$$I_m \sin(\psi - \varphi) = 0 + A$$

и ток переходного процесса

$$i = i_{св} = I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}. \quad (16.45)$$

Ток уменьшается по экспоненциальному закону, как и ток при постоянном источнике напряжения (рис. 16.5). Его начальное значение зависит от начальной фазы  $\psi$  напряжения источника питания. Если выбрать момент замыкания ключа таким, что начальная фаза  $\psi = \varphi$ , то  $i(0) = 0$  (16.44) и переходного процесса нет, так как в момент замыкания ключа не запасена энергия в магнитном поле катушки:

$$W_L(0) = Li^2(0)/2 = 0.$$

#### 16.10. ВКЛЮЧЕНИЕ $rC$ -ЦЕПИ К ИСТОЧНИКУ СИНУСОИДАЛЬНОГО НАПЯЖЕНИЯ

При включении в момент  $t=0$  цепи с емкостью  $C$  и сопротивлением  $r$ , или, короче,  $rC$ -цепи (рис. 16.12), к источнику синусоидального напряжения  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$  начинается переходный процесс.

Установившийся ток рассчитывается так же, как в § 9.7 или § 10.3:

$$i_y = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi), \quad (16.46)$$

где  $z = \sqrt{r^2 + x_C^2}$ ;  $x_C = 1/\omega C$ ;  $\operatorname{tg} \varphi = x/r = -x_C/r$ ;  $\varphi = -\varphi_C < 0$ .

Ток  $i_y$  синусоидальный и опережает по фазе ( $\varphi < 0$ ) напряжение  $u$  (рис. 16.19).

Напряжение на конденсаторе во время переходного процесса состоит из двух слагающих (16.2)  $u_C = u_{Cy} + u_{C\text{св}}$ .

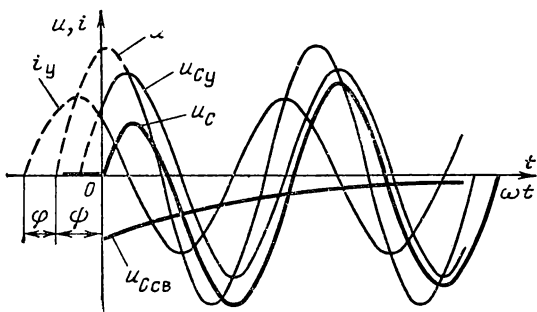


Рис. 16.19. Изменение напряжения на конденсаторе в  $RC$ -цепи при включении ее к источнику синусоидального напряжения

Установившееся напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока на угол  $\pi/2$ :

$$\begin{aligned} u_{Cy} &= I_m \frac{1}{\omega C} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \pi/2) = \\ &= -U_{Cm} \cos(\omega t + \psi - \varphi), \end{aligned} \quad (16.47)$$

где  $U_{Cm} = I_m/\omega C$ .

Свободное напряжение на конденсаторе, как и в § 16.6, определяется выражением (16.28)

$$u_{C\text{св}} = Ae^{-t/\tau}.$$

Таким образом, напряжение на конденсаторе в течение переходного процесса

$$u_C = -U_{Cm} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{-t/\tau}.$$

По второму закону коммутации напряжение на конденсаторе в момент, непосредственно следующий за включением, имеет то же значение, что и в момент, непосредственно предшествующий включению; следовательно, если конденсатор не был заряжен, то

$$u_C(0) = u_{Cy}(0) + u_{C\text{св}}(0) = 0,$$

т. е.

$$u_{Cy}(0) = -u_{C\text{св}}(0)$$

или

$$-U_{Cm} \cos(\omega \cdot 0 + \psi - \varphi) = -Ae^{-0/\tau},$$

откуда

$$A = U_{Cm} \cos(\psi - \varphi).$$

Таким образом, свободное напряжение на конденсаторе

$$u_{Cсв} = Ae^{-t/\tau} = U_{Cm} \cos(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}, \quad (16.48)$$

а напряжение на конденсаторе во время переходного процесса

$$u_C = u_{Cy} + u_{Cсв} = -U_{Cm} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + U_{Cm} \cos(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}. \quad (16.49)$$

График напряжения  $u_{Cy}$ ,  $u_{Cсв}$  и  $u_C$  дан на рис. 16.19.

Как видно из выражения (16.49), на синусоидальное установившееся напряжение конденсатора накладывается свободное напряжение, которое в начальный момент имеет наибольшее значение, а затем уменьшается по экспоненциальному закону.

Начальное значение свободного напряжения зависит от момента включения. Если включение произойдет в момент, когда установившаяся составляющая напряжения на конденсаторе имеет амплитудное значение, например отрицательное (рис. 16.20), то начальное значение свободного

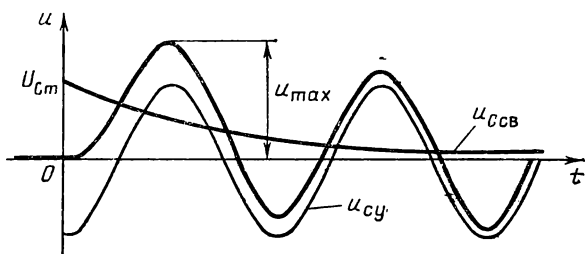


Рис. 16.20. Изменение напряжения на конденсаторе в  $RC$ -цепи при включении ее к источнику синусоидального напряжения и  $\psi = \varphi$

напряжения будет наибольшим, равным амплитуде принужденного напряжения  $U_{Cm}$ . Как видно из (16.49), это будет при  $\psi = \varphi$ . Если свободное напряжение спадает медленно ( $\tau > T$ ), то наибольшее значение напряжения на конденсаторе  $u_{max}$  может достигнуть примерно двойного амплитуды.

литудного значения  $2 U_{cm}$  через время, равное примерно половине периода после включения, когда свободная и установившаяся составляющие напряжения будут иметь одинаковый знак.

Если включение произойдет в момент, когда установившаяся составляющая напряжения на конденсаторе проходит через нулевое значение, то свободного напряжения в цепи не возникает и сразу наступает установившийся режим. Из (16.49) видно, что  $u_{св} = 0$  при  $\cos(\psi - \varphi) = 0$  или  $(\psi - \varphi) = \pm 90^\circ$ , т. е. такой режим будет при  $\psi = \pm 90^\circ + \varphi$ .

Установившаяся составляющая тока была найдена выше (16.46). Свободную составляющую тока проще всего найти по уравнению, связывающему ток и напряжение на конденсаторе,

$$i_{св} = C du_{св} / dt \quad (16.50)$$

или с учетом (16.48)

$$i_{св} = -C \frac{U_{cm}}{\tau} \cos(\psi - \varphi) e^{-t/\tau} = -C \frac{I_m}{\omega Cr C} \times \\ \times \cos(\psi - \varphi) e^{-t/\tau} = -\frac{I_m}{\omega Cr} \cos(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}, \quad (16.51)$$

а ток переходного процесса

$$i = i_y + i_{св} = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \\ - \frac{I_m}{\omega Cr} \cos(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}. \quad (16.52)$$

Из полученного выражения следует, что ток переходного процесса состоит из двух слагающих: установившейся синусоидальной и свободной, которая в начальный момент имеет наибольшее значение, а затем уменьшается по экспоненциальному закону.

В зависимости от начальной фазы  $\psi$  напряжения источника питания начальное значение свободного тока будет различным.

Если включение цепи произойдет в момент, когда установившееся напряжение на конденсаторе (16.47) проходит через максимальное значение, то начальное значение свободного тока будет наибольшим, так как в этом случае согласно (16.47)  $\cos(\psi - \varphi) = 1$  (или  $-1$ ) и по (16.51)

$$i_{св}(0) = -\frac{I_m}{\omega Cr} \cos(\psi - \varphi) e^{-0/\tau} = -\frac{I_m}{\omega Cr} = -\frac{U_{cm}}{r}.$$



Сравнивая полученное начальное значение свободного тока с амплитудой установившегося тока:

$$I_m = \frac{U_{Cm}}{x_C} = \frac{U_{Cm}}{1/\omega C},$$

видим, что при небольшом сопротивлении  $r$  по сравнению с емкостным сопротивлением  $x_C$  начальное значение свободного тока значительно больше (в  $x_C/r$ ) амплитуды установившегося тока. В этом случае в начальной стадии переходного процесса ток в цепи значительно отличается от синусоидального. На рис. 16.21 построен ток  $i$  для случая

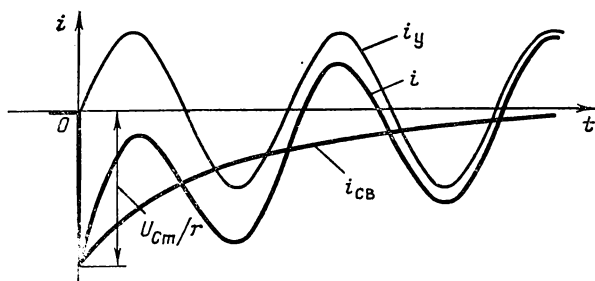


Рис. 16.21. Изменение тока в  $rC$ -цепи при включении ее к источнику синусоидального напряжения и  $\psi = \varphi$

$\psi = \varphi$ , когда установившийся ток в момент включения равен нулю.

Если включение цепи произойдет в момент, когда установившееся напряжение на конденсаторе (16.47) проходит через нулевое значение, т. е.  $\cos(\psi - \varphi) = 0$ , то по (16.51)  $i_{св}(0) = 0$ .

### 16.11. ВКЛЮЧЕНИЕ КАТУШКИ СО СТАЛЬНЫМ МАГНИТОПРОВОДОМ К ИСТОЧНИКУ СИНУСОИДАЛЬНОГО НАПЯЖЕНИЯ

При включении катушки без стального магнитопровода с индуктивностью  $L$  и активным сопротивлением  $r$  к источнику синусоидального напряжения  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$  в ней возникает ток (16.43)

$$i = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{U_m}{z} \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}.$$

Если катушка обладает малым сопротивлением, которым можно пренебречь ( $r \approx 0$ ), то

$$z \approx \omega L; \quad U_m/z \approx U_m/\omega L = I_m; \quad \varphi \approx \pi/2 \text{ и } \tau = L/r \rightarrow \infty.$$

При включении такой катушки ток

$$\begin{aligned} i &= i_y + i_{св} \approx I_m \sin(\omega t + \psi - \pi/2) - I_m \sin(\psi - \pi/2) e^0 = \\ &= I_m \sin(\omega t + \psi - \pi/2) - I_m \sin(\psi - \pi/2). \end{aligned}$$

Этот ток состоит из синусоидальной установившейся составляющей и практически постоянной свободной составляющей, значение которой зависит от момента включения цепи (угла  $\psi$ ).

Свободная составляющая тока имеет небольшое значение в том случае, если напряжение питания в момент включения проходит через нулевое значение, т. е.  $\psi = 0$ . В этом случае ток

$$i \approx I_m \sin(\omega t - \pi/2) - I_m \sin(-\pi/2) = I_m \sin(\omega t - \pi/2) + I_m.$$

Ток изменяется почти периодически (рис. 16.22) от нулевого до наибольшего значения:

$$i_{max} = 2I_m = 2U_m/\omega L.$$

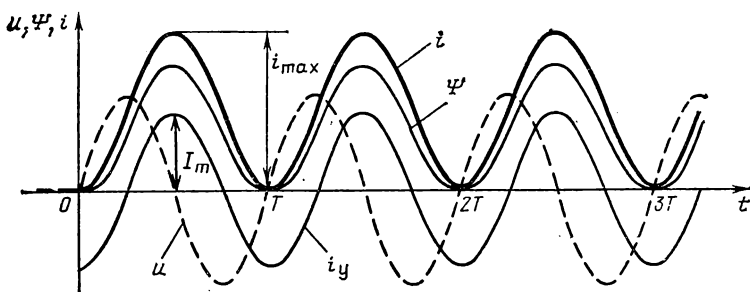


Рис. 16.22. Изменения тока и магнитного потока катушки без стального магнитопровода и потерь при включении ее к источнику синусоидального напряжения

Магнитный поток в катушке в каждый момент времени пропорционален току; следовательно, пропорционально току и потокосцепление:

$$\begin{aligned} \Psi = Li &= Li_y + Li_{св} = \Psi_y + \Psi_{св} = LI_m \sin(\omega t - \pi/2) + \\ &+ LI_m = \Psi_m \sin(\omega t - \pi/2) + \Psi_m; \end{aligned} \quad (16.53)$$

поэтому кривая потокоцепления (рис. 16.22) подобна кривой тока.

Изменяющийся магнитный поток индуцирует ЭДС, которая уравновешивается приложенным напряжением  $u$ .

При подключении катушки со стальным магнитопроводом без потерь к источнику переменного напряжения магнитный поток изменяется по тому же закону, что и у катушки без магнитопровода. Но так как зависимость между потоком и током нелинейная и определяется кривой намагничивания  $\Phi(i)$  или  $\Psi(i)$  (рис. 16.23), то кривая тока отлича-

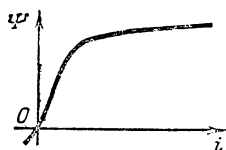
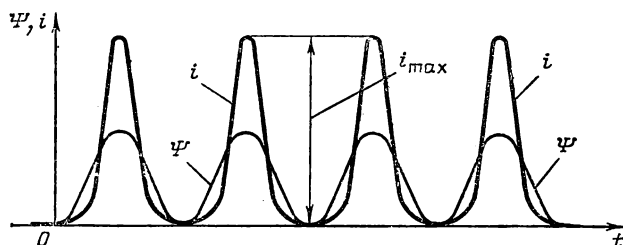


Рис. 16.23. Кривая намагничивания катушки со стальным магнитопроводом

Рис. 16.24. Изменения тока и магнитного потока катушки без потерь со стальным магнитопроводом при ее включении к источнику синусоидального напряжения



ется от кривой магнитного потока. Кривую тока можно построить по точкам по кривой потока  $\Phi(t)$  или потокоцепления  $\Psi(t)$  и кривой намагничивания  $\Phi(i)$  или  $\Psi(i)$ , как показано на рис. 15.9. Если при работе магнитопровод насыщается, то максимальное значение тока  $i_{max}$  резко возрастает (рис. 16.24).

При включении катушки со стальным магнитопроводом, обладающей незначительным сопротивлением (включение ненагруженного трансформатора), происходящий процесс несколько отличается от рассмотренного. В этом случае свободная слагающая потокоцепления  $\Psi_{св}$  не постоянна, как по (16.53), а изменяется приблизительно по экспоненциальному закону  $\Psi_{св} \approx \Psi_m e^{-t/\tau}$  (рис. 16.25); следовательно, потокоцепление во время переходного процесса

$$\Psi = \Psi_y + \Psi_{св} = \Psi_m \sin(\omega t - \pi/2) + \Psi_m e^{-t/\tau}. \quad (16.54)$$

Из (16.54) следует, что при больших значениях постоянной времени  $\tau$  ( $r$  — мало) первое после включения катушки максимальное значение потокосцепления  $\Psi_{max}$  достигает примерно удвоенного значения амплитуды установившейся составляющей потокосцепления  $\Psi_m$  (рис. 16.25). Затем максимумы потокосцепления уменьшаются вследствие уменьшения свободной слагающей  $\Psi_{св}$ .

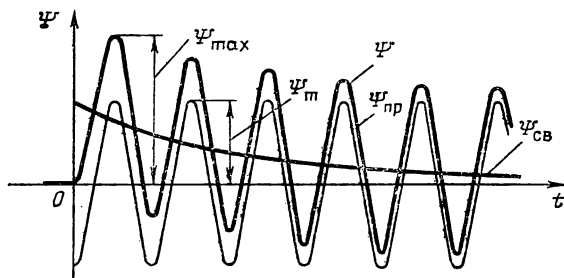
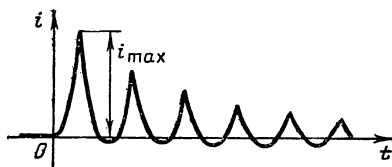


Рис. 16.25. Изменение потокосцепления катушки, обладающей малым активным сопротивлением, при включении ее к источнику синусоидального напряжения

Рис. 16.26. Изменение тока катушки со стальным магнитопроводом при включении ее к источнику синусоидального напряжения



По заданной кривой намагничивания (рис. 16.23) и кривой  $\Psi(t)$  можно построить кривую тока (рис. 16.26).

При нормальном режиме работы трансформаторов энергетических установок магнитная индукция достигает наибольшего значения примерно 1,2 Тл, а при удвоенном значении потокосцепления значение индукции вдвое больше, т. е. 2,4 Тл, чему соответствует резкое возрастание тока. Экспериментально установлено, что при включении трансформаторов ток  $i_{max}$  может достигать 3—5-кратной амплитуды установившегося тока при номинальной нагрузке. Для уменьшения тока и связанных с ним электродинамических усилий при включении мощных трансформаторов последовательно с ними вводят резисторы, которые затем замыкают накоротко.

## **Глава семнадцатая**

### **ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

#### **17.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ**

В предыдущих главах рассматривались электрические цепи, которые называют цепями с сосредоточенными параметрами. При исследовании таких цепей считают, что электрическое поле сосредоточено только на отдельных участках цепи, например в конденсаторах. Эти участки представляют на схемах емкостями (емкостными элементами). Электрическое поле на участке цепи не учитывают, если оно не оказывает существенного влияния на распределение токов и напряжений. Точно так же выделяют отдельные участки цепи, например катушки индуктивности, в которых сосредоточено магнитное поле. Эти участки изображают на схемах индуктивностями (индуктивными элементами). Наконец, участки электрической цепи, в которых существенное значение имеет необратимое преобразование электромагнитной (электрической) энергии в тепловую, химическую или механическую, на схемах представляют сопротивлениями (резистивными элементами).

Однако в электротехнике часто приходится встречаться и с такими электрическими цепями, в которых электрическое поле, магнитное поле и потери (необратимые преобразования) энергии распределены равномерно или неравномерно вдоль всех участков цепи. Эти цепи называются цепями с распределенными параметрами.

В цепях с распределенными параметрами напряжения и токи различны не только на отдельных участках, но и изменяются в пределах каждого участка, т. е. зависят от пространственной координаты. К цепям с распределенными параметрами относятся длинные линии электропередачи (ЛЭП), линии телеграфной и телефонной связи, радиотрансляционные линии, линии телеуправления и телеизмерения, обмотки электрических машин, линии для формирования коротких импульсов, линии—элементы настройки контуров, линии-трансформаторы и др.

Если надо учитывать изменение напряжения и тока вдоль линии, то ее называют *длинной* в отличие от проводов, соединяющих элементы цепей с сосредоточенными параметрами.

Среди цепей с распределенными параметрами одно из главных значений имеют длинные линии передачи.

По своему назначению все линии передачи можно разделить на две группы. Линии электропередачи соединяют электрические станции и подстанции с потребителями электрической энергии — городами, шахтами, жилыми домами и т. д. При проектировании, монтаже и эксплуатации этих линий стремятся прежде всего обеспечить передачу электрической энергии с достаточно малыми потерями, т. е. с высоким КПД. Для передачи применяется либо переменный (синусоидальный) ток промышленной частоты (50 Гц в СССР), либо постоянный ток.

Телефонные и телеграфные линии (линии электропроводной связи), линии телеуправления, телеизмерения и сигнализации (линии телемеханики), радиотрансляционные линии предназначены для передачи информации (сообщений, сведений) при помощи электрических сигналов. Эти линии должны быть выполнены так, чтобы искажения передаваемых сигналов, в частности из-за помех, не были слишком велики. При заметных искажениях сигналов может потеряться часть информации, которую переносит сигнал. Задача уменьшения потерь энергии передаваемого сигнала, т. е. получения высокого КПД линии, иногда не ставится. Но если увеличить мощность сигналов (и правильно выбрать метод передачи информации, т. е. вид сигналов), то можно уменьшить искажения.

По конструкции линии передачи делятся на воздушные и кабельные. Голые (без изоляции) провода воздушных линий подвешиваются при помощи изоляторов к металлическим, деревянным или бетонным опорам (мачтам, столбам), например ЛЭП, радиотрансляционные линии, линии связи в сельской местности.

Кабельные линии чаще прокладывают под землей или под водой, но иногда и подвешивают на опорах. Провода кабеля изолируют и помещают в экранирующую и защитную металлическую оболочку. Для передачи электрической энергии при высоком напряжении применяют трехфазные кабели с тремя изолированными проводами—жилами. Электрические сигналы передают по симметричным кабелям с одной или несколькими парами жил, как, например, сигналы телефонной связи. Сигналы очень высоких частот, например телевизионного изображения, передают по коаксиальным кабелям, в которых одним проводом служит

центральная жила, а другим — оболочка, как у кабеля, соединяющего приемную антенну с телевизором.

Линия передачи — это направляющая система, которая обеспечивает передачу электромагнитной энергии в заданном направлении. Обычно только небольшая доля энергии преобразуется в тепло в проводах и несовершенном диэлектрике.

## 17.2. ПАРАМЕТРЫ И УРАВНЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ

Для исследования процессов в линии введем дополнительно условие о равномерном распределении вдоль линии ее параметров: индуктивности, емкости, сопротивления и проводимости между проводами. Такую линию называют однородной. Линию с неравномерным распределением параметров часто разбивают на однородные участки.

Наиболее просто рассчитывается режим работы однородной двухпроводной линии, потерями в которой можно пренебречь, т. е. линии без потерь, при синусоидальном напряжении источника питания в начале и приемнике в конце (рис. 17.1). Линии постоянного тока можно рас-

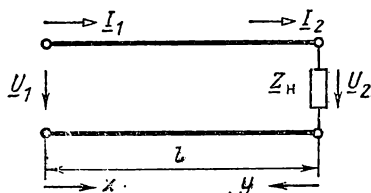
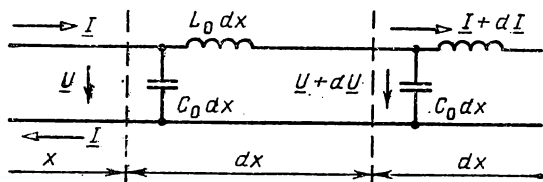


Рис. 17.1. Двухпроводная длинная линия

Рис. 17.2. Элемент двухпроводной линии без потерь



считать как частный случай линии синусоидального тока при  $\omega = 0$ .

Каждый элементарный участок однородной двухпроводной линии без потерь малой длины  $dx$  имеет индуктивность

$L_0 dx$  (характеризует магнитное поле), которую изображают включенной в один из проводов на схеме замещения участка (рис. 17.2), и емкость  $C_0 dx$  между проводами (характеризует электрическое поле). Индуктивность  $L_0$  (Гн/м) и емкость  $C_0$  (Ф/м) на единицу длины линии без потерь называются ее первичными параметрами.

На рис. 17.2 показаны и выбранные положительные направления напряжения от одного из проводов, который называется прямым, к другому — обратному и тока в прямом проводе от начала линии (слева), где находится источник питания с напряжением  $\underline{U}_1$ , к концу, где подключается приемник с сопротивлением нагрузки  $Z_n$  (рис. 17.1). В обратном проводе, естественно, ток имеет обратное направление.

Обозначим напряжение в начале участка малой длины  $\underline{U}$ , ток  $\underline{I}$ , а в конце  $\underline{U} + d\underline{U}$  и  $\underline{I} + d\underline{I}$ , что показывает малые изменения напряжения и тока на участке.

На участке малой длины  $dx$  изменение напряжения обусловлено падением напряжения на индуктивном сопротивлении  $(j\omega L_0 dx)\underline{I}$ , где  $j\omega L_0 dx$  — индуктивное сопротивление участка малой длины  $dx$ , т. е. разность напряжений

$$\underline{U} - (\underline{U} + d\underline{U}) = j\omega L_0 \underline{I} dx,$$

откуда

$$-d\underline{U} = j\omega L_0 \underline{I} dx$$

и

$$-d\underline{U}/dx = j\omega L_0 \underline{I} \quad (17.1a)$$

или короче

$$-d\underline{U}/dx = \underline{Z}_0 \underline{I}, \quad (17.16)$$

где  $\underline{Z}_0 = j\omega L_0$  — продольное комплексное сопротивление на единицу длины линии.

Изменение тока на том же участке получается из-за тока утечки через емкость  $(j\omega C_0 dx)\underline{U}$ , где  $j\omega C_0 dx$  — емкостная проводимость участка малой длины  $dx$ , т. е. разность токов

$$\underline{I} - (\underline{I} + d\underline{I}) = j\omega C_0 \underline{U} dx,$$

откуда

$$-d\underline{I} = j\omega C_0 \underline{U} dx$$



и

$$-d\underline{I}/dx = j\omega C_0 \underline{U} \quad (17.2a)$$

или

$$-d\underline{I}/dx = \underline{Y}_0 \underline{U}, \quad (17.2б)$$

где  $\underline{Y}_0 = j\omega C_0$  — поперечная комплексная проводимость на единицы длины линии. Отметим, что  $\underline{Z}_0$  и  $\underline{Y}_0$  не обратные величины (в предыдущих главах считали  $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ ), что следует из смысла этих величин.

В гл. 16 было показано, что уравнению (16.6), которое называют дифференциальным первого порядка (кроме искомой величины  $i_{св}$  в него входит производная  $di_{св}/dt$ ), удовлетворяет экспоненциальная функция (16.7). Системе двух дифференциальных уравнений (17.1б) и (17.2б) с двумя искомыми величинами ( $\underline{U}$  и  $\underline{I}$ ) удовлетворяют алгебраические суммы двух экспоненциальных функций для напряжения и тока:

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x}; \quad (17.3a)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_B} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_B} e^{\gamma x}, \quad (17.3б)$$

где обозначено

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}; \quad \underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0}; \quad (17.4)$$

$\underline{A}_1$  и  $\underline{A}_2$  — постоянные; которые зависят от значений напряжения источника питания и сопротивления нагрузки. Правильность записанных решений можно проверить постановкой (17.3) и (17.4) в (17.1б) и (17.2б), после чего получаются тождества, так как

$$\begin{aligned} d\underline{U}/dx &= -\underline{\gamma} \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{\gamma} \underline{A}_2 e^{\gamma x}; \\ d\underline{I}/dx &= -\underline{\gamma} \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_B} e^{-\gamma x} - \underline{\gamma} \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_B} e^{\gamma x} = -\underline{Y}_0 \underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \\ &\quad - \underline{Y}_0 \underline{A}_2 e^{\gamma x}. \end{aligned}$$

Для линии без потерь

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(j\omega L_0)(j\omega C_0)} = \\ &= \sqrt{-\omega^2 L_0 C_0} = j\sqrt{\omega^2 L_0 C_0} = j\beta \end{aligned} \quad (17.5)$$

— мнимая величина (здесь учтено, что  $j^2 = -1$  и  $\sqrt{-1} = j$ );

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_0/\underline{Y}_0} = \sqrt{L_0/C_0} = z_B \quad (17.6)$$

— действительная величина.

Таким образом, для линии без потерь решения (17.3) можно записать в виде

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-j\beta x} + \underline{A}_2 e^{j\beta x}; \quad (17.7a)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_1}{z_B} e^{-j\beta x} - \frac{\underline{A}_2}{z_B} e^{j\beta x}, \quad (17.7b)$$

в которых постоянные  $\underline{A}_1$  и  $\underline{A}_2$  в общем случае комплексные величины, т. е.  $\underline{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}$  и  $\underline{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2}$ .

Из (17.7) видно, что  $\beta$  измеряется в рад/м и  $z_B$  в Ом.

Короче алгебраические суммы в (17.7) запишем так:

$$\underline{U} = \underline{U}_{\text{пр}} + \underline{U}_{\text{обр}}; \quad \underline{I} = \underline{I}_{\text{пр}} - \underline{I}_{\text{обр}} \quad (17.8)$$

и рассмотрим физический смысл слагаемых.

### 17.3. ВОЛНЫ В ЛИНИИ БЕЗ ПОТЕРЬ

**а) Прямая волна.** Запишем мгновенные значения первых слагаемых решений (17.7), т. е. слагаемых

$$\underline{U}_{\text{пр}} = A_1 e^{j(-\beta x + \psi_1)}; \quad (17.9a)$$

$$\underline{I}_{\text{пр}} = \frac{A_1}{z_B} e^{j(-\beta x + \psi_1)}. \quad (17.9b)$$

По правилу перехода к мгновенным значениям (§ 10.3)

$$u_{\text{пр}}(x, t) = A_{1m} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) = U_{\text{пр}m} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1); \quad (17.9в)$$

$$i_{\text{пр}}(x, t) = \frac{A_{1m}}{z_B} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) = I_{\text{пр}m} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1), \quad (17.9г)$$

где  $U_{\text{пр}m} = A_{1m}$  и  $I_{\text{пр}m} = A_{1m}/z_B$  — амплитуды этих составляющих напряжения и тока;  $\psi_1$  — начальная фаза напряжения  $u_{\text{пр}}(x, t)$  и тока  $i_{\text{пр}}(x, t)$  в начале линии ( $x=0$ ).

В отличие от синусоидальных величин для цепей с сосредоточенными постоянными мгновенные значения напряжения и тока (17.9) зависят не только от времени  $t$ , но и от координаты  $x$  — расстояния от начала линии, что указано в их обозначениях  $u_{\text{пр}}(x, t)$  и  $i_{\text{пр}}(x, t)$ .

Зависимость напряжения от координаты  $x$  в некото-

рый момент времени  $t$  или распределение мгновенного значения напряжения вдоль линии в момент  $t$ , т. е.  $u_{\text{пр}}(x, t)$ , показана на рис. 17.3 (синусоида). В момент времени  $t' = t + \Delta t$  напряжение

$$u_{\text{пр}}(x, t') = U_{\text{пр}m} \sin(\omega t' - \beta x + \psi_1).$$

Эта зависимость показана штриховой линией на том же рис. 17.3 (тоже синусоида).

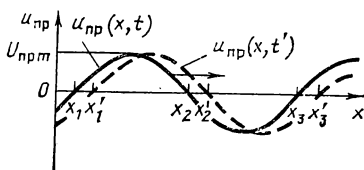


Рис. 17.3. Прямая волна в линии без потерь

В момент  $t$  напряжение  $u_{\text{пр}}(x, t)$  равно нулю в тех точках линии ( $x_1, x_2, x_3 \dots$ ), для которых  $\sin(\omega t - \beta x + \psi)$  равен нулю или целому числу  $\pi$ . В момент  $t'$  напряжение  $u_{\text{пр}}(x, t')$  равно нулю в тех точках линии ( $x'_1, x'_2, x'_3 \dots$ ), для которых  $\sin(\omega t' - \beta x + \psi_1)$  равен нулю или целому числу  $\pi$ . Так как  $t' > t$ , то и  $x'_1 > x_1, x'_2 > x_2$  и т. д.

Для тока можно построить такие же графики.

Таким образом,  $u_{\text{пр}}$  — это напряжение синусоидальной волны, которая за время  $\Delta t$  перемещается на расстояние  $\Delta x = x'_1 - x_1 = x'_2 - x_2 = \dots$  в сторону возрастающих значений координаты  $x$ , т. е. от начала к концу линии. Эта волна называется прямой;  $u_{\text{пр}}(x, t)$  — напряжение прямой волны, а  $i_{\text{пр}}(x, t)$  — ток прямой волны.

Величина  $\beta$  характеризует отличие фаз напряжения и тока волны в различных точках линии и поэтому называется коэффициентом фазы. Отношение напряжения к току волны найдем делением (17.9а) на (17.9б):

$$\frac{U_{\text{пр}}}{I_{\text{пр}}} = z_{\text{в}} \quad (17.10)$$

— волновое сопротивление линии без потерь. Так как у линии без потерь волновое сопротивление  $z_{\text{в}}$  — действительная величина, то напряжение и ток волны совпадают по фазе. Коэффициент фазы и волновое сопротивление вместе составляют вторичные параметры линии без потерь.

Мощность волны определяется так же, как и мощность

в цепях с сосредоточенными параметрами:

$$\underline{S}_{\text{пр}} = \underline{U}_{\text{пр}} \underline{I}_{\text{пр}}^* = P_{\text{пр}} + jQ_{\text{пр}},$$

причем  $Q_{\text{пр}}=0$ , так как напряжение и ток совпадают по фазе (как у резистора).

**б) Фазовая скорость и длина волны.** Фазой напряжения или тока, как и ранее, называется аргумент синусоидальной функции, т. е. по (17.9в) и (17.9г)  $\omega t - \beta x + \psi_1$ . При движении волны одна и та же фаза, например нулевое значение, наблюдается в точках, координата  $x$  которых становится все больше ( $x' > x$ ), что и показано на рис. 17.3. В момент времени  $t' = t + \Delta t$  та же фаза наблюдается в точках с координатой  $x' = x + \Delta x$ , т. е.

$$\omega t - \beta x + \psi_1 = \omega t' - \beta x' + \psi_1 = \omega(t + \Delta t) - \beta(x + \Delta x) + \psi_1$$

или после сокращений

$$0 = \omega \Delta t - \beta \Delta x,$$

откуда найдем скорость движения волны вдоль линии:

$$c = \Delta x / \Delta t = \omega / \beta \quad (17.11)$$

(за время  $\Delta t$  волна проходит путь  $\Delta x$ ).

Эта скорость называется фазовой скоростью волны. Наибольшая скорость получается в воздушной линии без потерь:  $c = c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \approx 3 \cdot 10^8$  м/с (скорость света в вакууме).

У всех воздушных линий без потерь между ее первичными параметрами  $L_0$  и  $C_0$  существует одно и то же соотношение  $L_0 C_0 = 1/c_0^2$ , причем для двухпроводной линии

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln(2D/d); \quad C_0 = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln(2D/d)},$$

где  $D$  — расстояние между проводами;  $d$  — диаметр провода.

В кабеле без потерь скорость значительно меньше:

$$c = c_0 / \sqrt{\epsilon_r \mu_r}, \quad (17.12)$$

где  $\epsilon_r$  и  $\mu_r$  — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости изоляции жил кабеля.

Длиной волны  $\lambda$  называется расстояние между двумя ближайшими точками линии, в которой фазы напряжения или тока в любой момент времени различаются на  $2\pi$ , например точки  $x_2$  и  $x_1$  или  $x_3$  и  $x_1$  на рис. 17.3. Длину волны можно еще определить как путь, который про-

ходит волна за период  $T=1/f$  изменения напряжения или тока:

$$\lambda = cT = c/f \quad (17.13a)$$

или с учетом (17.11)

$$\lambda = \omega/\beta f = 2\pi/\beta. \quad (17.13b)$$

Например, для воздушной линии электропередачи ( $f=50$  Гц), считая  $c=3 \cdot 10^8$  м/с, получаем  $\lambda=6000$  км. Для воздушной линии, которая соединяет радиопередатчик, работающий на частоте 30 МГц, с антенной, длина волны  $\lambda=10$  м и т. д.

**в) Обратная волна.** Запишем мгновенные значения вторых слагаемых решений (17.7):

$$\begin{aligned} u_{\text{обр}}(x, t) &= A_{2m} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2) = \\ &= U_{\text{обpm}} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2); \end{aligned} \quad (17.14a)$$

$$\begin{aligned} i_{\text{обр}}(x, t) &= \frac{A_{2m}}{z_{\text{в}}} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2) = \\ &= I_{\text{обpm}} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2), \end{aligned} \quad (17.14b)$$

где  $U_{\text{обpm}} = A_{2m}$  и  $I_{\text{обpm}} = A_{2m}/z_{\text{в}}$ .

Фазы напряжения или тока в (17.14) отличаются от фаз в (17.9) только знаком перед слагаемым  $\beta x$ . Это значит, что в момент времени  $t' > t$  та же фаза получится в точке, для которой координата  $x' < x$ , а не  $x' > x$ .

Таким образом, напряжение и ток (17.14) — это напряжение и ток волны, которая движется в сторону убывающих значений координаты  $x$ , т. е. от конца линии к ее началу, и называется обратной (встречной). Фазовая скорость и длина волны те же, что и для прямой волны. Мощность

$$S_{\text{обр}} = U_{\text{обр}} I_{\text{обр}}^* = P_{\text{обр}} + jQ_{\text{обр}},$$

причем  $Q_{\text{обр}} = 0$ .

Прямая и обратная волны называются еще бегущими (перемещаются вдоль линии).

**г) Зависимость режима работы линии от нагрузки.** Предположим, как и ранее, что в начале ( $x=0$ ) линии длиной  $l$  с известными вторичными параметрами  $\beta$  и  $z_{\text{в}}$  включен источник питания с напряжением  $U_1$ , а в конце приемник с сопротивлением  $Z_{\text{н}}$  (рис. 17.1). Определим режим работы линии при заданном (требуемом) напряжении приемника  $U_2$ .

Ток в конце линии

$$\underline{I}_2 = \underline{U}_2 / \underline{Z}_B. \quad (17.15)$$

Так как задан режим в конце линии, то введем координату  $y = l - x$ , отсчитываемую от конца линии, и в (17.7) заменим  $x$  через  $l - y$ :

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-j\beta(l-y)} + \underline{A}_2 e^{j\beta(l-y)} = \underline{B}_1 e^{j\beta y} + \underline{B}_2 e^{-j\beta y}; \quad (17.16a)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{z}_B} e^{-j\beta(l-y)} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{z}_B} e^{j\beta(l-y)} = \frac{\underline{B}_1}{\underline{z}_B} e^{j\beta y} - \frac{\underline{B}_2}{\underline{z}_B} e^{-j\beta y}, \quad (17.16b)$$

где

$$\underline{B}_1 = \underline{A}_1 e^{-j\beta l}; \quad \underline{B}_2 = \underline{A}_2 e^{j\beta l} \quad (17.17)$$

— новые постоянные.

В конце линии задано  $\underline{U}_2$  и известен ток  $\underline{I}_2$  (17.15), а согласно (17.16) при  $y=0$

$$\underline{U}_2 = \underline{B}_1 + \underline{B}_2; \quad \underline{I}_2 = \underline{B}_1 / \underline{z}_B - \underline{B}_2 / \underline{z}_B,$$

откуда

$$\underline{B}_1 = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{z}_B}{2}; \quad \underline{B}_2 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{z}_B}{2}. \quad (17.18)$$

Следовательно, по (17.16) напряжение

$$\underline{U} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{z}_B}{2} e^{j\beta y} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{z}_B}{2} e^{-j\beta y} = \underline{U}_{\text{пр}} + \underline{U}_{\text{обр}} \quad (17.19)$$

или

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta y + j \underline{I}_2 \underline{z}_B \sin \beta y; \quad (17.20)$$

ток

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{z}_B}{2 \underline{z}_B} e^{j\beta y} - \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{z}_B}{2 \underline{z}_B} e^{-j\beta y} = \underline{I}_{\text{пр}} - \underline{I}_{\text{обр}} \quad (17.21)$$

или

$$\underline{I} = j \frac{\underline{U}_2}{\underline{z}_B} \sin \beta y + \underline{I}_2 \cos \beta y. \quad (17.22)$$

Здесь учтено, что  $1/2 (e^{jx} + e^{-jx}) = \cos x$ ;  $1/2 (e^{jx} - e^{-jx}) = j \sin x$  (формулы Эйлера).

В частности, в начале линии ( $y = l$ ) по (17.20) и (17.22) напряжение и ток

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cos \beta l + j \underline{I}_2 \underline{z}_B \sin \beta l; \quad (17.23a)$$

$$\underline{I}_1 = j \frac{\underline{U}_2}{\underline{z}_B} \sin \beta l + \underline{I}_2 \cos \beta l. \quad (17.23b)$$

Входное сопротивление нагруженной линии, по определению,  $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{U}_1 / \underline{I}_1$  или с учетом (17.23)

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = z_{\text{в}} \frac{\underline{U}_2 \cos \beta l + j \underline{I}_2 z_{\text{в}} \sin \beta l}{j \underline{U}_2 \sin \beta l + \underline{I}_2 z_{\text{в}} \cos \beta l}$$

и после подстановки  $\underline{U}_2 = \underline{Z}_{\text{н}} \underline{I}_2$  и сокращения  $\underline{I}_2$  получается

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = z_{\text{в}} \frac{\underline{Z}_{\text{н}} \cos \beta l + j z_{\text{в}} \sin \beta l}{j \underline{Z}_{\text{н}} \sin \beta l + z_{\text{в}} \cos \beta l} = z_{\text{в}} \frac{\underline{Z}_{\text{н}} + j z_{\text{в}} \operatorname{tg} \beta l}{z_{\text{в}} + j \underline{Z}_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta l}. \quad (17.24)$$

Как видно из (17.24), входное сопротивление линии в общем случае комплексное. В частных случаях короткого замыкания ( $\underline{Z}_{\text{н}} = 0$ ) и холостого хода ( $\underline{Z}_{\text{н}} \rightarrow \infty$ ) получается соответственно

$$\underline{Z}_{\text{к}} = j z_{\text{в}} \operatorname{tg} \beta l; \quad (17.24a)$$

$$\underline{Z}_{\text{х}} = -j z_{\text{в}} \operatorname{ctg} \beta l, \quad (17.24b)$$

т.е. реактивные (индуктивное при  $\operatorname{tg} \beta l > 0$  и  $\operatorname{ctg} \beta l < 0$  или емкостное при  $\operatorname{tg} \beta l < 0$  и  $\operatorname{ctg} \beta l > 0$ ).

После перемножения (17.24a) и (17.24b) получается

$$z_{\text{в}} = \sqrt{\underline{Z}_{\text{к}} \underline{Z}_{\text{х}}}.$$

**д) Согласованная нагрузка.** При сопротивлении приемника, равном волновому сопротивлению линии  $\underline{Z}_{\text{н}} = z_{\text{в}}$ , нагрузка называется согласованной. При согласованной нагрузке ток  $\underline{I}_2 = \underline{U}_2 / z_{\text{в}}$ , т.е.  $\underline{U}_2 - \underline{I}_2 z_{\text{в}} = 0$ , поэтому по (17.19) и (17.21) получаем  $U_{\text{обр}} = 0$  и  $I_{\text{обр}} = 0$ . Следовательно, обратной волны нет, т.е. можно сказать, что прямая волна *не отражается* от конца линии, так как не возникает обратная волна. В любой момент времени получаются синусоидальные распределения напряжения и тока вдоль линии, как на рис. 17.3. Напряжение и ток в линии по (17.19) и (17.21)

$$\underline{U} = \underline{U}_2 e^{j\beta y}; \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{z_{\text{в}}} e^{j\beta y} \quad (17.25)$$

и, в частности, в начале линии

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 e^{j\beta l}; \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{z_{\text{в}}} e^{j\beta l}. \quad (17.25a)$$

Входное сопротивление линии

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{U}_1 / \underline{I}_1 = z_{\text{в}}, \quad (17.24b)$$

т.е. равно волновому сопротивлению.

Мощности приемника

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = r_n I_2^2 = U_2^2 / r_n = P_2;$$

источника

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_2^* = U_2 e^{j\beta l} \frac{U_2^*}{z_B} e^{-j\beta l} = \frac{U_2^2}{z_B} e^{j0} = \frac{U_2^2}{r_n} = P_2$$

(по определению, произведение вектора на сопряженный вектор равно квадрату модуля).

Мощность приемника активная, так как сопротивление нагрузки  $r_n$  активное. Источник развивает активную мощность, равную активной мощности приемника (линия без потерь).

**Пример 17.1.** Воздушная линия без потерь длиной 10 м присоединена к генератору с напряжением  $U_1 = 12$  В и имеет согласованную нагрузку. Волновое сопротивление линии 600 Ом. Определить ток в сопротивлении нагрузки. Построить графики распределения действующих значений напряжения и тока вдоль линии.

**Решение.** В (17.25) множитель  $e^{j\beta y}$  и в (17.25а) множитель  $e^{j\beta l}$  изменяют только фазу рассчитываемых величин. Поэтому для действующих (не комплексных) значений по (17.25а)

$$U_1 = U_2 = 12 \text{ В}; \quad I_1 = U_2 / z_B = U_1 / z_B$$

и по (17.25)

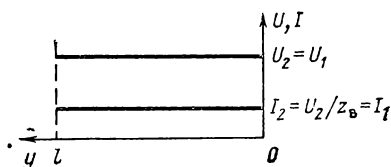
$$U = U_2; \quad I = U_2 / z_B = U_1 / z_B.$$

Ток в конце линии

$$I_2 = U_2 / r_n = U_2 / z_B = I = I_1 = 12 / 600 = 0,02 \text{ А}.$$

Следовательно, действующие значения напряжения и тока вдоль линии с согласованной нагрузкой не изменяются (рис. 17.4), так как

Рис. 17.4. Распределение напряжения и тока в линии без потерь при согласованной нагрузке



в линии есть только прямая волна, амплитуда которой при отсутствии потерь остается постоянной.

**е) Несогласованная нагрузка линии.** При несогласованной нагрузке в линии из-за отражения в конце есть и обратная волна, амплитуда или действующее значение которой зависит от степени несогласованности.

Степень несогласованности оценивают коэффициентом



ентом отражения, который равен отношению напряжений или токов обратной и прямой волн в конце линии:

$$\underline{\rho} = \underline{U}_{2обр}/\underline{U}_{2пр} = \underline{I}_{2обр}/\underline{I}_{2пр}. \quad (17.26a)$$

Из (17.19) или (17.21) находим, что

$$\underline{\rho} = (\underline{U}_2 - z_b \underline{I}_2) / (\underline{U}_2 + z_b \underline{I}_2)$$

или с учетом равенства  $\underline{U}_2 = \underline{Z}_H \underline{I}_2$

$$\underline{\rho} = (\underline{Z}_H - z_b) / (\underline{Z}_H + z_b), \quad (17.26б)$$

откуда, в частности, видно, что при согласованной нагрузке  $\underline{\rho} = 0$  и обратной волны нет.

При коротком замыкании в конце линии ( $\underline{Z}_H = 0$ ) получается коэффициент отражения  $\underline{\rho}_к = -1$ , при холостом ходе ( $\underline{Z}_H \rightarrow \infty$ ) получается  $\underline{\rho}_х = 1$ . При любой другой нагрузке из (17.26б) следует, что  $\underline{\rho} = |\underline{\rho}| < 1$ , т.е. амплитуда (или действующее значение) отраженной (обратной) волны меньше, чем у падающей (прямой).

Если вольтметром измерить распределение действующего значения напряжения вдоль линии при несогласованной нагрузке, то можно построить зависимость  $U(x)$ , показанную на рис. 17.5, или зависимость  $U(y)$ . Максимумы

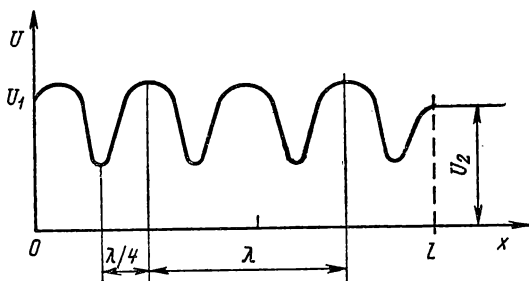


Рис. 17.5. Распределение напряжения в линии без потерь при несогласованной нагрузке

и минимумы напряжения чередуются, расстояния между ними равны  $\lambda/4$ . График с максимумами и минимумами получается, так как в разных точках линии встречается прямая и обратная волны, имеющие разные амплитуды ( $U_{обр\ m} < U_{пр\ m}$  при  $\rho < 1$ ) и не одинаковые фазы (векторные диаграммы нужно строить для каждой точки отдельно, причем получаются различные углы поворота вектора напря-

жения обратной волны относительно вектора напряжения прямой волны). Распределение действующих значений тока вдоль линии аналогично показанному на рис. 17.5, но у графика тока максимумы там, где минимумы напряжения, и наоборот, что объясняется различными знаками перед слагаемыми  $\underline{U}_{обр}$  и  $\underline{I}_{обр}$  в (17.19) и (17.21).

**Пример 17.2.** У воздушной линии без потерь с волновым сопротивлением 600 Ом в активном сопротивлении нагрузки  $r_n=1200$  Ом ток  $I_2=0,1$  А. Найти максимальные и минимальные действующие значения напряжения и расстояния точек от конца линии, в которых наблюдаются эти значения напряжения. Построить качественно график  $U(y)$ .

**Решение.** Напряжение максимальное в тех точках, где у прямой и встречной волн напряжения имеются одинаковые фазы, и минимальное, где их фазы противоположны.

По определению (17.26) коэффициент отражения от конца линии без потерь с активным сопротивлением нагрузки

$$\rho = \frac{\underline{U}_{2обр}}{\underline{U}_{2пр}} = \frac{r_n - z_B}{r_n + z_B} = \frac{1200 - 600}{1200 + 600} = \frac{1}{3} > 0$$

не комплексный, а действительный положительный. Следовательно,  $\underline{U}_{2обр} = \underline{U}_{2пр}/3$ , т.е. напряжения прямой и обратной волн в конце линии совпадают по фазе и различаются в 3 раза. По (17.8) получим

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{2пр} + \underline{U}_{2обр} = \frac{4}{3} \underline{U}_{2пр}$$

и по закону Ома

$$\underline{U}_2 = r_n I_2 = 1200 \cdot 0,1 = 120 \text{ В}$$

(у тока  $I_2$  выбрана нулевая начальная фаза). Следовательно,  $120 = (4/3) \underline{U}_{2пр}$ , откуда  $\underline{U}_{2пр} = 90$  В, а, как получено,  $\underline{U}_{2обр} = \underline{U}_{2пр}/3$ , т.е.  $\underline{U}_{2обр} = 30$  В.

Так как в конце линии напряжения прямой и обратной волн совпадают по фазе (нулевые начальные фазы, как и у тока  $I_2$ ), то напряжение  $U_2 = U_{max}$ . На расстоянии  $\lambda/4$  от конца линии фаза напряжения каждой из волн изменяется на  $\pi/2$  (напомним, что на расстоянии  $\lambda$  по определению фаза изменяется на  $2\pi$ ). У обратной волны фаза увеличится на  $\pi/2$ , поскольку обратная волна движется от конца, а у прямой уменьшится на  $\pi/2$ , поскольку волна движется к концу (в другом направлении, чем обратная). Разность фаз составит  $\pi$ , т.е. напряжения  $\underline{U}_{пр}$  и  $\underline{U}_{обр}$  на расстоянии  $\lambda/4$  от конца имеют противоположные фазы и

$$U(\lambda/4) = U_{min} = 90 - 30 = 60 \text{ В.}$$

На расстоянии  $\lambda/2$  от конца напряжения прямой и обратной волн опять совпадают по фазе, т.е.

$$U(\lambda/2) = U_{max} = 90 + 30 = 120 \text{ В}$$

(рис. 17.6) и т.д.

Построить график можно по (17.20). Так как первое слагаемое действительная величина, а второе — мнимая, то

$$U = \sqrt{(U_2 \cos \beta y)^2 + (I_2 z_n \sin \beta y)^2}$$

(не синусоида).

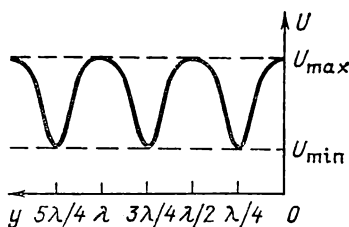


Рис. 17.6. График напряжения к примеру 17.2

Если линия состоит из нескольких участков с различными первичными параметрами, то в месте соединения линий волна частично отражается, а частично проходит в следующую линию. Коэффициент отражения в конце каждой линии вычисляется по (17.26б), где вместо сопротивления нагрузки нужно подставить входное сопротивление следующей линии и в качестве  $z_a$  выбрать волновое сопротивление рассматриваемой линии.

Отношение напряжения или тока проходящей в следующую линию волны к напряжению или току прямой волны в рассматриваемой линии называется коэффициентом преломления.

**ж) Стоячие волны.** При согласованной нагрузке обратной волны нет и действующее значение напряжения (и тока) вдоль линии не изменяется (рис. 17.4). Чем больше коэффициент отражения  $\rho$ , тем заметнее выражены максимумы и минимумы.

Покажем, что в предельных случаях холостого хода и короткого замыкания, получаются минимальные значения, равные нулю. При холостом ходе ток  $I_2=0$  и согласно (17.20) и (17.22)

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta y; \quad \underline{I} = j \frac{\underline{U}_2}{z_B} \sin \beta y. \quad (17.27)$$

Выберем нулевую начальную фазу  $y$  напряжения в конце линии, т. е. примем  $\underline{U}_2 = U_2$  (напомним, что  $y$  одной из синусоидально изменяющихся величин всегда можно выбрать начальную фазу, равную нулю). При этом по (17.27) получается, что напряжение  $\underline{U} = U_2 \cos \beta y$  или  $\underline{U}_m =$

$= U_{2m} \cos \beta y$  в любой точке линии действительная величина ( $\cos \beta y$  — действительная величина); следовательно, мгновенное значение надо написать с нулевой начальной фазой

$$u(y, t) = U_m \sin \omega t = (U_{2m} \cos \beta y) \sin \omega t. \quad (17.28a)$$

Ток (по 17.27) получается мнимой величиной ( $j = e^{j90^\circ}$ ), т. е. мгновенное значение надо записать с начальной фазой  $90^\circ$ :

$$i(y, t) = \left( \frac{U_{2m}}{z_B} \sin \beta y \right) \sin (\omega t + 90^\circ). \quad (17.28б)$$

Амплитуда напряжения  $U_{2m} |\cos \beta y|$  не одинакова в различных точках линии (зависит от  $y$ ) и распределяется по косинусоидальному закону. У действующего значения  $U = U_{2m} |\cos \beta y| / \sqrt{2}$  такое же распределение, которое может быть измерено вольтметром. В конце линии ( $y=0$ ) напряжение  $U_2 = U_{2m} / \sqrt{2}$  наибольшее (рис. 17.7, а). При

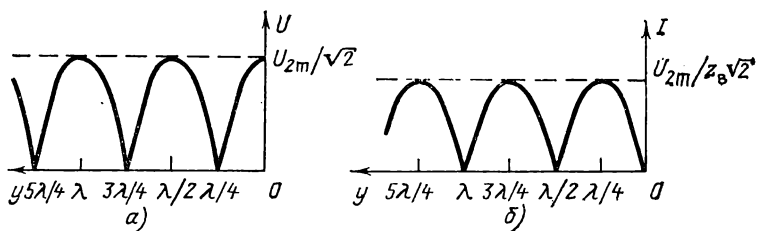


Рис. 17.7. Стоячие волны при коротком замыкании линии без потерь

перемещении вольтметра к началу линии напряжение сначала уменьшается (косинус уменьшается) и  $U=0$  при  $|\cos \beta y|=0$  или  $\beta y = \pi/2$ , т. е. при  $y = 2\beta/\pi = \lambda/4$ . Здесь учтено, что согласно (17.13б)  $\beta = 2\pi/\lambda$ . При  $y = \lambda/2$  получается  $|\cos \beta \lambda/2| = 1$ , т. е. напряжение снова наибольшее и равно  $U_{2m}/\sqrt{2}$ . Далее при  $y = 3\lambda/4$  снова  $|\cos \beta y|=0$  и получается  $U=0$ , при  $y = \lambda$  напряжение наибольшее и т. д.

В точках, где напряжение наибольшее, наблюдаются, как говорят, пучности напряжения, а в точках, где напряжение равно нулю, — узлы напряжения.

У тока распределение амплитуд и действующих значений вдоль линии происходит не по косинусоидальному, а по синусоидальному закону, т. е. пучности тока получают-

ся в тех точках, где находятся узлы напряжения, и наоборот (рис. 17.7, б).

В каждой точке напряжение и ток изменяются во времени как синусоидальные величины (17.28), но со сдвигом фаз. В моменты, когда напряжение максимальное, например в момент  $t_1$ , для которого  $\omega t_1 = 90^\circ$ , ток равен нулю, так как  $\sin(\omega t_1 + 90^\circ) = \sin 180^\circ = 0$ , и наоборот. Действующие значения (или амплитуды) этих синусоидальных напряжений и тока не одинаковые в различных точках линии, что и показано на рис. 17.7. Такое распределение напряжения и тока называют стоячей волной. В узлах напряжения получается  $u=0$  в любой момент времени, так как амплитуда равна нулю, в узлах тока получается  $i=0$  в любой момент времени.

Передачи энергии вдоль линии нет. На каждом участке линии длиной  $\lambda/4$  запасена энергия в магнитном и электрическом полях. Накопленная в магнитном поле энергия наибольшая, когда мгновенные значения тока достигают максимумов. В этот момент энергия электрического поля уменьшается до нулевого значения, так как напряжение равно нулю (сдвиг фаз между напряжением и током равен  $90^\circ$ ). Накопленная в электрическом поле энергия наибольшая, когда мгновенные значения напряжения максимальные. В этот момент времени энергия магнитного поля равна нулю. Таким образом, на каждом участке линии длиной  $\lambda/4$  происходит обмен энергией, накопленной в магнитном и электрическом полях (как в последовательном контуре при резонансе).

**Пример 17.3.** В начале коаксиального кабеля без потерь длиной 15 м включен генератор, амплитуда напряжения которого  $U_{1m} = 12$  В при частоте  $f = 5,30$  МГц. Волновое сопротивление кабеля равно 70 Ом, относительная диэлектрическая проницаемость изоляции  $\epsilon_r = 2$ . В конце кабель разомкнут. Построить график распределения действующего значения напряжения вдоль кабеля.

**Решение.** Длина волны по (17.13а) с учетом (17.12)

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r} f} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2} \cdot 5,30 \cdot 10^6} = 40 \text{ м.}$$

Коэффициент фазы по (17.13б)

$$\beta = 2\pi/\lambda = 2\pi/40 = \pi/20 \text{ рад/м.}$$

Напряжение в начале линии в режиме холостого хода по (17.27)

$$U_1 = U_2 |\cos \beta l|,$$

откуда напряжение в конце, которое в режиме холостого хода наибольшее в линии (пучность напряжения),

$$U_2 = \frac{U_1}{|\cos \beta l|} = \frac{12/\sqrt{2}}{|\cos 135^\circ|} = 12 \text{ В.}$$

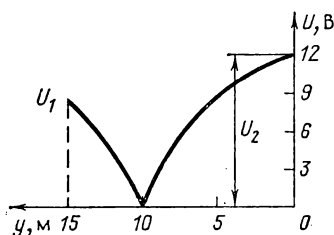
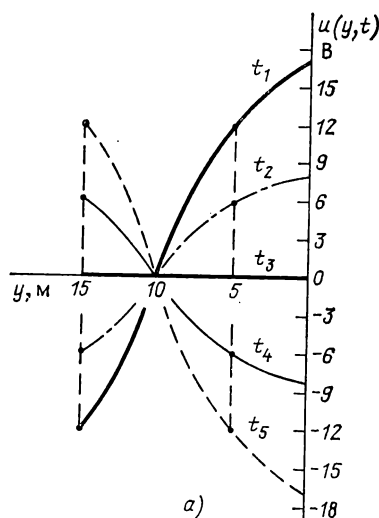


Рис. 17.8. График напряжения к примеру 17.3

Рис. 17.9. График напряжения к примеру 17.4



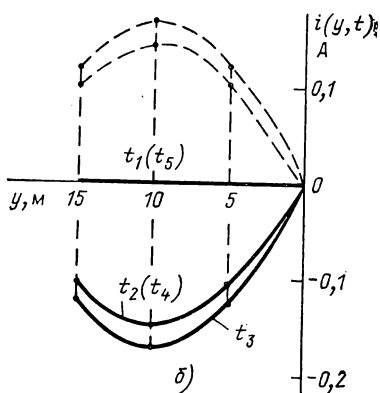
а)

Напряжение в начале линии  $U_1 = 12/\sqrt{2} = 8,48 \text{ В.}$

Распределение напряжения по (17.27)  $U = U_2 |\cos \beta y|$  показано на рис. 17.8. Из графика следует, что в режиме стоячих волн напряжение на отдельных участках может быть больше (и даже много больше) напряжения источника питания ( $U_2 > U_1$ ).

**Пример 17.4.** Для кабеля из предыдущей задачи построить распределение мгновенных значений напряжения и тока, считая начальную фазу напряжения в конце линии равной нулю, в моменты времени  $t_1 = T/4$ ,  $t_2 = 5T/12$ ,  $t_3 = T/2$ ,  $t_4 = 7T/12$ ,  $t_5 = 3T/4$ .

**Решение.** Амплитуда напряжения в конце линии  $U_{2m} = U_2 \sqrt{2} = 12 \sqrt{2} \text{ В.}$



б)

По (17.28а) мгновенное значение напряжения вдоль линии

$$u(y, t) = \left( 12 \sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{\lambda} y \right) \sin \omega t.$$

В момент  $t_1 = T/4$  получается  $\sin 2\pi f t_1 = \sin[(2\pi/T)T/4] = 1$  — наибольший, т. е. и напряжения в каждой точке линии, хотя и различные  $u(y, t_1) = 12\sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{\lambda} y$ , т. е. зависят от  $y$ , но достигают своих наибольших значений (рис. 17.9, а).

В частности, в конце линии ( $y=0$ ) напряжение  $u(0, t_1) = u_2(t_1) = 12\sqrt{2}$  В, при  $y=5 \text{ м} = \lambda/8$  напряжение  $u(\lambda/8, t_1) = 12\sqrt{2} \cos[(2\pi/\lambda) \times \lambda/8] = 12$  В, при  $y=10 \text{ м} = \lambda/4$  напряжение  $u(\lambda/4, t_1) = 12\sqrt{2} \times \cos[(2\pi/\lambda)\lambda/4] = 0$ , при  $y=l=15 \text{ м}$  напряжение  $u(l, t_1) = u_1(t_1) = 12\sqrt{2} \cos[(2\pi/\lambda)15] = -12$  В (рис. 17.9, а).

В момент  $t_2 = 5T/12$  получается  $\sin[(2\pi/T)5T/12] = 1/2$  и  $u(y, t_2) = 6\sqrt{12} \cos[(2\pi/\lambda)y]$ . В частности, в конце линии  $u_2(0, t_2) = u_2(t_2) = 6\sqrt{2}$  В, при  $y=5 \text{ м} = \lambda/8$  напряжение  $u(\lambda/8, t_2) = 6\sqrt{2} \cos[(2\pi/\lambda) \times \lambda/8] = 6$  В, при  $y=10 \text{ м} = \lambda/4$  напряжение  $u(\lambda/4, t_2) = 6\sqrt{2} \cos[(2\pi/\lambda) \times \lambda/4] = 0$ , при  $y=l=15 \text{ м}$  напряжение  $u(l, t_2) = u_1(t_2) = 6\sqrt{2} \cos[(2\pi/\lambda) \times 15] = -6$  В (рис. 17.9, а).

В момент  $t_3 = T/2$  получается  $\sin[(2\pi/T)T/2] = 0$ , т. е. в любой точке линии  $u(y, t_3) = 0$ . В момент  $t_4$  получается  $\sin[(2\pi/T)7T/12] = -1/2$  и  $u(y, t_4) = -6\sqrt{2} \cos[(2\pi/\lambda)y]$ . В частности,  $u_2(t_4) = -6\sqrt{2}$  В;  $u(\lambda/8, t_4) = -6$  В;  $u(\lambda/4, t_4) = 0$ ;  $u_1(t_4) = 6$  В (рис. 17.9, а).

В момент  $t_5 = 3T/4$  напряжение в каждой точке опять достигнет своего наибольшего значения, но по знаку обратному напряжению в момент  $t_1 = T/4$ . При  $t = t_3 + T/2 = T$  напряжение во всех точках равно нулю и т. д.

В любой точке получается пульсирующее во времени мгновенное значение напряжения (стоячая волна), а действующее равно наибольшему, деленному на  $\sqrt{2}$  (рис. 17.8), которое, конечно, не зависит от времени.

По (17.28б) ток

$$i(y, t) = \left( 0,171 \sin \frac{2\pi}{\lambda} y \right) \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

В момент  $t_1 = T/4$  получается  $\sin \left( \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = 0$ , т. е. ток во всех точках линии равен нулю (рис. 17.9, б) [а напряжение, как было показано, достигает наибольших значений (рис. 17.9, а)].

В момент  $t_2 = 5T/12$  получается  $\sin(5\pi/6 + \pi/2) = -0,866$  и ток

$i(y, t_2) = -0,148 \sin[(2\pi/\lambda)y]$ . В частности, в конце линии  $i(0, t_2) = i_2(t_2) = 0$  (как и должно быть у разомкнутой линии), при  $y = \lambda/8 = 5$  м ток  $i(\lambda/8, t_2) = -0,148 \sin \pi/4 = -0,105$  А, при  $y = \lambda/4$  ток  $i(\lambda/4, t_2) = -0,148$  А, при  $y = l = 15$  м ток  $i(l, t_2) = i_1(t_2) = -0,105$  А (рис. 17.9, б).

В момент  $t_3 = T/2$  получается  $\sin(\pi + \pi/2) = -1$  и ток  $i(y, t_3) = -0,171 \sin[(2\pi/\lambda)y]$ , в частности  $i(0, t_3) = i_2(t_3) = 0$ ;  $i(\lambda/8, t_3) = -0,121$  А;  $i(\lambda/4, t_3) = -0,171$  А;  $i(l, t_3) = i_1(t_3) = -0,121$  А.

В момент  $t_4$  получается  $\sin(7\pi/6 + \pi/2) = -0,866$  и ток  $i(y, t_4) = -0,148 \sin[(2\pi/\lambda)y]$ , т. е. распределение такое же, как в момент  $t_2$ . В момент  $t_5$  ток равен нулю во всех точках линии, и далее до момента  $t_5 + T/2$  будут получаться положительные значения тока (штриховые линии на рис. 17.9, б), т. е. в любой точке линии получается пульсирующее во времени мгновенное значение тока (стоячая волна).

При коротком замыкании напряжение  $U_2 = 0$  и согласно (17.20) и (17.22)

$$\underline{U} = jI_2 z_B \sin \beta y; \quad \underline{I} = I_2 \cos \beta y. \quad (17.29)$$

Переход к мгновенным значениям выполняется так же, как и для линии в режиме холостого хода. Только в качестве величины с нулевой начальной фазой проще выбрать ток в конце линии, т. е. считать  $I_2 = I_2$ . Для тока получаем

$$i = (I_{2m} \cos \beta y) \sin \omega t; \quad (17.30a)$$

для напряжения

$$u = (I_{2m} z_B \sin \beta y) \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (17.30b)$$

Сравнение с (17.28) показывает, что и в режиме короткого замыкания линии наблюдается стоячая волна. Только в конце линии ( $y=0$ ) равно нулю действующее значение не тока, а напряжения, так как при  $y=0$  согласно (17.29) получаем  $U_2 = 0$ , а ток наибольший  $I_2 = I_{2m}/\sqrt{2}$ . Распределение действующих значений напряжения вдоль линии аналогично построенному на рис. 17.7, б, а действующих значений тока — построенному на рис. 17.7, а. Графики мгновенных значений строятся аналогично полученным в примере 17.4.

Передачи энергии вдоль линии нет. Энергетические процессы такие же, как у линии в режиме холостого хода.

Стоячие волны получаются и при чисто реактивной нагрузке линии без потерь, т. е.  $Z_H = jx_H$ . Действительно, в этом случае коэффициент отражения (17.26б)

$$\underline{\rho} = (jx_H - z_B)/(jx_H + z_B)$$

и его абсолютное значение (отношение модулей числителя



и знаменателя)

$$\rho = \sqrt{x_n^2 + z_n^2} / \sqrt{x_n^2 + z_n^2} = 1.$$

Поэтому по (17.26а) действующие значения напряжения и тока обратной волны в конце линии равны действующим значениям напряжения и тока прямой волны (полное отражение). Соответственно равны и амплитуды напряжения и тока прямой и обратной волн. Вдоль линии наблюдаются узлы и пучности напряжения и тока. Но в конце линии нет ни узла, ни пучности напряжения или тока, так как должно быть

$$\underline{U}_2 = jx_n I_2,$$

а сопротивление  $x_n$  не равно нулю (как при коротком замыкании) и не равно бесконечности (как при холостом ходе).

**Пример 17.5.** У кабеля из примеров 17.3 и 17.4 узел напряжения (рис. 17.8 и 17.9, а) и пучность тока (рис. 17.9, б) находятся на расстоянии  $\lambda/4=10$  м от его разомкнутого конца. Если в конце кабеля включить реактивный элемент, то узел напряжения и пучность тока сместятся. Определить, на сколько сместятся узел напряжения и пучность тока, если в конце кабеля включен конденсатор емкостью  $C=248$  пФ  $=248 \cdot 10^{-12}$  Ф.

**Решение.** Конденсатор можно заменить эквивалентным отрезком разомкнутой линии, так как входное сопротивление разомкнутой линии (17.24б) с длиной  $l$ , при которой  $\operatorname{ctg} \beta l > 0$  получается отрицательным реактивным, как и сопротивление конденсатора  $Z = -j/\omega C$ . Выбрав  $Z_x = Z$ , найдем наименьшую длину отрезка разомкнутого кабеля  $l_0$ , при которой это равенство выполняется:  $-jz_n \operatorname{ctg} \beta l_0 = -j/\omega C$  или  $z_n \operatorname{ctg} \beta l_0 = 1/2\pi f C$  или  $\operatorname{tg} \beta l_0 = 2\pi f C z_n = 0,577$  и  $\beta l_0 = \pi/6$  или  $2\pi l_0/\lambda = \pi/6$ , откуда наименьшая длина отрезка  $l_0 = 3,33$  м.

Таким образом, кабель с конденсатором в конце можно заменить эквивалентным разомкнутым длиной  $l + l_0 = 15 + 3,33 = 18,33$  м (рис. 17.10).

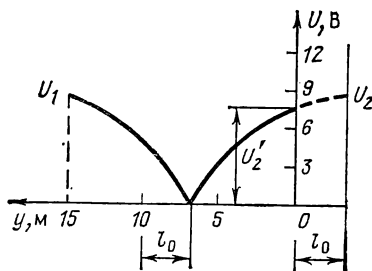


Рис. 17.10. График напряжения к примеру 17.5

В конце эквивалентного кабеля будут пучность напряжения и узел тока (режим холостого хода).

Узел напряжения у разомкнутого кабеля примера 17.3 был на расстоянии  $\lambda/4=10$  м от конца (рис. 17.8). У эквивалентного кабеля узел напряжения будет также на расстоянии  $\lambda/4=10$  м от его конца, т. е. узел напряжения сместится на  $l_0=3,33$  м к концу кабеля (рис. 17.10). Напряжение в конце эквивалентного кабеля (17.27) при том же напряжении  $U_1$  в начале будет равно  $U_2=U_1/|\cos \beta(l+l_0)|=8,78$  В. Напряжение в конце нагруженного кабеля по (17.27)  $U'_2=U_2|\cos \beta l_0|=7,60$  В.

#### 17.4. ЛИНИЯ С ПОТЕРЯМИ

Если потерями в линии нельзя пренебречь, то в схему

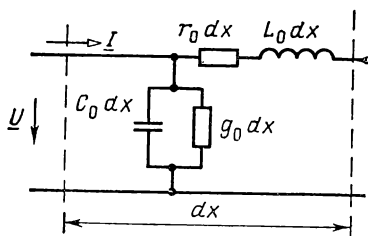


Рис. 17.11. Элемент двухпроводной линии с потерями

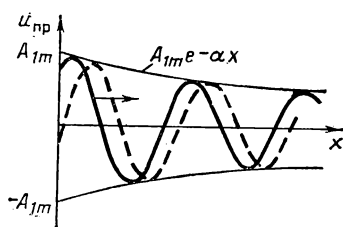


Рис. 17.12. Прямая волна в линии с потерями

замещения каждого элементарного участка однородной двухпроводной линии нужно дополнительно включить сопротивление  $r_0 dx$  и проводимость  $g_0 dx$  (рис. 17.11). Сопротивление потерь в прямом и обратном проводах на единицу длины линии  $r_0$  изображают включенным в один из проводов. Проводимость на единицу длины линии  $g_0$  учитывает потери в изоляции проводов.

Продольное сопротивление на единицу длины линии с потерями

$$\underline{Z}_0 = r_0 + j\omega L_0. \quad (17.31)$$

Поперечная проводимость между проводами на единицу длины линии с потерями

$$\underline{Y}_0 = g_0 + j\omega C_0. \quad (17.32)$$

Эти новые значения продольного сопротивления и поперечной проводимости нужно принять во внимание в урав-

нениях линии (17.16) и (17.26) и в их решениях (17.3) и (17.4). У линии без потерь было получено, что  $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}$  — мнимая величина (17.5), а  $\underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0}$  — действительная величина (17.6). Для линии с потерями

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta \quad (17.33)$$

— комплексная величина. Волновое сопротивление

$$\underline{Z}_B = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)/(g_0 + j\omega C_0)} = z_B e^{j\theta} \quad (17.34)$$

тоже комплексная величина с модулем  $z_B$  и аргументом  $\theta$ .

Подставим значения  $\underline{\gamma}$  (17.33) и  $\underline{Z}_B$  (17.34) в решения (17.3) уравнений линии:

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + \underline{A}_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x}; \quad (17.35a)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_B} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_B} e^{\alpha x} e^{j\beta x}, \quad (17.35b)$$

где по-прежнему постоянные  $\underline{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}$  и  $\underline{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2}$  в общем случае комплексные величины.

Как и для линии без потерь, решение (17.35) представляет собой наложение двух волн: прямой с напряжением  $\underline{U}_{пр}$  и током  $\underline{I}_{пр}$  и обратной с напряжением  $\underline{U}_{обр}$  и током  $\underline{I}_{обр}$  (17.8).

Запишем мгновенные значения напряжения и тока прямой волны по правилу перехода к мгновенным значениям (§ 10.3):

$$u_{пр}(x, t) = A_{1m} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1); \quad (17.36)$$

$$i_{пр}(x, t) = \frac{A_{1m}}{z_B} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \theta). \quad (17.37)$$

Зависимости напряжения прямой волны от координаты  $x$  в некоторые моменты времени  $t$  (сплошная линия) и  $t' > t$  (штриховая линия) показаны на рис. 17.12. Волна перемещается от начала к концу линии. Но амплитуды напряжения (рис. 17.12) и тока при движении волны не остаются постоянными, а уменьшаются по экспоненциальному закону, что определяется множителем  $e^{-\alpha x}$ . Чем больше значение  $\alpha$ , тем быстрее уменьшаются амплитуды. Поэтому  $\alpha$  (Нп/м) называется коэффициентом ослабления, а  $\beta$ , как и у линии без потерь, коэффициентом фазы. Комплексная величина  $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$  называется коэффи-

циентом распространения. Она характеризует и ослабление (затухание), и изменение фазы.

Фазы напряжения и тока не совпадают, так как волновое сопротивление комплексное. Коэффициенты распространения, ослабления, фазы и волновое сопротивление или вторичные параметры линии зависят от первичных параметров линии на единицу длины  $r_0$ ,  $L_0$ ,  $g_0$ ,  $C_0$  и частоты.

У обратной волны амплитуды напряжения и тока наибольшие в конце линии и уменьшаются вдоль линии от ее конца к началу. Обратная волна отсутствует при согласованной нагрузке.

Таким образом, каждая из волн затухает из-за потерь в линии. Скорость волны можно найти по (17.11), длину волны по (17.13). Скорость волны и у воздушной линии получается меньше скорости света в вакууме.

### 17.5. ЛИНИЯ БЕЗ ИСКАЖЕНИЙ

В гл. 14 было отмечено, что в радиотехнике, электронике, связи напряжения и токи (сигналы) несинусоидальные. Для периодических напряжений и токов можно определить спектральный состав (§ 14.3) разложением в ряд Фурье на гармонические (синусоидальные и косинусоидальные) составляющие.

В линии без потерь амплитуды гармонических составляющих при движении волны вдоль линии не затухают, так как коэффициент ослабления  $\alpha=0$ . Фазовая скорость (17.12) не зависит от частоты. Поэтому, как говорят, нет ни амплитудных, ни фазовых искажений передаваемых сигналов. Сигнал в приемнике при согласованной нагрузке такой же, как и в начале линии.

При определенных условиях и в линии с потерями при согласованной нагрузке искажения сигналов могут быть устранены, а именно при соотношении первичных параметров

$$r_0/L_0 = g_0/C_0. \quad (17.38)$$

Действительно, в этом случае по (17.33) получается

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{r_0 g_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0},$$

т.е.  $\alpha=\text{const}$  и амплитудных искажений нет (все гармонические составляющие сигналов ослабляются одинаково), фазовая скорость по (17.11)  $c=\omega/\beta=1/\sqrt{L_0 C_0}=\text{const}$  и нет фазовых искажений.

Волновое сопротивление (согласованная нагрузка) такой линии по (17.34)  $Z_{\text{в}} = \sqrt{L_0/C_0}$ , т.е. активное и не зависит от частоты, как и у линии без потерь.

Большинство реальных линий передачи сигналов (информации) не относятся к неискажающим, так как для получения условия (17.38) нужна более сложная конструкция линии, что увеличивает ее стоимость. Искажения сигналов устраняют при помощи специальных четырехполюсников и корректирующих контуров сразу для всего тракта передачи сигналов, который состоит не только из линии, но и фильтров, усилителей, трансформаторов, аттенуаторов и других устройств.

## 17.6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДЛИННЫХ ЛИНИЯХ

В длинных линиях, так же как и в цепях с сосредоточенными параметрами, после коммутаций (включений и отключений источников питания, приемников и отдельных участков) не сразу получается установившийся режим. Кроме того, установившийся режим нарушается при обрывах и коротких замыканиях линии, которые можно считать аварийными коммутациями.

Переходный режим в линии, как и в цепях с сосредоточенными параметрами, продолжается теоретически бесконечно долго. Практически длительность переходного процесса зависит от первичных параметров самой линии, ее длины, сопротивлений источников питания и приемников.

Как бы ни мала была длительность переходного процесса, его необходимо учитывать при анализе работы многих установок, содержащих длинные линии. В линиях электропередачи во время переходного процесса возможны перенапряжения и сверхтоки, в линиях связи — искажения передаваемых сигналов. При неправильном выборе оборудования перенапряжения могут привести к пробое изоляции, к разрядам между отдельными частями установок; сверхтоки — к срабатыванию защиты и отключению установок, к порче приборов и аппаратов, обгоранию контактов; искажения сигналов — к потере информации и в результате к исполнению ложных команд в системах телеуправления, получению ошибочных данных в системах телеизмерения и т. д.

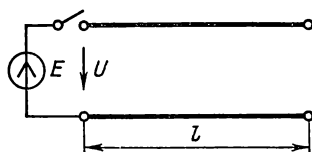
Переходный процесс наблюдается в линии и при действии источников непериодических ЭДС. Такие ЭДС со-

здаются в аппаратуре телеграфной и телефонной связи, телемеханики, телевидения, радиовещания, в устройствах импульсной техники, измерительной аппаратуре и др. Непериодические ЭДС возникают в воздушных линиях при грозовых разрядах, наводятся в линиях передачи информации при коммутациях в параллельно проходящих линиях электропередачи.

### 17.7. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ ВОЛН ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Рассмотрим один из случаев движения волн самой простой формы при подключении источника постоянного напряжения  $U=E=\text{const}$  (внутреннее сопротивление равно нулю) к линии без потерь, разомкнутой на конце (рис. 17.13).

Рис. 17.13. Подключение источника ЭДС к линии без потерь, разомкнутой на конце



До замыкания ключа в линии не было ни напряжения, ни тока. После замыкания ключа в линии возникает прямая волна с напряжением  $u_{\text{пр1}}=U$  и током  $i_{\text{пр1}}=U/z_{\text{в}}=I$  прямоугольной формы, так как  $U=\text{const}$ . Распределение напряжения и тока в линии в некоторый момент времени  $t_1$ , когда волна прошла путь  $l/4$ , т.е. еще не достигла конца линии, показано на рис. 17.14, а. Через время  $t_2=l/c$ , где  $c$  — скорость волны, она достигнет конца линии (рис. 17.14, б), после чего возникнет обратная (отраженная) волна.

При холостом ходе коэффициент отражения  $\rho_{\text{х}}=1$ , т.е.  $u_{\text{обр1}}=u_{\text{пр1}}=U$ ,  $i_{\text{обр1}}=i_{\text{пр1}}=I$ . Напряжение  $u_{\text{пр1}}+u_{\text{обр1}}=2U$  и ток  $i=i_{\text{пр1}}-i_{\text{обр1}}=0$  в момент  $t_3$ , когда обратная волна прошла путь  $l/4$  к началу линии, показаны на рис. 17.14, в.

Когда обратная волна достигнет через время  $2t_2$  начала линии, она отражается, как от короткозамкнутого конца (у источника внутреннее сопротивление равно нулю), т.е. коэффициент отражения  $\rho_{\text{к}}=-1$ . Возникает новая прямая волна с напряжением и током  $u_{\text{пр2}}=-u_{\text{обр1}}=$

$= -U$ ,  $i_{np2} = -i_{обp1} = -I$ . Распределение напряжения  $u_{np1} + u_{обp1} + u_{np2} = U$  и тока  $i_{np1} - i_{обp1} + i_{np2} = -I$  в момент  $t_4$ , когда новая волна прошла путь  $l/2$  к концу линии, по-

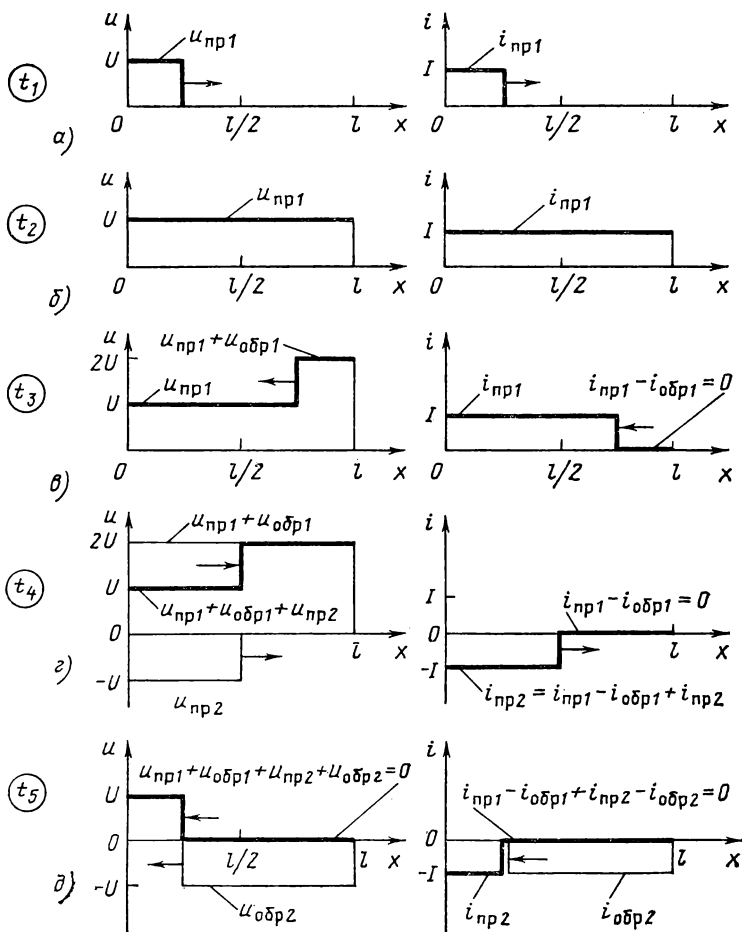


Рис. 17.14. Распределения напряжения и тока вдоль линии в различные моменты времени

казано на рис. 17.14, г. Волна с напряжением  $u_{np2}$  и током  $i_{np2}$  достигнет разомкнутого конца линии в момент  $3t_2$  и, так как  $\rho_x = 1$ , то возникнет вторая обратная волна с

напряжением  $u_{обр2} = u_{пр2} = -U$  и током  $i_{обр2} = i_{пр2} = -I$ . Распределение напряжения  $u_{пр1} + u_{обр1} + u_{пр2} + u_{обр2}$  и тока  $i_{пр1} - i_{обр1} + i_{пр2} - i_{обр2}$  в момент  $t_5$ , когда вторая обратная волна прошла путь  $3l/4$  к началу линии, показано на рис. 17.14, д.

Когда вторая обратная волна достигнет начала линии, то напряжение и ток отсутствуют ( $u=0, i=0$ ), т. е. получается режим, который был в первый момент после замыкания ключа. С момента коммутации прошло время  $4t_2 = T = 4l/c$  и снова начинается переходный процесс, этапы которого показаны на рис. 17.14.

Аналогично рассматриваются переходные процессы при коротком замыкании в конце линии, при включенном в конце линии резисторе, или конденсаторе, или катушке и т. д. Отметим, что отраженная волна имеет прямоугольную форму только в режимах холостого хода, короткого замыкания и подключенном резисторе. В других случаях получается отраженная волна более сложной формы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буртаев Ю. В., Овсянников П. Н. Теоретические основы электротехники. М.: Энергоатомиздат, 1984. 552 с.
2. Евдокимов Ф. Е. Теоретические основы электротехники. М.: Высшая школа, 1981. 528 с.
3. Зайчик М. Ю. Сборник задач и упражнений по теоретической электротехнике. М.: Энергоатомиздат, 1988. 492 с.



## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Амперметр 25, 94  
Амплитуда 343  
Аргумент вектора 316  
Асинхронный двигатель 398

Баланс мощностей 80

Ваттметр 310, 391  
Векторная диаграмма 249, 324, 344, 466, 476  
Вентиль 450  
Ветвь электрической цепи 50  
Вихревые токи 225  
Включение согласное и встречное 236, 343  
Волна стоячая 522  
Волны бегущая, прямая и обратная 513—516, 533  
Вольтметр 94  
Выпрямление переменного тока 450  
Высшие гармоники 421, 444

Генератор переменного тока 220  
— трехфазный 364  
Гистерезис и гистерезисный цикл 195, 461  
Графический расчет нелинейных цепей 119, 458

Двухполюсник активный 71, 91  
— пассивный 51  
Двухпроводная линия 510  
Действующее значение напряжения, тока и ЭДС 257, 429  
Диод 101, 114  
Диэлектрик 11, 137  
Диэлектрическая проницаемость 129, 141  
Добротность контура 354

Емкость 146, 152, 272  
Емкость статическая и дифференциальная 158

Закон Ампера 164  
— Джоуля—Ленца 36  
— Кулона 128  
— Ленца (правило) 218  
— Ома 17, 262  
— — в комплексной форме 323  
— — для магнитной цепи 204  
— — обобщенный 86  
— полного тока 180  
— электромагнитной индукции 215, 217  
Законы Кирхгофа 50, 79  
— — в комплексной форме 328  
— коммутации 480  
Заряд электрический 6, 128

Индуктивная связь 234, 343  
Индуктивность 227  
— взаимная 235, 344  
— статическая и дифференциальная 232  
Источник идеальный 39  
— тока 69  
— ЭДС или напряжения 39  
— электрической энергии 24, 28, 39

Конденсатор 134, 146, 151, 154, 161, 302  
— нелинейный 157  
Катушка индуктивности 227, 456  
Контур идеальный и параллельный 359  
— последовательный 353  
— электрической цепи 51  
Короткое замыкание 39  
Коэрцитивная сила 196  
Коэффициент полезного действия 35, 67  
— индуктивной связи 238  
— стабилизации 126  
— температурный 21  
— трансформации 478  
Коэффициенты амплитуды, формы кривой, искажений, гармоник 433

Коэффициент четырехполюсника 407

Круговая диаграмма 335

Линейные напряжение и ток 367

Магнитная индукция 165, 200

— постоянная 167

— проницаемость 165

Магнитное напряжение 180

— сопротивление 204

Магнитные линии 168

Магнитный поток 174

— — вращающийся 398

Магнитодвижущая сила 178

Мгновенные значения напряжения, тока, ЭДС и мощности 242, 247, 263, 267, 275, 421

Метод контурных токов 83

— наложения 77, 435

— пересечений 120

— симметричный составляющих 401

— узловых и контурных уравнений (Кирхгофа) 79, 329

— — потенциалов 86

— эквивалентного генератора (активного двухполюсника) 90

Мощность активная 265, 373, 389, 440

— источника и приемника 34, 43

— комплексная 328

— мгновенная 263, 267, 275, 286, 355, 389

— полная 281, 292

— потеря 34

— реактивная 269, 292, 373, 390

— трехфазной цепи 389

Намагниченность 176

Напряжение активное (составляющая напряжения) 276

— комплексное 323

— реактивное (индуктивная и емкостная составляющие) 276

— холостого хода 71, 92

— электрическое 8, 28

Напряженность магнитного поля 177, 200

— электрического поля 7, 129

Нейтральный (нулевой) провод 367

Падение напряжения 45

— — внутреннее 33

Параллельная работа генераторов 76

Параметры вторичные 514

— первичные 511

Передаточная функция 419

Переходные процессы 480

Период 242

Плотность заряда 134

— тока 15

Поверхностный эффект 269

Поверхность равного потенциала (эквипотенциальная) 136

Поле магнитное 164

— стационарное 13, 165

— электрическое 6

— электростатическое 133

Положительное направление 52, 263, 406, 510

Полупроводник 12, 111

Поляризованность 140

Последовательность фаз 365, 399

Постоянная времени цепи 483, 493

— магнитная 167

— электрическая 130

Потенциал 9, 47, 53, 86

Потенциальная диаграмма 46

Потери от вихревых токов 465

— — гистерезиса 463

Поток вектора 131, 143

Потокоцепление 219

Правило буравчика 166

— левой руки 170

— правой руки 179, 215

Приемник электрической энергии 24, 39

Принцип наложения 44, 77

Проводимость 17

— активная, реактивная, полная 297—299

— индуктивная, емкостная и комплексная 326

— узловая 87

Резистор 19

Резонанс напряжений 353

— токов 361

Резонансные кривые 354, 360

Сдвиг фаз 290

Сила, действующая в магнитном поле 165, 173

— — — электрическом поле 7, 129

Симметричные составляющие трехфазной системы 401

Смещение нейтрали 381

Согласованная нагрузка 518

Соединение звездой и треугольни-

ком 60, 366—388  
 — параллельное 56, 72, 331  
 — последовательное 53, 72, 331  
 — смешанное 59, 333  
 Сопротивление 17  
 — активное 265  
 — вносимое 348  
 — внутреннее 32, 51, 91  
 — волновое 514  
 — входное 51, 91, 348, 409  
 — емкостное 274  
 — индуктивное 267  
 — комплексное 323  
 — контурное 84  
 — общее 84  
 — полное 278  
 — проводов 17, 41  
 — реактивное 289  
 — статическое и дифференциальное 124  
 — характеристическое 353  
 — эквивалентное 55  
 Спектральный состав 226  
 Средние значения напряжения, тока и ЭДС 255, 429  
 Стабилизаторы тока и напряжения 126  
 Схема замещения электрической цепи 31, 91  
 — эквивалентная 59, 68  
 Теорема Гаусса 131  
 Ток 10, 14  
 — активный и реактивный (составляющие тока) 297  
 — контурный 83  
 — короткого замыкания 40, 70, 91  
 — комплексный 323  
 — смещения 161  
 Топографическая диаграмма 339, 369, 383  
 Трансформатор 347, 475  
 Треугольники напряжений, токов, сопротивлений, проводимостей, мощностей 276—288, 325  
 Трехфазная система 363  
 Удельные проводимость и сопротивление 16, 18  
 Узлы электрической цепи 50  
 Фаза гармонической величины 248  
 — начальная 247  
 Фазные напряжения, токи и ЭДС 367

Ферромагнитные материалы 197  
 Феррорезонанс 469  
 Фильтры электрические 442  
 Характеристика вебер-амперная 231  
 — внешняя 39, 70  
 — вольт-амперная 39, 116, 119, 124  
 — кулон-вольтная 157  
 — линейная 39  
 — нелинейная 99, 106, 116, 119, 124  
 — несимметричная 100  
 — симметричная 99  
 — частотная 355  
 Холостой ход 39, 42  
 Цепи линейные неразветвленные и разветвленные 50, 261  
 — магнитные неразветвленные и разветвленные 206  
 — нелинейные 99  
 — с индуктивно связанными элементами 343  
 Частота 243  
 — резонансная 353, 362  
 — угловая 244  
 Четырехполюсник пассивный и активный 405  
 Электрическая восприимчивость 140  
 — цепь нелинейная 99  
 — — несинусоидального тока 435  
 — — постоянного тока 23  
 — — простейшая 25, 40  
 — — синусоидального тока 261—301  
 Электрические линии 7  
 Электрический диполь 138  
 Электрическое смещение 140  
 Электродвижущая сила 27  
 — — взаимной индукции 236  
 — — самоиндукции 229, 266  
 — — сторонняя 29  
 — — электромагнитной индукции 27, 213  
 Электростатическая индукция 137  
 Энергия активная и реактивная  
 — магнитного поля 232  
 — электрического поля 162

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	4
<b>Глава первая. Электрические цепи постоянного тока . . .</b>	<b>6</b>
1.1. Электрический заряд, напряжение, потенциал . . .	6
1.2. Проводники, изоляторы, полупроводники . . .	9
1.3. Электрический ток и его плотность . . .	12
1.4. Сопротивление и закон Ома . . .	17
1.5. Зависимость сопротивления от температуры . . .	21
1.6. Проводниковые материалы . . .	23
1.7. Электрическая цепь и ее основные элементы . . .	23
1.8. Электродвижущая сила . . .	27
1.9. Химические источники электрической энергии . . .	28
1.10. Схема замещения электрической цепи, мощность и коэффициент полезного действия . . .	31
1.11. Преобразование электрической энергии в тепловую . . .	36
1.12. Простейшая электрическая цепь . . .	39
1.13. Электрическая цепь с двумя источниками . . .	44
1.14. Потенциальная диаграмма . . .	46
<b>Глава вторая. Расчет электрических цепей постоянного тока . . .</b>	<b>50</b>
2.1. Законы Кирхгофа . . .	50
2.2. Последовательное соединение резисторов . . .	53
2.3. Параллельное соединение резисторов . . .	56
2.4. Смешанное соединение резисторов . . .	59
2.5. Соединение звездой и треугольником . . .	60
2.6. Потеря напряжения в проводах . . .	65
2.7. Эквивалентные схемы источников энергии . . .	68
2.8. Соединение химических источников питания . . .	71
2.9. Метод узлового напряжения . . .	74
2.10. Метод наложения . . .	77
2.11. Применение двух законов Кирхгофа . . .	79
2.12. Метод контурных токов . . .	83
2.13. Метод узловых потенциалов (напряжений) . . .	86
2.14. Метод эквивалентного генератора . . .	90
2.15. Измерение токов, напряжений и сопротивлений . . .	94
<b>Глава третья. Нелинейные цепи постоянного тока . . .</b>	<b>99</b>
3.1. Нелинейные элементы и их характеристики . . .	99
3.2. Электровакuumные приборы . . .	100
3.3. Газоразрядные приборы . . .	105
3.4. Полупроводниковые диоды и триоды . . .	111

3.5.	Графический метод расчета нелинейных электрических цепей	119
3.6.	Аналитический метод расчета нелинейных электрических цепей	124
3.7.	Стабилизаторы тока и напряжения	126
<b>Глава четвертая. Электрическое поле</b>		<b>128</b>
4.1	Закон Кулона	128
4.2.	Теорема Гаусса	131
4.3.	Однородное электрическое поле	133
4.4.	Диэлектрики в электрическом поле	137
4.5.	Векторы поляризованности и смещения	140
4.6.	Электрическая прочность диэлектриков	143
4.7.	Электронизолационные материалы	145
4.8.	Емкость. Конденсатор	146
4.9.	Соединения конденсаторов	148
4.10.	Плоский конденсатор	151
4.11.	Электрическое поле и емкость двухслойного конденсатора	152
4.12.	Цилиндрический конденсатор	154
4.13.	Емкость двухпроводной линии	155
4.14.	Нелинейные конденсаторы	157
4.15.	Зарядка и разрядка конденсатора. Ток смещения	159
4.16.	Энергия электрического поля	162
<b>Глава пятая. Магнитное поле</b>		<b>164</b>
5.1.	Индукция магнитного поля	164
5.2.	Электрон в магнитном поле	172
5.3.	Магнитный поток	174
5.4.	Векторы намагничивания и напряженности магнитного поля	175
5.5.	Магнитодвижущая сила и магнитное напряжение	178
5.6.	Закон полного тока	180
5.7.	Магнитное поле провода с током	182
5.8.	Магнитное поле катушки	186
5.9.	Работа электромагнитных сил	188
5.10.	Магнитоэлектрический измерительный механизм	191
<b>Глава шестая. Магнитная цепь</b>		<b>192</b>
6.1.	Намагничивание ферромагнетиков	192
6.2.	Циклическое перемагничивание	195
6.3.	Ферромагнитные материалы	197
6.4.	Магнитное поле на границе двух сред	200
6.5.	Магнитная цепь	202
6.6.	Расчет магнитных цепей	206
6.7.	Постоянные магниты	210
<b>Глава седьмая. Электромагнитная индукция</b>		<b>213</b>
7.1.	Электродвижущая сила электромагнитной индукции	213
7.2.	Электрические генераторы	219
7.3.	Электрические двигатели	222
7.4.	Вихревые токи	225
7.5.	Индуктивность. Катушка индуктивности	227
7.6.	Электродвижущая сила самоиндукции	229
7.7.	Нелинейная катушка индуктивности	231

7.8.	Энергия магнитного поля . . . . .	232
7.9.	Взаимная индукция . . . . .	234
7.10.	Электромагниты . . . . .	239
7.11.	Магнитогидродинамический генератор . . . . .	240
<b>Глава</b>	<b>восьмая. Электрические цепи синусоидального тока</b>	<b>242</b>
8.1.	Переменный ток . . . . .	242
8.2.	Фаза синусоидальной величины . . . . .	246
8.3.	Графическое изображение синусоидальной величины . . . . .	249
8.4.	Среднее значение синусоидальной величины . . . . .	255
8.5.	Действующее значение синусоидальной величины . . . . .	257
8.6.	Измерение переменных токов и напряжений . . . . .	260
<b>Глава</b>	<b>девятая. Расчет электрических цепей синусоидального тока</b>	<b>261</b>
9.1.	Особенности цепей переменного тока . . . . .	261
9.2.	Цепь с резистивным элементом . . . . .	261
9.3.	Цепь с индуктивным элементом . . . . .	265
9.4.	Поверхностный эффект и эффект близости . . . . .	269
9.5.	Цепь с емкостным элементом . . . . .	272
9.6.	Цепь с сопротивлением и индуктивностью . . . . .	276
9.7.	Цепь с сопротивлением и емкостью . . . . .	283
9.8.	Простая неразветвленная цепь переменного тока . . . . .	287
9.9.	Общий случай неразветвленной цепи . . . . .	292
9.10.	Параллельное соединение двух ветвей . . . . .	295
9.11.	Расчет цепи с параллельно соединенными ветвями методом проводимостей . . . . .	297
9.12.	Общий случай цепи с параллельными ветвями . . . . .	301
9.13.	Схемы замещения конденсатора и катушки с потерями . . . . .	302
9.14.	Значение коэффициента мощности для энергетики . . . . .	306
9.15.	Активная и реактивная энергии . . . . .	309
9.16.	Измерение мощности и угла сдвига фаз . . . . .	310
<b>Глава</b>	<b>десятая. Комплексный метод расчета цепей синусоидального тока</b>	<b>314</b>
10.1.	Основные понятия . . . . .	314
10.2.	Действия с комплексными числами . . . . .	317
10.3.	Комплексные величины электрической цепи . . . . .	322
10.4.	Законы Кирхгофа в комплексной форме . . . . .	328
10.5.	Расчет простейших цепей . . . . .	331
10.6.	Общий случай расчета со смешанным соединением элементов . . . . .	333
10.7.	Круговые диаграммы . . . . .	335
10.8.	Топографические диаграммы . . . . .	339
10.9.	Получение угла сдвига фаз $90^\circ$ . . . . .	341
10.10.	Цепи с индуктивно связанными элементами . . . . .	343
10.11.	Измерение взаимной индуктивности . . . . .	350
<b>Глава</b>	<b>одиннадцатая. Резонанс в электрических цепях</b>	<b>351</b>
11.1.	Основные понятия . . . . .	351
11.2.	Резонанс в последовательном контуре . . . . .	353
11.3.	Резонанс в параллельном контуре . . . . .	359
<b>Глава</b>	<b>двенадцатая. Трехфазные цепи</b>	<b>363</b>
12.1.	Трехфазные системы . . . . .	363
12.2.	Соединение обмоток генератора звездой . . . . .	366

12.3.	Соединение обмоток генератора треугольником	369
12.4.	Симметричный режим трехфазной цепи	370
12.5.	Несимметричный режим трехфазной цепи	377
12.6.	Преобразование схем трехфазных цепей	386
12.7.	Мощности трехфазной цепи	389
12.8.	Измерение мощности в трехфазной цепи	391
12.9.	Вращающееся магнитное поле	393
12.10.	Принцип действия асинхронных электродвигателей	398
12.11.	Определение последовательности фаз	399
12.12.	Симметричные составляющие несимметричной трехфазной системы	401
<b>Глава</b>	<b>тринадцатая. Четырехполюсники</b>	<b>405</b>
13.1.	Основные понятия	405
13.2.	Уравнения четырехполюсника	406
13.3.	Сопротивления и коэффициенты четырехполюсников	409
13.4.	Пассивные симметричные четырехполюсники	413
13.5.	Эквивалентные четырехполюсники	416
13.6.	Входные и передаточные функции	418
<b>Глава</b>	<b>четырнадцатая. Электрические цепи несинусоидального тока</b>	<b>420</b>
14.1.	Основные понятия	420
14.2.	Различные виды симметрии	423
14.3.	Спектральный состав периодических кривых	426
14.4.	Действующее и средние значения несинусоидальной величины	429
14.5.	Коэффициенты, характеризующие степень несинусоидальности	433
14.6.	Расчет линейных электрических цепей несинусоидального тока	435
14.7.	Мощности цепи несинусоидального тока	439
14.8.	Фильтры	442
14.9.	Высшие гармоники в трехфазных цепях	444
<b>Глава</b>	<b>пятнадцатая. Нелинейные электрические цепи переменного тока</b>	<b>449</b>
15.1.	Общие замечания	449
15.2.	Нелинейные цепи с резистивными элементами	450
15.3.	Катушки со стальным магнитопроводом	456
15.4.	Влияние гистерезиса на режим катушки со стальным магнитопроводом	461
15.5.	Мощность потерь в магнитопроводе	463
15.6.	Векторная диаграмма и схема замещения катушки со стальным магнитопроводом	466
15.7.	Феррорезонанс	469
15.8.	Управляемый дроссель и магнитный усилитель	472
15.9.	Трансформатор со стальным магнитопроводом	475
<b>Глава</b>	<b>шестнадцатая. Переходные процессы в электрических цепях</b>	<b>480</b>
16.1.	Законы коммутации	480
16.2.	Включение $rL$ -цепи к источнику постоянного напряжения	482
16.3.	Короткое замыкание $rL$ -цепи	485

16.4.	Отключение $rL$ -цепи . . . . .	487
16.5.	Изменение сопротивления в $rL$ -цепи . . . . .	489
16.6.	Включение $rC$ -цепи к источнику постоянного напряжения . . . . .	491
16.7.	Короткое замыкание $rC$ -цепи . . . . .	494
16.8.	Включение $rL$ -цепи к источнику синусоидального напряжения . . . . .	496
16.9.	Короткое замыкание катушки в цепи синусоидального тока . . . . .	499
16.10.	Включение $rC$ -цепи к источнику синусоидального напряжения . . . . .	500
16.11.	Включение катушки со стальным магнитопроводом к источнику синусоидального напряжения . . . . .	504
<b>Глава семнадцатая. Электрические цепи с распределенными параметрами . . . . .</b>		<b>508</b>
17.1.	Основные понятия . . . . .	508
17.2.	Параметры уравнения однородной линии без потерь . . . . .	510
17.3.	Волны в линии без потерь . . . . .	513
17.4.	Линия с потерями . . . . .	529
17.5.	Линия без искажений . . . . .	531
17.6.	Переходные процессы в длинных линиях . . . . .	532
17.7.	Переходные процессы при движении волн прямоугольной формы . . . . .	533
Список литературы . . . . .		535
Предметный указатель . . . . .		536



**Учебник**

**Попов Виктор Степанович**

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА**

Редактор издательства М. П. Соколова  
Художественные редакторы: В. А. Гозак - Хозак,  
Ю. В. Созанская  
Технический редактор В. В. Хапаева  
Корректор И. А. Володьева  
ИБ № 3131

Сдано в набор 04.05.89. Подписано в печать 20.06.89. Формат  $84 \times 108^{1/32}$ .  
Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая.  
Усл. печ. л. 28,56. Усл. кр.-отт. 28,56. Уч.-изд. л. 28,66. Тираж  
80,000 экз. Заказ № 320. Цена 1 р. 20 к.

Энергоатомиздат. 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Владимирская типография Госкомитета СССР по печати

600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7

